Aires de surfaces planes et nombres décimaux : questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème.

Marie-Jeanne Perrin-Glorian

UNIVERSITE PARIS 7

THESE DE DOCTORAT D'ETAT

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée par : Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN.

AIRES DE SURFACES PLANES ET NOMBRES DECIMAUX. QUESTIONS DIDACTIQUES LIEES AUX ELEVES EN DIFFICULTE AUX NIVEAUX CM-6ème.

soutenue le 11 Février 1992 devant la commission d'examen

JURY :	PRESIDENT	Daniel LACOMBE
	CODIRECTEURS	André REVUZ
		Aline ROBERT
	EXAMINATEURS	Josette ADDA
		Paolo BOERO
		Guy BROUSSEAU
		Marc CHAPERON
		Régine DOUADY
		Gérard VERGNAUD

UNIVERSITE PARIS 7

THESE DE DOCTORAT D'ETAT

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée par : Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN.

AIRES DE SURFACES PLANES ET NOMBRES DECIMAUX. QUESTIONS DIDACTIQUES LIEES AUX ELEVES EN DIFFICULTE AUX NIVEAUX CM-6ème.

soutenue le 11 Février 1992 devant la commission d'examen

JURY :	PRESIDENT	Daniel LACOMBE
	CODIRECTEURS	André REVUZ
		Aline ROBERT
	EXAMINATEURS	Josette ADDA
		Paolo BOERO
		Guy BROUSSEAU
		Marc CHAPERON
		Régine DOUADY
		Gérard VERGNAUD

REMERCIEMENTS.

Je voudrais en premier lieu exprimer ma reconnaissance à mes Directeurs de thèse qui ont chacun beaucoup contribué à l'aboutissement de ce travail :

André Revuz, il y a longtemps déjà, m'a convaincue par son exemple qu'on pouvait enseigner les mathématiques de façon passionnante, puis, dans les débuts de l'IREM, a éveillé mon intérêt pour la didactique en me faisant comprendre qu'il y avait lieu de s'interroger sur ce que sont les mathématiques et qu'il était nécessaire de mener une réflexion de fond sur les problèmes d'enseignement. Il m'a encouragée dans le présent travail, et m'a fait bénéficier de son expérience et de sa compétence, notamment sur la question des aires.

Aline Robert, sans qui la deuxième partie de cette thèse n'aurait sans doute jamais été écrite, n'a cessé de me soutenir moralement et m'a aidée à organiser mes idées et, notamment par les constructions théoriques qu'elle a développées dans le même temps, à tirer parti d'une expérience que je ne croyais pas pouvoir exploiter.

Il est évident que cette thèse doit beaucoup au travail effectué pendant de longues années aux côtés de Régine Douady qui m'a initiée à la recherche en didactique et m'a communiqué, avec l'aide de Madame Latour, la passion d'enseigner les mathématiques aux jeunes enfants. Je tiens à la remercier ici de cette collaboration dont je ne saurais dire tout ce qu'elle m'a apporté.

Les nombreuses références aux publications de G. Brousseau montrent combien il a aidé à ma réflexion. Je lui sais gré d'avoir toujours été attentif à mes questions, les discussions que j'ai pu avoir avec lui m'ont été très précieuses. Je le remercie de l'attention qu'il a accordée à mon travail et j'espère utiliser ses suggestions.

J'ai beaucoup appris aussi en lisant et en écoutant Gérard Vergnaud et je le remercie de m'avoir fait le plaisir de faire partie de ce jury malgré ses multiples occupations.

Je suis très reconnaissante à Paolo Boero d'avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir fait dans des délais très brefs, malgré l'éloignement, un rapport sur un aussi long texte en français. Je le remercie de l'intérêt qu'il a montré pour mon travail et j'espère tirer parti des suggestions qu'il m'apporte à partir de la grande expérience qu'il a sur ce domaine de recherche.

J'espère aussi avoir un échange fructueux avec Josette Adda sur la question de l'enseignement aux élèves en difficulté, qu'elle a abordée d'un autre point de vue, et je lui sais gré de l'attention qu'elle accorde à mes travaux.

Je suis très reconnaissante à Marc Chaperon d'avoir accepté de s'intéresser en tant que mathématicien à une recherche en didactique des mathématiques à un niveau élémentaire et de faire partie de ce jury.

Mes remerciements vont aussi à Daniel Lacombe qui a bien voulu présider ce jury et qui m'a montré, par ses questions, tout l'intérêt qu'il prenait à mon travail.

Cette thèse doit beaucoup aux échanges avec l'ensemble des membres de l'équipe DIDIREM. Je remercie plus particulièrement Michèle Artigue et Jacqueline Robinet qui, au cours de nombreuses discussions, et en de multiples occasions, m'ont aidée à clarifier mes idées, ainsi que Denis Butlen qui a élaboré avec moi plusieurs expérimentations auprès d'élèves en difficulté et qui m'a procuré une photocopie des programmes anciens de l'école élémentaire.

Beaucoup d'autres collègues, que je ne peux nommer tous, ont droit à ma reconnaissance. Citons Marianne Frémin qui, par sa collaboration précise et discrète, a largement contribué à la qualité du recueil des données sur les aires.

Je voudrais aussi exprimer mes remerciements à tous les membres du GR8. Les discussions que nous avons eues au sein de ce groupe m'ont beaucoup apporté, notamment dans l'élaboration de mon questionnement théorique.

La réalisation de cette thèse doit énormément à l'existence de l'IREM de Paris 7 et aux conditions de travail qui ont été rendues possibles par les directeurs (et directrices) successifs. Je les en remercie, ainsi que tous les membres du personnel pour leur disponibilité et leur gentillesse à mon égard : Odette Diraert, Chantal Briend, Annie Sornaga qui m'a servi d'interprète en italien, et plus particulièrement Martine Lamy qui m'a, plus d'une fois, aidée dans la frappe et Nadine Locufier à qui j'ai procuré un net surcroît de travail ces derniers temps.

Enfin, cette recherche n'aurait jamais existé sans la participation de nombreux enseignants et élèves, qui m'ont accueillie dans leur classe, qui ont répondu à des questionnaires ou à des entretiens, et qui, pour cette thèse ou à d'autres occasions, m'ont beaucoup appris. Je ne peux les nommer tous mais je voudrais plus particulièrement remercier Mesdames ou Messieurs Belloc, Bourgeois, D'Agostino, Doussard, Ducousset, Gante, Giraud, Guigou, Guyonnet, Lagrange, Landon, Latour, Maspimby, Mathiaud, Métivier, Michel, Montfront, Néri, Pissaruk, Touaty …

INTRODUCTION

Cette thèse est le résultat d'un travail qui s'est déroulé sur une longue période. Il est donc assez naturel d'y observer une évolution assez marquée des objets d'étude, des problématiques et des méthodologies.

Le point de départ est un travail d'ingénierie didactique qui a démarré vers 1981. Il porte sur la notion d'aire de surface plane. Les observations en classe ou hors de la classe étudiées ici sur ce sujet, ont eu lieu pendant l'année scolaire 1982-1983. Il s'agissait à cette époque essentiellement pour nous de construire de "bonnes situations" d'enseignement qui permettraient d'enseigner ce concept avec un sens aussi proche que possible de celui qu'il a dans le savoir mathématique. Ce travail ne peut s'effectuer sans une analyse du savoir en jeu, une analyse a priori des conceptions qui risquent d'apparaître chez les élèves et a posteriori de celles qui apparaissent effectivement. Dans cette recherche, nous avons surtout questionné les pôles "savoir" et "élève".

Cependant une de nos préoccupations personnelles était depuis longtemps celle d'améliorer l'apprentissage des élèves de milieu social défavorisé. Notre hypothèse naïve de départ était qu'un enseignement soucieux de construire le sens des concepts enseignés et donnant pour cela une responsabilité à l'élève dans des situations a-didactiques, avec une organisation de type dialectique outil-objet[1] devait apporter une telle amélioration.

Nous avons réalisé une expérience dans des classes de CM2 et de 6ème entre 1983 et 1985. Les résultats, même s'ils n'étaient pas entièrement négatifs, n'ont pas été conformes à nos attentes. Il nous a alors fallu du temps pour prendre du recul par rapport aux observations et faire un long travail de décontextualisation et de dépersonnalisation qui nous a amenée à élargir notre problématique, à redéfinir nos objets d'étude et à envisager de nouvelles méthodes. Nous avons notamment ajouté l'enseignant à nos objets d'étude et essayé de prendre en compte des contraintes culturelles extérieures qui pouvaient influer sur le fonctionnement didactique.

Il n'y a aucune rupture dans les méthodes de travail entre la première partie de cette thèse et le début de la deuxième partie (chapitres 1 à 3). Il existe au contraire une constante dans nos méthodes d'observation de classes de 1982 à 1985 : nous avons toujours suivi les classes pendant toute l'année (ou un semestre dans un cas). Pour les classes primaires, le travail d'ingénierie didactique et la collaboration avec les instituteurs ont porté sur la majeure partie du travail de mathématiques de l'année. C'est notamment le cas de la classe de CM2 où a eu lieu l'expérimentation sur les aires dont nous rendons compte dans la première partie : pour cette classe, seul ce qui concerne les aires a été analysé mais nous avions aussi travaillé sur les nombres. Il faut noter d'ailleurs que la recherche sur l'enseignement de la notion d'aire est née de celle sur les nombres décimaux : dans l'ingénierie didactique sur les fractions et décimaux réalisée avec R. Douady (voir sa thèse, 1984), pour donner un sens au produit de 2 fractions, nous utilisions un jeu de cadres[2] entre le numérique et le géométrique par l'intermédiaire des aires de rectangles et il nous est apparu que pour que ce jeu de cadres fonctionne vraiment, il était souhaitable de travailler la notion d'aire pour elle-même.

Jusqu'en 1983, les expérimentations que nous avions réalisées avaient toujours eu lieu dans des écoles d'application de l'Ecole Normale, avec des maîtres qui étaient eux-mêmes formateurs d'instituteurs et qui avaient pu être associés à l'élaboration des séquences puisqu'ils bénéficiaient en tant que formateurs de certaines décharges d'enseignement. En reprenant les séquences déjà expérimentées avec des enseignants "ordinaires", nous pensions aussi étudier la transmission de ces séquences, en même temps que la possiblité de leur amélioration (en ce qui concerne les aires par exemple). L'ingénierie didactique avait donc pour nous son double aspect : produit de la recherche et méthode de recherche.

---

[1] Il est clair que c'est une formulation que nous donnons maintenant puisque la notion de situation a-didactique ne nous était pas connue à l'époque et que celle de dialectique outil-objet, si elle avait une signification concrète pour nous puisque nous avions participé aux expérimentations de R. Douady depuis 1975, était encore largement implicite au début de cette recherche.

[2] voir chapitre 1 de la deuxième partie.

Les difficultés rencontrées dans les expérimentations de 1983 à 1985 nous ont amenée à les interrompre pour reprendre le problème autrement et augmenter nos moyens d'analyse. Nous avons fait un travail bibliographique sur l'échec scolaire, étudié un cas particulier et commencé des recherches complémentaires sur les représentations des enseignants et des élèves qui nous permettaient de dépersonnaliser les observations précédentes.

La première partie de cette thèse porte donc sur le travail d'ingénierie didactique concernant la notion d'aire de surfaces planes. La deuxième rend compte de l'étude effectuée sur l'enseignement des mathématiques dans des classes composées majoritairement d'élèves de milieu social défavorisé. C'est tout au long de cette partie que les objets d'étude évoluent. Le cadre théorique est présenté à mesure de l'évolution, on le trouve donc réparti sur plusieurs chapitres, essentiellement 1 et 4. Il est aussi repris et prolongé dans le dernier chapitre de conclusion. On trouvera aussi une réflexion méthodologique à laquelle l'ensemble de ce travail nous a amenée. Nous y reviendrons notamment sur la portée et les limites d'un travail d'ingénierie didactique.

Bien que nous y ayons passé beaucoup de temps, nous avons conscience de n'avoir qu'ébauché une recherche sur l'échec scolaire en mathématiques des élèves de milieu populaire et d'apporter non pas des réponses mais de nouvelles questions.

PREMIERE PARTIE.

ENSEIGNEMENT DE LA NOTION D'AIRE
DE SURFACE PLANE
A L'ECOLE ELEMENTAIRE ET AU COLLEGE.

INTRODUCTION

Le problème qui nous occupe dans cette première partie est l'enseignement de la notion d'aire à des élèves de l'école élémentaire et de sixième.

La mesure des surfaces planes est un problème très ancien puisque fortement lié aux activités sociales (mesures agraires en particulier). Depuis le début de l'école obligatoire son enseignement fait partie des programmes de l'école élémentaire. Cependant les notions mathématiques à enseigner à ce propos n'ont pas toujours été les mêmes. Dans un premier chapitre, nous apporterons des éléments à l'analyse de la transposition didactique de la notion d'aire de surface plane. Nous nous interrogerons sur le contenu mathématique visé, sur les manières de l'aborder dans l'enseignement, nous examinerons les programmes de l'école élémentaire et de la classe de 6ème depuis la fin du siècle dernier et un certain nombre de manuels utilisés au cours des trente dernières années. Nous verrons que la signification des termes employés, surface, aire, a évolué en même temps que l'objectif même de l'enseignement de la mesure des aires.

Nous relaterons ensuite une expérience d'enseignement faite au cours moyen en collaboration avec R. Douady. L'objectif de l'enseignement que nous avons cherché à mettre sur pied était d'associer un nombre au maximum de surfaces (en particulier tous les polygones et les disques) de façon à pouvoir faire des comparaisons et des calculs. Cependant, pour définir une application mesure entre surfaces et nombres avec suffisamment de sens pour les élèves, nous avons fait l'hypothèse qu'il faut d'abord construire l'aire comme grandeur autonome en distinguant aire et surface aussi bien qu'aire et nombre.

Un autre de nos objectifs, basé sur les erreurs habituelles des élèves, était de différencier aire et longueur, en particulier aire et périmètre, et ceci avant même d'avoir un moyen de mesurer les aires — le périmètre est en effet, pour les élèves, une autre "mesure" de la surface. Nous retardons l'identification entre aire et nombre avec l'hypothèse qu'une identification précoce entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs en jeu (ici aire et longueur).

Nous avons élaboré un processus d'apprentissage où sont à l'œuvre, entre autres, ces hypothèses didactiques sur le contenu. Nous avons réalisé ce processus, avec quelques variantes, dans deux classes de deux écoles différentes (un CM1, un CM2). Nous décrirons dans le chapitre 2 les séquences qui ont eu lieu dans le CM2 que nous avons observé nous-même.

L'analyse des réponses des élèves au cours d'entretiens par deux et à des épreuves écrites est l'objet du chapitre 3. Elle a permis de dégager les acquis, les difficultés qui résistent et les difficultés non prévues qui nous ont amenées à faire de nouvelles hypothèses et à modifier les séquences. C'est ce que nous exposerons dans le chapitre 4 de conclusion qui reprend pour une bonne part un article publié depuis[1].

---

[1] R. Douady et M.J. Perrin-Glorian "Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane" *Educational Studies in Mathematics*. 1989 Vol. 20.4 p. 387-424

CHAPITRE 1

A PROPOS DE LA TRANSPOSITON DIDACTIQUE DE LA NOTION D'AIRE DE SURFACE PLANE

Yves Chevallard a défini la transposition didactique comme "le "travail" qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement", (Chevallard 1985 p. 39) mais il précise aussitôt que "l'étude scientifique du processus de transposition didactique suppose la prise en compte de la transposition didactique "au sens large" représentée par le schéma —> objet de savoir —> objet à enseigner —> objet d'enseignement".

En ce qui concerne la notion d'aire de surface plane, nous allons surtout nous intéresser à la dernière flèche, même si pour éclairer ce travail, nous sommes amenée à faire quelques incursions sur celles qui sont en amont, et, pour l'étude de cette dernière flèche, l'analyse portera principalement sur une période assez récente (depuis 1960).

La mesure des surfaces est un problème qui, sur le plan pratique, s'est posé à l'homme de tout temps ; sur le plan théorique, c'est un problème très ancien également (voir par exemple les travaux d'Archimède sur l'aire du segment de parabole). Les objets de savoir à ce propos ont évolué au cours du temps, surtout dans une période relativement récente avec l'apparition de la théorie de la mesure depuis Jordan, Riemann, Banach, Lebesgue... Avec la notion d'aire, nous sommes dans le cas assez rare où l'objet à enseigner a pratiquement précédé l'objet de savoir : on admettait implicitement l'existence d'une mesure et le problème était de calculer les mesures de surfaces données. La question de l'existence d'une mesure et de son ensemble de définition n'a été posée et résolue qu'assez récemment (Hausdorff, Banach). Elle ne pouvait d'ailleurs l'être avant qu'on ne dispose d'une bonne définition des nombres réels, c'est-à-dire avant Dedekind.

A cause de son importance sociale, la mesure des surfaces a toujours fait partie des programmes depuis la naissance de l'école élémentaire obligatoire. Mais les objets d'enseignement à propos de la mesure ont évolué au cours du temps. Actuellement, on peut en distinguer principalement trois :

- les unités usuelles de mesure, le système métrique, les unités agraires...
- les instruments de mesure. Cet objet est inexistant à propos des surfaces : on mesure des longueurs mais on calcule les mesures de surface ; on peut le remplacer par les procédés de calcul, en commençant par les pavages et le dénombrement de pavés et en allant jusqu'aux formules et au calcul intégral.
- la mesure au sens mathématique moderne d'application, dont l'apparition est récente dans les programmes : à partir de 1969 en 6ème et de 1970 à l'école élémentaire.

Jusqu'à une époque très récente, ce qui est à mesurer est supposé transparent dans l'enseignement : on mesure des surfaces, sans préciser si la surface est une partie du plan ou une figure géométrique à déplacement près. Ce n'est qu'à partir de 1980 que l'on voit apparaître dans les programmes de l'école élémentaire un objet d'enseignement nouveau : la grandeur à mesurer désignée par le terme "aire", considérée comme invariant d'une classe de surfaces. On distingue l'aire à la fois de la surface et du nombre qui la mesure. Nous verrons que cet objet d'enseignement n'existe en fait pas dans le savoir mathématique où, par le choix d'une surface unité, on établit une correspondance entre surfaces et nombres : l'invariant des surfaces d'une même classe est le nombre. Cet objet d'enseignement est plutôt emprunté à la physique ou aux traditions de l'enseignement de la physique. En physique, on a besoin de considérer les unités et de pouvoir en changer ; il est ainsi nécessaire de considérer les relations entre grandeurs et pas seulement entre leurs mesures. Les équations aux dimensions règlent les relations entre grandeurs et entre unités et les systèmes d'unité de mesure liées permettent de travailler sur les nombres sans perdre de vue les grandeurs.

Remarquons que dans les programmes précédents, le même mot "aire" avait une signification différente. Le vocabulaire utilisé dans l'enseignement pose donc problème.

Dans le langage courant, on dispose de trois termes plus ou moins équivalents : surface, aire, superficie. Ainsi le Petit Robert (édition de 1977) définit-il *surface* 1. (courant) partie extérieure d'un corps qui le limite en tous sens ; face apparente visible – aire, superficie... 2. (géométrie) figure géométrique à deux dimensions de l'espace qui peut être considérée... 3. (physique) limite entre deux milieux différents.

superficie (didactique) surface d'un corps considérée surtout dans son étendue et dans son caractère extérieur – nombre caractérisant l'étendue d'une surface

aire 1. toute surface plane...espace plat où nichent les oiseaux de proie... 2. (géométrie) portion limitée de surface, nombre qui la mesure... 3. région plus ou moins étendue occupée par certains êtres, lieu de certaines activités...

Ces trois termes ont été utilisés dans l'enseignement des mathématiques avec des sens voisins et pas toujours précisés ; le mot "aire" est d'introduction récente dans l'enseignement à un niveau élémentaire, mais nous verrons que son usage n'est pas encore vraiment fixé : on le trouve avec des sens différents dans les programmes et les manuels des dix dernières années.

Dans un premier paragraphe, nous allons examiner le problème mathématique de la définition des aires planes, nous étudierons ensuite l'évolution des contenus d'enseignement et du vocabulaire à travers les programmes de l'école élémentaire et du collège depuis le début du siècle. Nous regarderons un peu plus précisément l'évolution récente à travers les manuels depuis 1960.

1. Problème mathématique

Par surface, nous entendons une partie du plan, même si nous sommes amenée par la suite à faire référence à d'autres usages de ce terme. Le problème qui nous intéresse est la comparaison de la place occupée par des surfaces dans le plan et, pour faciliter cette comparaison, celui d'associer à une surface un nombre qui rende compte de la place qu'elle occupe de manière à remplacer la comparaison des surfaces par celle des nombres. Le problème mathématique est donc celui de la définition d'une fonction mesure μ de l'ensemble des surfaces planes dans $\mathbf{R}^+$ (auquel on ajoute éventuellement une valeur infinie si on ne se limite pas aux surfaces bornées) qui vérifie "de bonnes propriétés" d'additivité et d'invariance par déplacement.

En fait, μ ne sera pas définie partout mais sur un certain ensemble de surfaces, l'ensemble des surfaces mesurables pour μ et cet ensemble de surfaces mesurables va dépendre des exigences qu'on met sur la fonction mesure. On peut trouver une approche du problème théorique de la mesure des aires dans Revuz (1958).

Si on demande que μ vérifie les propriétés suivantes :
- si S_1 et S_2 sont disjointes, alors $\mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$
- $\mu(S) \geq 0$ pour tout S
- μ est invariante par isométrie : pour toute isométrie g, et toute surface S, $\mu(g(S)) = \mu(S)$,

il est clair que μ ne peut être définie qu'à un coefficient de proportionnalité près : si μ convient, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^+$, $\lambda\,\mu$ convient aussi. On peut montrer que, pour tout polygone convexe A, il existe une et une seule application μ définie sur l'ensemble des polygones et vérifiant les propriétés ci-dessus et telle que $\mu(A) = 1$. L'ensemble des surfaces mesurables pour μ ne dépend pas du choix de A, c'est l'ensemble des surfaces quarrables. On prend le plus souvent pour A un carré.

En fait, Banach (1923) a montré, en utilisant l'axiome du choix, qu'une telle application peut se prolonger à l'ensemble de toutes les parties du plan mais alors on perd l'unicité qui n'est garantie que sur l'ensemble des parties quarrables. Cette propriété est particulière aux dimensions 1 et 2 : en dimension 3, Hausdorff (1914) a prouvé qu'une mesure vérifiant les propriétés ci-dessus ne pouvait être définie partout. Banach et Tarski (1924) ont prolongé son travail et montré qu'on peut trouver 2 boules de rayons différents et une partition finie de chacune d'elles en n parties $B = \cup A_i$ $B' = \cup A'_i$ avec, pour tout i, A_i et A'_i isométriques[2].

Ces résultats ont un grand intérêt théorique mais ils sont assez loin de nos préoccupations d'enseignement à un niveau élémentaire. Ce qui nous importe plutôt, c'est l'existence et l'unicité de la fonction mesure sur les parties quarrables.

On peut en effet définir μ de plusieurs manières à partir de $\mu(C) = 1$ pour un carré C donné. La question qui se pose est de savoir si, quelle que soit la méthode de construction de μ, on va obtenir la même application, définie

[2] Nous remercions le collègue qui a eu la gentillesse de nous procurer la démonstration que nous joignons en annexe.

sur le même ensemble de surfaces. Cette question n'est pas évidente et pose des problèmes théoriques différents suivant la manière dont on la construit. On va se contenter de l'existence et de l'unicité sur les parties quarrables.

On choisit un carré C, on pose $\mu(C) = 1$.

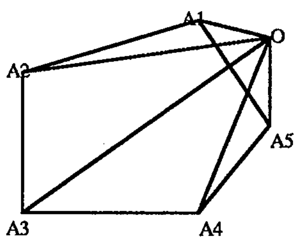
Une première manière de définir μ est de considérer dans le plan un réseau de maille C, et des subdivisions de ce réseau par partage des côtés, par exemple suivant les puissances de 10 : C_i est le carré obtenu en partageant les côtés de C en 10^i. Si on prend une surface plane S, on peut compter le nombre n_i de carrés C_i qui sont contenus dans S et le nombre N_i de carrés C_i qui contiennent un point de S. L'aire de S est définie si $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ tend vers 0 quand i tend vers l'infini. La limite commune de $\frac{N_i}{100^i}$ et $\frac{n_i}{100^i}$ est alors l'aire de S.

On montre que les rectangles ayant des côtés parallèles aux axes ont une aire, que tout polygone a une aire, ce qui n'est pas évident, et qu'une réunion de polygones disjoints a pour aire la somme des aires.

Mais dans cette présentation, il reste à démontrer l'invariance par isométrie et c'est une question qui n'est pas triviale (voir Lebesgue 1975 p. 41-44). On en déduit que l'aire ainsi définie ne dépend pas de la position dans le plan du carré choisi mais seulement de sa taille. On peut d'ailleurs calculer l'influence de la taille du carré : si on remplace le carré C par un carré C' dont le côté est k fois celui de C, la nouvelle aire est l'ancienne divisée par k^2, ou encore si on applique à une surface une homothétie de rapport k, son aire est multipliée par k^2. Il reste à voir que les aires ainsi définies sont les seules à répondre au problème (à un coefficient multiplicatif près) : si on suppose qu'il existe une application définie sur une famille de surfaces planes contenant les polygones à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ invariante par translation et additive (l'aire de la réunion de surfaces disjointes est la somme des aires), alors cette application est entièrement déterminée par la donnée de l'aire d'un carré et on obtient l'aire définie précédemment.

Remarquons que, par cette méthode, on a besoin de limites, même pour définir l'aire des polygones.

Lebesgue examine d'autres manières d'aborder le problème, qui ne nécessitent pas de passage à la limite dans le cas des polygones, notamment la suivante où on définit directement les aires des polygones : soit un point O du plan et un polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$, on va définir l'aire du polygone par la quantité $\frac{1}{2}(\pm A_1A_2 \times \mathrm{dist}(O, A_1A_2) \pm \ldots \pm A_nA_1 \times \mathrm{dist}(O, A_nA_1))$ avec le signe + devant A_iA_{i+1} si O est du même côté que le polygone par rapport à A_iA_{i+1}, le signe - dans le cas contraire.



$\frac{1}{2}$ [A1A2. d(O, A1A2) + A2A3. d(O, A2A3) + A3A4. d(O, A3A4) + A4A5. d(O, A4A5) - A5A1. d(O, A5A1)]

Cette fois, le point crucial est de montrer que cette quantité ne dépend pas du choix du point O, ce qui permet de définir ainsi l'aire du polygone, et ensuite d'autres surfaces éventuellement non polygonales par additivité, encadrements et limite. L'aire définie de cette manière vérifie les propriétés demandées. On déduit l'invariance de l'aire par déplacement de celle des longueurs.

Un autre exposé classique consiste à se servir de l'invariance par déplacement et de l'additivité pour définir l'aire. On part d'un carré C qui a pour aire 1 ; tous les carrés superposables à C ont aussi pour aire 1. On montre alors en se servant de l'additivité que l'aire d'un rectangle peut être obtenue par le produit des dimensions, on établit les formules permettant de calculer l'aire d'un triangle et de diverses surfaces usuelles. L'aire d'un polygone est obtenue en décomposant le polygone en somme de triangles.

Le problème central est alors de montrer que le nombre obtenu ne dépend pas de la décomposition choisie. C'est ce que fait Hadamard (vers 1900) dans la note D de ses leçons de géométrie élémentaire plane : il montre que l'aire d'un triangle ABC ne dépend pas du choix du côté pris pour base et qu'elle est égale à ± aire de ABO ±

aire de ACO $\pm$ aire de BCO (le signe est + si O est du même côté que le triangle par rapport au côté considéré, - dans le cas contraire). Il étend ensuite ce résultat au cas des polygones et montre à la fois l'indépendance par rapport au point O choisi et par rapport à la décomposition en triangles. La deuxième présentation de Lebesgue s'appuie sur ce résultat, directement pour les polygones.

Si on ne montre pas que l'aire est indépendante de la décomposition, il faut admettre l'existence de l'aire et son unicité. Ainsi il n'est pas évident qu'en partageant un polygone en un nombre fini de morceaux polygonaux, on ne puisse pas réarranger les morceaux de façon à obtenir un polygone strictement inclus dans le polygone de départ et d'aire plus petite. Nous avons d'ailleurs vu que, dans l'espace, il existe des découpages et recollements qui ne préservent pas le volume (paradoxe de Hausdorff, Banach, Tarski). Evidemment les parties du découpage ne sont pas des polyèdres et ne sont mesurables au sens ci-dessus.

Pour un polygone, on peut montrer géométriquement qu'il est équivalent (par découpage et recollement de morceaux disjoints) à un rectangle dont un côté est un segment donné. Le problème revient alors à voir que deux tels rectangles ne peuvent être équivalents si leurs autres côtés sont inégaux. Or on ne sait pas montrer cela sans recourir aux nombres (voir Lebesgue 1975 p. 53-56).

Dans toutes ces présentations l'aire est un nombre ou, dans les écrits plus récents (Revuz 1974) l'application mesure elle-même. Ainsi définie, l'aire dépend du choix de l'unité et, comme le dit Lebesgue (1975 p. 56) "l'emploi du mot mesure dans la dénomination "mesure des aires" a la même signification que pour la "mesure des longueurs" : il rappelle qu'on doit avoir choisi une unité pour parler de l'aire ou de la longueur, lesquelles sont des nombres. Ce sont ces nombres qui, seuls servent en mathématiques ; libre à chacun de surajouter à ces notions mathématiques des notions métaphysiques mais celles-ci ne doivent pas intervenir dans l'enseignement." (Rappelons qu'il s'agit là d'enseignement dans les classes terminales du secondaire).

On peut cependant, d'un point de vue mathématique, donner un autre sens au mot aire, indépendant de l'unité : si on a choisi une surface unité A et défini l'application μ_A correspondante, on peut définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}_A$ par $S\mathcal{R}_A S'$ si et seulement si $\mu_A(S) = \mu_A(S')$. Les classes d'équivalence obtenues ne dépendent pas du choix de A. On peut alors appeler aire α de A la classe d'équivalence de A pour n'importe laquelle des relations $\mathcal{R}_A$ et définir la mesure de l'aire α comme la mesure de n'importe laquelle des surfaces de α. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\mu_A"] \arrow[dr, "\chi"'] & & \mathbf{R}^+ \\ & \mathfrak{A} \arrow[ur, "m_A"'] & \end{tikzcd}$$

pour B dans $\mathcal{S}$

$\chi(B) = \beta$

$m_A(\beta) = \mu_A(B)$

Ainsi la notion "métaphysique" d'aire peut avoir un fondement mathématique, même s'il faut définir au préalable la mesure pour lui donner ce fondement.

On pourrait envisager d'avoir un accès direct aux classes d'équivalence sans passer par l'intermédiaire de la mesure en définissant la relation d'équivalence sur les surfaces elles-mêmes. Cela se fait très bien pour les longueurs, en disant que deux segments sont dans la même classe s'ils sont superposables, c'est-à-dire, s'il existe une isométrie qui envoie l'un sur l'autre (cf "Grandeur Mesure" - Mots VI - brochure APMEP). Mais pour les aires, la situation est plus complexe : les surfaces qui ont même mesure ne sont pas nécessairement superposables. On peut avoir recours au "découpage et recollement" et dire que deux surfaces ont même aire si on a une partition de chacune d'elles en n morceaux deux à deux superposables. Cela suffit dans le cas des polygones : si deux polygones ont même mesure, on peut toujours ramener l'un à l'autre de cette façon, mais comment faire pour un disque et un carré ? La situation est encore plus complexe pour le volume puisque dans ce cas, le "découpage et recollement" n'est même pas toujours possible dans le cas des polyèdres : Dehn, en résolvant en 1900 le troisième problème de Hilbert, a montré que deux polyèdres de même volume peuvent ne pas être transformables l'un en l'autre par équivalence finie.

On pourrait aussi considérer l'aire comme une grandeur produit et la définir à partir de la longueur (cf "Grandeur Mesure" - Mots VI - brochure APMEP), mais ce point de vue ne nous permet de comparer directement que des rectangles et nous renvoie à la mesure.

Du point de vue mathématique, ce qui est intéressant, c'est l'application entre surfaces et nombres (μ_A) : les comparaisons de surfaces se ramènent à des comparaisons de nombres, les juxtapositions de surfaces à des additions de nombres. La considération des classes d'équivalence n'a qu'un intérêt théorique limité et assez peu d'intérêt pratique : il est assez rare que l'équivalence des surfaces soit une donnée, on l'obtient généralement en passant par les nombres. Dans ces conditions, la considération de $\mathcal{C}\!\ell$ et des autres flèches peut apparaître comme un détour inutile. Nous verrons que ce point de vue a été celui de l'enseignement dans les années 65 - 80 : au moment où on a essayé d'adopter une démarche cohérente dans l'enseignement de la mesure, on s'est centré exclusivement sur l'application entre surfaces et nombres, en privilégiant l'utilisation du quadrillage et de ses subdivisions qui permet d'aborder la mesure des surfaces au niveau élémentaire de la façon la plus générale possible.

Remarque 1

Au lieu de l'additivité simple, on peut demander la σ-additivité ; l'ensemble des surfaces mesurables n'est plus le même : on peut avoir des surfaces bornées mesurables de mesure non nulle et d'intérieur vide, de telles surfaces ne sont pas quarrables puisqu'elles ne contiennent aucun carré.

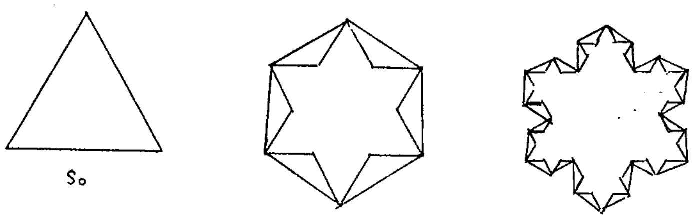
Exemple :

On part du carré de côté 1, on enlève une bande de largeur 1/2 au centre du carré, il reste deux rectangles, on enlève au centre de chacun d'eux une bande de largeur 1/4 de la largeur du rectangle, on a 4 bandes, et on continue ainsi : à chaque étape on double le nombre de bandes et on enlève 1/4 de ce qu'on a enlevé à l'étape précédente en le répartissant au centre de chaque bande. A l'étape n, on a 2^n bandes et on a enlevé $\frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots \frac{1}{4^{n-1}}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times (1 - \frac{1}{4^n})$. A la limite, quand n tend vers l'infini, on a une surface intersection, composée d'une infinité de bandes, qui ne contient aucun carré et de mesure $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Remarquons que dans le cas de la σ-additivité, on ne peut prolonger l'application mesure à l'ensemble de toutes les surfaces du plan, ni même à toutes les parties de **R** puisque, cette fois, on peut montrer à l'aide de l'axiome du choix qu'il existe une partie de **R** non mesurable.

Pour notre propos, il suffit largement de demander l'additivité simple puisque cela nous permet de mesurer toutes les surfaces que l'on risque de rencontrer au collège, et même des surfaces de périmètre infini, comme l'étoile de Von Koch :

S est la limite d'une suite de surfaces polygonales obtenues de la façon suivante : on part d'un triangle équilatéral S_0, on passe de S_n à S_{n+1} en ajoutant un triangle équilatéral construit sur le tiers central de chaque côté. La surface S est comprise entre S_n et un polygone P_n construit de la manière suivante : P_1 est un hexagone dans lequel S_1 est inscrit, P_{n+1} s'obtient à partir de P_n en enlevant un triangle équilatéral construit sur le tiers central de chaque côté :



S_0 S_1 et P_1 S_2 et P_2

Fig. 3

S_n a 3×4^n côtés et P_n en a la moitié, soit $3 \times 2 \times 4^{n-1}$.

Appelons A_n l'aire de S_n et B_n l'aire de P_n. Le triangle qu'on ajoute sur chaque côté de S_{n-1} pour obtenir S_n a pour aire $\frac{A_0}{9^n}$ ainsi que chaque triangle de P_n -S_n.

On a donc $B_n - A_n = 3 \times 2 \times 4^{n-1} \times \frac{A_0}{9^n} = 2\frac{A_0}{3} \times (\frac{4}{9})^{n-1}$.

Ceci nous montre que $B_n - A_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Remarque 2 : la notion de grandeur

Dans la vie courante, le mot longueur a plutôt le sens de grandeur : la longueur ne dépend pas de l'unité choisie pour la mesurer. Même quand on parle de mesure, c'est le plus souvent de la grandeur qu'il s'agit puisque la mesure est alors un nombre suivi d'une unité. Ce n'est que quand le contexte est tout à fait clair que l'on laisse tomber le nom de l'unité, dans un contexte professionnel par exemple l'unité de référence est sous-entendue parce que bien connue ou inutile, les nombres donnant le classement nécessaire et le contexte l'ordre de grandeur : quand on parle d'un clou de 110 ou d'un planche de 23, on sait bien qu'il s'agit de mm, et qu'on mesure la longueur dans un cas, l'épaisseur dans l'autre.

Pour l'aire c'est moins clair, le terme surface, le plus couramment employé désigne soit la surface avec sa forme, soit la grandeur. Il est d'ailleurs rare que ce soit uniquement de l'aire qu'on ait besoin, que la forme n'intervienne pas du tout, qu'il s'agisse de poser de la moquette ou de négocier des terres agricoles où on évalue certes le prix à l'hectare mais où on tient aussi compte de bien d'autres facteurs, y compris la forme : un champ très allongé ou de forme très irrégulière n'aura pas la même valeur qu'un carré de même aire ! La quantité de peinture nécessaire pour peindre une surface se réfère bien à l'aire à condition que l'on admette que l'épaisseur de la couche est constante.

Avant d'entamer l'étude des programmes, il nous faut donc aborder un aspect qui relève plus du domaine de la physique que de celui des mathématiques : la notion de grandeur.

Ce mot est utilisé dans les programmes à certaines époques, soigneusement évité à d'autres. Il met mal à l'aise le mathématicien parce qu'on ne peut le définir convenablement. Dans la brochure "Grandeur, mesure" de l'APMEP les auteurs font un effort de définition. Ils traitent entièrement le cas de la longueur, définissent les opérations et comparaisons sur les longueurs à partir de celles sur les segments sans recourir à la mesure, et appellent grandeurs mesurables celles pour lesquelles on peut procéder de la même façon :

- définir une relation d'équivalence sur les objets
- définir sur le quotient une relation d'ordre total
- définir sur le quotient une opération interne : l'addition
- définir sur le quotient une opération externe : la multiplication par un réel positif.

Ils remarquent eux-mêmes que définir la somme ou même l'égalité de grandeurs ne va pas de soi et pose des problèmes d'ordre technique ou théorique. Nous avons signalé plus haut que dans le cas des surfaces planes, on ne peut en fait définir la grandeur aire que par l'intermédiaire de la mesure sous peine d'en avoir une définition très restrictive. De plus, la définition des opérations sur les grandeurs à partir de manipulations sur les objets est parfois difficile à concevoir. Si dans le cas des longueurs, aires, volumes, masses, l'égalité et les opérations sur les grandeurs peuvent être reliées à des opérations sur les objets, pour d'autres grandeurs moins accessibles à la manipulation comme les durées ou dérivées comme les vitesses, les opérations sur les objets induisant des opérations sur les grandeurs seront parfois difficiles à définir puisque les objets eux-mêmes sont insaisissables. Ce sera aussi le cas pour la plupart des grandeurs étudiées plus tardivement comme force, intensité de courant ... Elles ne sont accessibles le plus souvent qu'à travers leurs effets sur d'autres grandeurs et la mesure, et on est alors tributaire des instruments de mesure eux- mêmes.

Les auteurs de la brochure APMEP définissent aussi le quotient de deux grandeurs et le produit de deux grandeurs, mais on ne sait pas très bien sur quel ensemble sont définies ces opérations ni même dans quel cas elles sont partout définies. Qu'entend-on par grandeurs de même nature ? Par des opérations différentes, à partir de grandeurs différentes, on peut finalement aboutir à des grandeurs qui vérifient la même équation aux dimensions et peuvent être mesurées avec la même unité, par exemple le travail et la quantité de chaleur ou la masse multipliée par le carré d'une vitesse. De plus, le mot grandeur désigne le plus souvent à la fois une classe d'équivalence et l'ensemble des classes d'équivalence.

Pour notre propos, nous utilisons ce terme de "grandeur" dans un sens très naïf que nous ne chercherons pas à définir. Il nous suffit de savoir que l'aire peut être définie comme une classe d'équivalence à partir d'une fonction mesure. Nous ne définissons pas l'aire mais seulement l'expression "avoir même aire" à partir du découpage et recollement ou de la mesure. C'est cet aspect que nous appelons l'aire en tant que grandeur. Un nombre suivi d'une unité est un moyen de désigner une aire.

2. Etude des programmes de l'école élémentaire et du collège

Remarque préliminaire

L'enseignement des mesures au niveau élémentaire est souvent très lié à celui des nombres, en particulier des décimaux. Nous relèverons donc dans les textes des indications sur l'enseignement des décimaux, d'autant plus que c'est surtout cette notion qui est concernée dans la deuxième partie de cette thèse.

2.1. Ecole élémentaire

La caractéristique de l'enseignement de la mesure dans **les programmes de 1887 et de 1923** est son caractère pratique. En particulier, on fait une place à l'estimation de mesures sans avoir recours à la mesure. On insiste sur l'usage social de la mesure, sur l'utilisation du système métrique et sur la pratique de mesures par les élèves. En 1887, on commençait l'apprentissage du système métrique en classe enfantine ; à partir de 1923, on attend le cours élémentaire.

Le calcul de surfaces (ici, nous employons le terme surface avec le sens qu'il a dans les programmes de l'époque : il peut désigner aussi bien la surface géométrique que l'aire ou le nombre qui les mesure) n'apparait explicitement qu'en 1923, mais là encore on insiste sur le caractère pratique et social de cet enseignement. Dans les commentaires de 1923, on précise que par géométrie *"il faut entendre la forme des champs, les mesures sur le terrain. Il s'agit d'opérations réellement exécutées avec un ruban gradué, avec une règle graduée, accessibles en pratique à de jeunes enfants.... On opérera dans la cour, dans la salle de classe, parfois sur le pupitre."*

L'enseignement des mesures est fortement rattaché à celui de la numération décimale. Mais on trouve une inversion dans l'ordre des chapitres entre 1887 et 1923, qui est présentée dans les commentaires de 1923 comme anodine, ne changeant pas le fond, mais permettant une clarification et une simplification pour les élèves : au C.E. l'enseignement du système décimal de mesure vient tout de suite après celui du système de numération à base 10 et le renforce ; on repousse l'étude des sous-multiples des unités (mètre, gramme, litre) au C.M. où, au contraire, l'étude du système légal d'unités précède et *"sert de base presque unique"* à l'étude des nombres. Le caractère continu dans un cas, discontinu dans l'autre n'est pas évoqué, même quand on passe aux sous-multiples. Il n'y a pas de changement de nature, il semble que les grandeurs soient toujours traitées comme des quantités discrètes : on dénombre des unités.

En 1923, on distingue les systèmes de mesures légales à base dix, cent, mille. On commence par les grandeurs que l'on mesure avec des unités effectives dans un système à base 10 : longueurs ou masses ; *"les surfaces, on ne les mesure pas effectivement, on les calcule, en appliquant des formules. On les exprime en se plaçant dans un système de numération à base cent. Les volumes ensuite, on ne les mesure pas non plus ; on les calcule, on les exprime en se plaçant dans un système de numération à base mille."* Ainsi les mesures sont vraiment liées à la pratique —ce que, dans les programmes récents, on appelle mesurage— puisqu'on refuse le terme de "mesure" dans le cas des aires ou des volumes en lui préférant celui de "calcul".

Notons au passage la référence au système de numération à base 100 ou 1000 qui montre bien que d'une part, dans ces programmes, le point de vue sur les aires et les volumes, comme sur les autres grandeurs, se réfère à une approche discrète : on dénombre des unités, d'autre part on n'envisage pas d'autre unité que des carrés pour les aires et des cubes pour les volumes.

Dans le même ordre d'idées, on étudiera les nombres décimaux puis les fractions décimales avant d'étudier les fractions ordinaires, alors qu'on adoptait l'ordre inverse dans les programmes de 1887. On pense ainsi aplanir les difficultés ; les commentaires de 1923 précisent même *"rien, logiquement, ne distingue les nombres décimaux des nombres entiers".* Les opérations sur les fractions décimales peuvent être faites facilement en se ramenant aux entiers, on les étend aux fractions ordinaires et on prévoit que "les élèves seront moins surpris, mieux préparés". Les auteurs de ces programmes semblent supposer que les élèves comprendront les fractions décimales en restant dans la logique des entiers, et que cette compréhension s'étendra naturellement aux fractions ordinaires.

Dans **les programmes du 17-10-1945 et les instructions du 7-12-1945**, on voit d'une part se renforcer le souci utilitaire, ce qui mène à privilégier plus encore les décimaux et à réduire considérablement la place des fractions ordinaires : *"Calculer vite et bien reste son objectif principal. Ce but utilitaire explique la place de choix donnée à l'étude des nombres entiers et des nombres décimaux – qui suffisent aux problèmes de la pratique courante – et la place réduite laissée aux fractions ordinaires. L'apprentissage du calcul numérique prend appui sur les faits de la vie réelle."* Au cours élémentaire on se limite aux unités du système métrique qui sont pratiquement utilisées. Dans les instructions pour le cours moyen on lit : *"Les mots de "vie courante" employés dans le programme marquent la volonté d'une relation étroite entre les mathématiques de l'école et les nécessités de la vie. Des problèmes de la vie courante sont des problèmes vraisemblables, dont l'élève a vu ou verra des exemples autour de lui. Avant de faire traiter un exercice dans la classe ou de le donner en devoir écrit, le maître se demandera si cet exercice peut se présenter raisonnablement dans la pratique."* Par exemple pour poser un problème de mesure, on se préoccupe de l'instrument qui serait utilisé pour la mesure dans la pratique.

Dès l'introduction on affirme la volonté de *"rendre à l'enseignement primaire son efficacité ancienne en ce qui concerne l'acquisition de mécanismes fondamentaux "* et de *"le fonder davantage sur les faits, l'observation personnelle, afin de donner à la jeunesse française "le grand bain de réalisme" dont elle a besoin."* On se méfie des spéculations théoriques sur les nombres : au cours élémentaire on doit toujours utiliser des "nombres concrets" ; les "nombres abstraits" seront réservés au cours moyen, uniquement dans le cas des pourcentages et des fractions.

Cependant, cette distinction entre nombres concrets et abstraits peut apparaître comme un souci théorique de distinction entre nombres et grandeurs. Les nombres concrets sont des nombres suivis d'un nom d'objet ou d'une unité et correspondent à des mesures et les nombres abstraits, indépendants de toute unité, sont des rapports de mesures (pourcentages ou fractions). On pourrait dire actuellement que les nombres concrets sont des grandeurs et les nombres abstraits des nombres. Cependant le concept de grandeur n'est pas vraiment dégagé des objets eux-mêmes. Ainsi, à propos de l'addition au cours élémentaire, on peut lire dans les instructions officielles le paragraphe suivant :

"Il paraît évident qu'on doit additionner des grandeurs de même espèce. Le nombre qui mesure la somme est la somme des nombres qui mesurent les grandeurs additionnées.

Cependant cette opération soulève des objections assez graves. Que veut dire "de même espèce"? Des pommes et des poires ne sont pas de même espèce et pourtant 8 pommes et 7 poires font 15 fruits. Huit litres et six litres sont de même espèce et cependant on n'additionne pas 6 litres de vin et un vase de 8 litres.

En réalité on n'additionne pas des grandeurs, fussent-elles de même espèce : on mélange les pommes et les poires, 8 litres de vin et 6 litres de vin, on récapitule ou on ajoute des dépenses ou des recettes, on place bout à bout des longueurs, on parcourt successivement des chemins, on compte des temps qui se suivent, on allonge, on accroit, on réunit , on assemble...

A toutes ces combinaisons de grandeurs correspond l'addition de leurs mesures."

On voit qu'ici on confond les opérations sur les objets et celles sur les grandeurs : on mélange bien les vins mais on ajoute les capacités, dans le cas des pommes et des poires, c'est un peu moins clair mais on pourrait définir une grandeur discrète "objets" comme on peut définir une grandeur "population" (voir A.P.M.E.P. 1982 p. 78-83). Cette ambiguïté apparaît également dans la manière d'écrire les opérations : on veut rappeler la signification concrète de chaque nombre en mettant l'unité correcte et en respectant l'équation aux dimensions ce qui fait qu'on travaille bien au niveau des grandeurs, mais on ne reconnaît les opérations que sur les nombres. On écrit par exemple

(F par kg) (kg) 75 x 5 = 375 francs ou (F par heure) (heure) 25 x 42 = 1050 francs

mais en précisant : *"le signe x n'indique que l'opération à faire sur les nombres et non sur les grandeurs"*

La notion de grandeur n'apparaissait pas dans les programmes précédents, on se contentait d'enseigner le système légal d'unités et de pratiquer des mesures ; la notion de grandeur était supposée transparente : on faisait comme s'il n'y avait pas de problème sur ce qu'on avait à mesurer.

Les programmes de 1970 vont complètement évacuer le problème des grandeurs : on fixera l'unité et on n'aura plus affaire qu'à des nombres.

Ce souci de clarification qui apparaît en 1945 amène parfois à des précisions qui seront désavouées dans l'avenir : à propos de l'usage des signes, on commence par dire *"Les signes de l'arithmétique ont, tout au moins pour les nombres abstraits, une signification universelle qui s'étend, par généralisation, à l'algèbre. Il est essentiel de ne les employer qu'à bon escient."*. Un peu plus loin, un paragraphe concerne l'égalité : *"le signe = ne sépare pas deux nombres égaux, ce qui ne servirait à rien : on n'écrit pas 3 = 3. Il sépare l'indication d'une opération et son résultat ou encore l'indication de deux opérations qui ont le même résultat"*. Les programmes de 1970 diront exactement le contraire.

Pour ce qui est de la mesure des aires, les programmes de 1945 font apparaître au cours élémentaire, le calcul en cm^2 ou en m^2 de la surface d'un rectangle dont les dimensions sont exprimées en cm ou en m (auparavant la surface n'était mentionnée qu'au cours moyen). Ce calcul est relié au quadrillage et les relations entre cm^2 et m^2 le sont à l'examen d'un damier de 100 cases. Au cours moyen, on s'intéresse à d'autres surfaces, mais on précise : *"Il n'est pas indispensable de traiter le cas du triangle (et du trapèze) non rectangle, ce qui suppose le choix d'une base et d'une hauteur, alors qu'il est presque aussi rapide de le décomposer effectivement en deux triangles rectangles".*

Les programmes du 2 janvier 1970 sont en rupture sur de nombreux points avec les programmes précédents. Si l'on continue à affirmer que l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire doit rester concret, qu'on doit faire manipuler les élèves, il n'est plus question de se limiter à ce qui est utile dans la vie pratique. La circulaire du 2/01/1970 annonce le changement dès la première phrase : *"L'enseignement mathématique à l'école élémentaire veut répondre désormais aux impératifs qui découlent d'une scolarité obligatoire prolongée et de l'évolution contemporaine de la pensée mathématique."*, et précise *"L'ambition d'un tel enseignement n'est donc plus essentiellement de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquérir les techniques de résolution de problèmes catalogués et suggérés par "la vie courante", mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à ces techniques".*

A propos de la mesure cela se traduit par la distinction de l'usage du mot "mesure" dans le langage courant et de sa signification mathématique qui devra être introduite. *"En mathématique, une mesure d'un objet est un nombre".* On insiste, comme en 1945, sur le fait que les opérations portent sur les nombres et non sur les objets, on rejette des expressions comme "8 pommes + 7 pommes = 15 pommes" qui mélangent langage courant et langage mathématique. De même, puisque la mesure est un nombre, on s'interdit d'écrire le nom de l'unité à côté du nombre, on le mentionne avant : *"Dans l'expression "la table mesure trois mètres", le mètre est pris pour unité ; dans ces conditions, la longueur de la table est le nombre 3".* On recommande une présentation du type suivant :

l'unité étant le centimètre

	a pour longueur
ma règle	32
mon cartable............	40
ma gomme...............	3

ou encore :

distance sur la carte, unité : cm......	5	18	
distance sur le terrain, unité : km....	10	32	

On remarque au passage que la longueur est identifiée avec sa mesure, c'est un nombre ; l'aspect grandeur n'apparaît pas du tout. On peut d'ailleurs remarquer qu'il y a une certaine contradiction à ce propos dans les recommandations données. Quand on dit *"On écrira : le centimètre étant l'unité, la longueur de la barre est 17 ou la longueur de la barre en centimètres est 17, ou encore en langage courant, la longueur de la barre est 17 centimètres",* on utilise le mot longueur dans des sens différents : dans les deux premiers cas la longueur est un nombre qui change avec l'unité (on écrira le décimètre étant l'unité, la longueur de la barre est 1,7 et $1,7 \neq 17$) alors que dans l'usage courant la longueur de la barre n'a pas l'habitude de dépendre de l'unité choisie pour la mesurer. La deuxième formulation peut être considérée comme intermédiaire car on peut considérer que 17 est non pas la longueur mais la "longueur en centimètres" et admettre que la "longueur de la barre en décimètres" est différente de la "longueur de la barre en centimètres". Dans cette interprétation, "longueur en centimètres" est un nombre mais "longueur" pourrait être une grandeur.

Par ailleurs, on voit pour la première fois apparaître des mesures avec des unités non légales : *"l'unité étant le crayon, la longueur de la règle est 2".* C'est la notion de mesure (au sens mathématique du terme) qu'il s'agit de construire avant l'utilisation des instruments de mesure usuels.

En ce qui concerne la mesure des surfaces, on voit pour la première fois apparaître le mot "aire" dans les programmes. L'aire est la mesure de la surface, c'est un nombre : on dit *"l'unité d'aire étant le carreau, l'aire de S est 31".* Ce nombre dépend de l'unité choisie : après changement d'unité, à propos d'une surface qui avait une aire 28, on lit dans les commentaires du programme : *"la nouvelle aire de A est le nombre (28x4)".*

On ne trouve comme moyen de mesurer les aires que le comptage de carreaux, et tous les exemples proposés ne font intervenir que des carreaux entiers. Aucun statut n'est donné à "carreau" tout porte à croire qu'il s'agit d'une surface, mais rien ne permet de penser qu'une surface de forme différente pourrait avoir une aire 1.

L'étude du système métrique est mentionnée dans un très petit paragraphe, tout à la fin du chapitre sur les mesures.

Dans **les programmes et commentaires de 1978** (cycle élémentaire) **et surtout de 1980** (cycle moyen), la séparation entre mesure mathématique et pratique se précise : dans les commentaires, on introduit le mot "mesurage" pour cette dernière. Au cours élémentaire, on s'intéresse surtout au mesurage, mais le but n'est pas seulement pratique : on pose le problème de la construction de l'instrument de mesure au moins dans le cas de la longueur. Au cours moyen, il apparaît trois objectifs à l'enseignement de la mesure, un objectif théorique de construction de la notion de mesure, un objectif pratique de mesurage, un objectif social de connaissance des unités légales ; le programme précise :

- construire et utiliser des systèmes de mesure pour les grandeurs étudiées
- exprimer par un nombre ou par un encadrement le résultat d'un mesurage
- utiliser les unités usuelles du système légal.

Pour la première fois, on utilise le terme de grandeur avec le sens qu'il a en physique et on introduit une distinction entre grandeurs mesurables et grandeurs repérables. A l'objectif d'utilisation des instruments de mesure, on avait ajouté en 1970 celui de construction de la notion de mesure, on ajoute maintenant celui de construction de la notion de grandeur pour chacune des grandeurs envisagées au programme. Auparavant la grandeur à mesurer était supposée préexister, en tous cas on n'envisageait pas explicitement de la construire. Pour cette construction, on suggère trois types d'activités :

- des comparaisons et des classements avant tout recours à un instrument de mesure, ces comparaisons peuvent être directes ou indirectes. Cette activité n'était qu'à peine évoquée en 1970
- la désignation des différentes mesures et la définition d'un étalon, arbitraire d'abord, conventionnel ensuite (déjà présente en 1970)
- l'addition des grandeurs (l'addition n'était auparavant envisagée que sur les mesures).

La distinction est très nette entre objet et mesure, et on voit apparaître un troisième terme différent des deux, correspondant à la grandeur, qui n'est pas défini et qui se réfère à l'idée d'un invariant ou d'une propriété commune qu'il s'agit de mettre en évidence. On définit la notion de grandeur mesurable comme grandeur pour laquelle *"on sait définir sur les objets une opération induisant une addition sur les nombres qui expriment leur mesure".*

En ce qui concerne plus précisément les aires, on voit apparaître pour la première fois le souci de construire le concept d'aire en référence au fait que *"le découpage et le recollage d'une surface en une surface d'une autre forme laissent une grandeur invariante".* On utilise différents moyens de comparaisons : comparaisons directes (rarement possibles), découpage et recollage, pavage ; on précise qu'on ne se limitera pas à l'utilisation du quadrillage à maille carrée.

Les capacités, qui avaient disparu des programmes de 1970, réapparaissent parce qu'elles permettent de faire des mesures directes avec des unités arbitraires (cuillère, verre, ...).

Ainsi, si le côté pratique de la mesure, au confluent des activités d'éveil et des mathématiques, est affirmé dès les premières lignes du chapitre des commentaires qui concerne la mesure, les objectifs théoriques sont-ils importants.

L'objectif est plus de construire un concept que de pratiquer des mesures, ce qui apparaît encore dans cette phrase : *"Plus que la connaissance d'un certain nombre de formules permettant de déterminer l'aire ou le volume d'objets particuliers, le maître cherchera à développer chez les élèves la capacité de relier entre elles ces formules ou d'en extraire des informations qui ne soient pas directement perceptibles sur les objets eux-mêmes".*

Les derniers **programmes de 1985**, qui sont dépourvus de commentaires, vont dans le même sens : au cours moyen, on trouve

"Formation des concepts de longueur, d'aire, de volume, de masse, d'angle et de durée ; utilisation des systèmes de mesure : expression, par un nombre ou par un encadrement, du résultat d'un mesurage."

à côté de :

"Utilisation des unités du système légal et usuel.
Calcul sur des nombres exprimant des mesures de longueur et de poids.
Utilisation des instruments de mesure : double-décimètre, balance, montre etc...
Détermination du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'un rectangle, de l'aire d'un triangle, du volume d'un pavé
Utilisation d'un formulaire pour calculer l'aire ou le volume d'un objet donné."

2.2. Collège

En ce qui concerne l'enseignement secondaire, les mesures et en particulier les aires figurent suivant les époques au programme de différentes classes de la 6ème à la 3ème.

Dans les **programmes de 1925 et 1926** (l'horaire de mathématiques est alors de 2 h), la mesure apparaît en 5ème sous la forme de l'étude du système métrique (longueurs, aires, volumes, poids, densités, monnaies, temps, vitesses) en précisant qu'on se bornera à des applications aux aires et aux volumes les plus simples. Les commentaires précisent : "*Les mesures directes qui font appel au maniement des unités de grandeur correspondantes, ne présentent pas de difficulté de principe. Il n'en est pas de même des mesures indirectes, celles qui concernent les surfaces et les volumes, par exemple. On peut cependant, en admettant le minimum de propriétés géométriques, montrer comment le déplacement d'un rectangle donné permet de recouvrir de proche en proche, tout rectangle dont les dimensions sont des multiples des dimensions du premier. La mesure de l'aire de tout rectangle dont les dimensions sont commensurables avec le carré unité en résulte de suite. Une observation analogue peut être faite à propos du volume du parallélépipède rectangle. Des tentatives de démonstration paraissent inutiles pour des surfaces et des volumes plus compliqués ; elles font appel le plus souvent à des propriétés géométriques ou à des considérations de limites hors de portée pour les élèves. Il y a là un exemple d'anticipations qu'il vaut mieux restreindre : il semble préférable de se borner à l'indication des formules les plus simples, en vue des applications numériques. On ne saurait trop entraîner les élèves aux changements d'unité qui offrent un intérêt pratique.*"

Pour les justifications, il faudra attendre les classes de 3ème et de 2nde où les aires réapparaissent :

3ème : Mesure des aires du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, des polygones, du cercle. Rapport des aires de deux triangles semblables.

2nde : Mesure des aires du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, d'un polygone quelconque. Rapport des aires de deux polygones semblables. Aire d'un polygone régulier convexe. Aire d'un cercle, d'un secteur, d'un segment de cercle. Rapport des aires de deux cercles.

On continue en 1ère avec les aires latérales de solides.

Dans **les programmes de 1937-1938** (arrêté du 30-8-1937 pour les programmes et du 30-9-1938 pour les commentaires), l'horaire de mathématiques est de 2 heures en 6ème et 5ème et de 3 heures en 4ème et 3ème. L'étude des mesures commence maintenant en 6ème et se poursuit en 5ème.

6ème : Mesure des aires : aire du rectangle, du carré, du triangle rectangle, du trapèze rectangle ; recherche de l'aire d'un polygone quelconque par décomposition en trapèzes rectangles et en triangles rectangles, formule de l'aire du cercle.

5ème : système métrique : longueurs, aires, volumes, poids, densités, monnaies, temps, vitesses. Exercices simples de changements d'unités.

Les aires planes sont reprises en 2nde, les aires latérales de solides en 1ère.

Le paragraphe concernant les aires en 6ème sera repris tel quel dans tous les programmes de 6ème jusqu'en 1970 (sauf pendant la guerre). Le paragraphe qui concerne la classe de 5ème est la reprise du paragraphe des programmes de 1923.

Les commentaires montrent que l'enseignement des mesures reste très pratique. Nous reproduisons ci-dessous[3] le paragraphe "Aires et surfaces"

- *Multiples et sous-multiples décimaux usuels du* mètre carré *et de* l'are. *Changement d'unités.*
- *Pavage d'un* rectangle *avec des carrés de 1mm, ou de 1 cm ou de 1 m de côté. Calcul de l'aire à l'aide des mesures décimales des côtés.*
- Aire d'un carré et carré d'un nombre. *Usage d'une table des carrés des nombres entiers de 10 à 100 pour la recherche d'une* racine carrée *(avec deux chiffres exacts).*
- *Calcul de l'aire d'un* triangle rectangle *et d'un* trapèze rectangle. *Calcul de l'aire d'un* polygone *(sur le dessin ou sur le terrain) décomposé en trapèzes rectangles. Application à un* triangle *et à un* trapèze non rectangle. *Aire d'un* cercle.

Par ailleurs l'étude des nombres se fonde sur celle des mesures : "*l'étude du calcul doit se faire* en liaison *avec celle de la mesure des grandeurs – longueurs, aires, volumes, poids (ou masses), monnaies – toutes évaluées dans le système décimal.* "

[3] en inversant les italiques et les caractères droits dans les citations.

Remarquons au passage que les instructions de 1938 marquent un changement dans l'esprit de l'enseignement. On trouve d'ailleurs dans ces instructions des passages qui pourraient tout à fait figurer dans les commentaires des actuels "nouveaux programmes de collège"– évidemment, il s'agit de l'enseignement secondaire de l'époque qui n'est pas accessible à tous. Nous reproduisons ci-dessous les titres des paragraphes avec quelques citations.

Objet : former l'esprit des enfants et leur donner une culture générale... formation plus qu'acquisition de technique

Esprit : primauté de l'intelligence... pas de méthode d'autorité... esprit libéral... une "idée" qui n'est pas le résumé et la synthèse d'un grand nombre d'observations et d'expériences personnelles n'est qu'une formule vide de sens et ne peut pousser dans l'esprit des racines profondes et vivaces.

Méthodes :

- méthode active

- poser des problèmes

- partir de l'expérience accessible à l'enfant (ni cours, ni leçon ex cathedra)

- élargir l'expérience : ...c'est en faisant entrer les acquisitions nouvelles dans des systèmes de connaissances, d'idées, de souvenirs, qu'il les installe fermement dans l'esprit et qu'il prépare l'esprit à accueillir, à assimiler, à intégrer dans la somme de ses expériences passées les apports incessants de son expérience à venir

- cultiver la mémoire

- mettre en œuvre le savoir acquis

- nécessité du travail.

L'application de ces programmes sera suspendue pendant la guerre. Les **programmes de 1942** ne prévoient dans les sections classiques qu'une heure de mathématiques en 6ème, 1 heure et demie en 5ème, 2 heures en 4ème et 3ème (deux heures dans toutes les classes pour les sections modernes). Les aires ne sont étudiées qu'en 3ème où l'on reprend pratiquement l'ancien programme de 5ème :

Aire du rectangle, du triangle rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, d'un polygone régulier , aire du secteur circulaire.

Dans les **programmes parus entre 1945 et 1947**, les horaires de mathématiques reprennent un volume un peu plus raisonnable (2 heures en 6ème, 2 heures et demie de la 5ème à la 3ème) et on reprend en 6ème le programme de 1937 : le paragraphe concernant les aires est inchangé.

Les **programmes de 1956** n'apportent aucun changement au programme de 6ème. En 1959, les horaires de mathématiques passent officiellement à 3 heures dans toutes les classes de la 6ème à la 3ème. Les instructions de 1957 laissent entendre une révision prochaine des programmes basée sur la constatation (déjà!) que l'école n'a plus le privilège de *tout* révéler à l'enfant et à l'adolescent.

Par ailleurs, il faut croire que les instructions de 1938 ont du mal à être appliquées puisqu'on introduit des "travaux pratiques" pour *"ne pas se borner à une présentation (même active, même vivante) des notions énumérées dans les divers paragraphes : chaque acquisition nouvelle, qu'il s'agisse d'une définition ou d'une propriété, doit être précédée, ou accompagnée, d'une prise de contact avec un fait ou un événement réel ou réalisable ou observable. Ces travaux pratiques ne peuvent être dissociés de l'enseignement, "ils lui sont intimement liés, ils en sont partie intégrante."*

De 1945 à 1969, l'enseignement sur les mesures constituait l'essentiel du programme de 6ème. Il n'y avait pas à l'époque de physique dans les programmes de cette classe et l'enseignement sur les mesures relevait en fait des deux disciplines. Il s'intéressait aussi bien à la pratique de la mesure qu'aux calculs. Il incluait l'étude des mouvements uniformes et des éléments d'astronomie aussi bien que le repérage sur la terre et les fuseaux horaires qui sont plutôt rattachés maintenant à la géographie.

Dans **les programmes de 6ème et 5ème du 29 juillet 1968 et les instructions du 28 février 1969**, les mesures figurent encore uniquement au programme de 6ème, mais on peut considérer qu'elles n'y prennent plus qu'une place réduite. Cette impression est encore renforcée par les commentaires qui font évidemment beaucoup plus de place aux parties nouvelles du programme.

Les aires figurent dans le paragraphe "l'étude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à des mesures". La mesure est vue comme une application additive qui associe un nombre à chacun des objets à mesurer. On fait le lien entre la théorie et l'expérience en insistant sur le fait que l'expérience ne fournit jamais qu'un encadrement. Contrairement à l'option prise en primaire à la même époque (programmes de 1970), *"les mots de longueur, d'aire, de volume désignent des grandeurs, et les mesures sont les nombres attachés à ces grandeurs une fois l'unité choisie".* On peut faire un abus de langage et convenir que ces mots désignent aussi les mesures, ce qui revient à confondre la grandeur et sa mesure tant qu'on ne change pas l'unité. On distingue ainsi trois choses : l'objet, la grandeur et le nombre ; cette distinction amène à introduire le secteur angulaire pour désigner la portion de plan et la distinguer de la grandeur angle.

Rien n'est dit concernant l'introduction des aires si ce n'est que les élèves doivent être exercés à l'emploi des formules.

Dans les **programmes et instructions des 17 mars et 29 avril 1977,** les mesures sont réparties sur 6ème et 5ème : longueurs, aires, angles en 6ème, volumes, masses, masses volumiques et durées en 5ème. En 6ème les programmes mentionnent "unités usuelles de longueur, d'aire, d'angle" et "aires du rectangle, du triangle, du trapèze, du disque, du secteur circulaire". Dans les commentaires, on ne précise plus s'il s'agit d'une grandeur ou d'un nombre, on dit seulement qu'à la fin de la première année des collèges, l'élève moyen devra posséder la *"pratique des formules donnant les aires usuelles"* et à la fin de la seconde année la *"pratique des formules donnant les aires et les volumes usuels".*

Les **programmes du 14 novembre 1985**, applicables en 6ème depuis septembre 1986 étalent l'apprentissage des mesures sur tout le premier cycle : les grandeurs considérées se réduisent à longueurs, aires, volumes et angles, les grandeurs qui ont traditionnellement un statut mathématique. Les masses figurent au programme de physique de 6ème, les masses volumiques ne sont explicitement nulle part, pas plus que les durées sauf implicitement quand on parle de vitesse (5ème, 4ème). L'étude des mesures n'est jamais l'objet d'un paragraphe du programme mais on les rencontre à propos de l'étude des transformations ponctuelles ou de l'organisation et de la gestion de données, comme l'occasion d'étudier des fonctions. On trouve

- en 6ème comparaison d'aires planes, conservation des distances, des angles et des aires dans la symétrie orthogonale, calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, du volume d'un parallélépipède rectangle, de la longueur d'un cercle.
- en 5ème, conservation des distances, des angles et des aires dans la symétrie centrale, somme des angles du triangle, aire du triangle, calcul de vitesses moyennes, calcul de l'aire d'un parallélogramme, d'un triangle, du volume d'un prisme droit, de l'aire d'un disque, de l'aire et du volume d'un cylindre de révolution.
- en 4ème, aire et volume de la sphère, mise en œuvre de la proportionnalité sur des grandeurs (vitesse en km/h, débit).
- en 3ème, volume de la pyramide et du cône de révolution, effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur longueurs, aires et volumes, masses, mise en œuvre de la proportionnalité sur des grandeurs-quotients ou des grandeurs-produit.

Sous la dernière rubrique on peut en particulier entendre l'effet des agrandissements sur les aires et les volumes.

En 6ème, les commentaires précisent : *"Il s'agit de déterminer des aires à l'aide soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrements. Des activités permettront de retenir sous forme d'images mentales le passage du rectangle au triangle rectangle ou au parallélogramme, et de mettre en place des calculs sur les aires à partir de l'aire du rectangle".*

Dans les commentaires de cinquième, les aires apparaissent comme exemples et contrexemples pour l'étude de la proportionnalité. On demande les formules concernant l'aire du triangle et du parallélogramme et l'aire latérale du cylindre de révolution.

3. Etude des manuels

Nous avons vu que c'est à partir de 1969 que s'opère un changement de point de vue radical et qu'à côté d'un objectif purement pratique, on va donner à l'enseignement des mesures un objectif théorique. Nous avons regardé des manuels de l'école élémentaire et de la classe de 6ème (puisque c'est la seule classe de l'enseignement secondaire où sont enseignées les aires de 1945 à 1985), en commençant un peu avant ce changement de point de vue pour voir l'évolution : nous avons choisi des manuels parus après 1950. L'analyse portera seulement sur la classe de 6ème où on peut penser que les définitions et les choix des auteurs seront plus nettement exprimés qu'à l'école élémentaire.

Pour l'école élémentaire, nous nous contenterons de relever le problème suivant soulevé par les programmes de 1970 qui, nous l'avons vu, définissent l'aire comme un nombre. C'est le point de vue qu'adoptent presque tous les manuels de cette époque consultés (seul le Eiller considère l'aire comme une grandeur et parle de mesure de l'aire). Cela pose un problème quand on a affaire à plusieurs unités, en particulier quand on considère des affinements successifs d'un quadrillage pour approcher l'aire d'une surface à bords arrondis.

On nomme une aire S et on écrit successivement

$16 < S < 32 \qquad 88 < S < 120$ ...

Il y a deux manières de s'en tirer en étant cohérent :

- soit admettre que l'aire d'une même surface change quand on change d'unité. C'est le choix par exemple des livres édités chez Bordas ou Delagrave.
- soit se ramener toujours à la même unité comme celui de chez Magnard.

Remarquons cependant qu'à la même époque, on répugne à considérer la longueur comme un nombre. Les manuels qui le font sont très minoritaires, on a du mal à admettre que la longueur d'un segment puisse dépendre de l'unité utilisée pour la mesurer. D'ailleurs le Magnard (1972) explicite les correspondances suivantes :

surface ...... segment, étendue ...... longueur, aire ...... mesure de longueur

Dans la suite, nous étudions les manuels écrits pour la classe de 6ème. On trouvera à la fin de ce chapitre la liste des manuels consultés et les tableaux récapitulatifs concernant leur analyse.

3.1. Manuels de 1951 à 1967

L'analyse des manuels de cette époque est résumée dans le tableau 1 en annexe.

Les termes "aire" et "surface" sont presque toujours employés tous les deux dans les manuels de cette époque, mais pas toujours avec le même sens. Ils sont parfois synonymes, mais le plus souvent ils ont des sens différents, même si on les identifie après coup. Le mot "aire" est presque toujours défini mais, souvent, le terme "surface" ne l'est pas, surtout avant 1963 : on ne sait pas s'il s'agit de la portion de plan, de l'objet géométrique à déplacement près, ou de la grandeur. Certains manuels cependant précisent :

- pour Cagnac et Thiberge la surface est la grandeur et l'aire le nombre qui la mesure, mais ils annoncent tout de suite que par abus de langage on dira surface pour les deux. La portion de plan est désignée par le terme "figure".
- pour le Marvillet surface et aire désignent tous les deux la grandeur.
- pour Lespinard et Pernet, la surface est une portion de plan mais au sens de grandeur mesurable et non d'ensemble de points tandis que l'aire est un nombre.

Dans les manuels les plus récents de cette période le terme "surface" est évité ou on le définit comme une portion de plan en lui donnant plutôt le sens d'objet géométrique : deux surfaces superposables sont déclarées égales (c'est le cas du Cluzel Nicolas, du Huisman Itard et du Théron Cossart). Dans les deux premiers, l'aire est définie comme un nombre, dans le Théron Cossart, l'aire n'est pas vraiment définie mais ce terme désigne plutôt la grandeur.

- dans le Queysanne Revuz, on n'emploie pas le terme "surface" ; "aire" a clairement le sens de grandeur : deux portions de plan non superposables peuvent avoir la même aire, et l'aire est distinguée de sa mesure qui est un nombre.
- le Riche adopte un peu le même point de vue : il évite le terme "surface" en parlant de polygone, de trapèze... ou de disque. L'aire "est une qualité qui ne dépend pas de la forme (du polygone) et qui exprime seulement sa plus ou moins grande étendue".
- le Monge et Guinchan n'utilise pas non plus le terme "surface" mais pour lui, l'aire est un nombre.
- dans les autres manuels consultés, le terme "surface" est employé mais non défini. D'ailleurs, comme le dit le Duma Mallet "La notion de surface est connue de tous". Il désigne en fait l'invariant qu'on veut mesurer ou "la qualité" de la figure.
- Sauf dans le Queysanne Revuz, le Riche, le Théron Cossart et le Marvillet, l'aire est le nombre qui mesure la surface, mais si on y regarde de plus près, il ne s'agit pas vraiment d'un nombre mais plutôt d'un "nombre

concret" comme le disent les programmes de l'élémentaire de la même époque, c'est-à-dire un nombre suivi d'un nom d'unité. C'est 9 cm^2 par exemple et 1 m^2 = 100 dm^2 = 10000 cm^2. D'ailleurs on a souvent un paragraphe consacré à l'écriture et à la lecture des nombres qui expriment des aires et ces nombres s'écrivent 7 dam^2 8 m^2 6 dm^2 ou 708,06 m^2 et se lisent par exemple 708 mètres carrés, 6 décimètres carrés (Monge et Guinchan). Seul le Lespinard et Pernet considère vraiment l'aire comme un nombre (sans les unités).

Ainsi, dans presque tous les manuels, l'aire représente un invariant de la partie du plan qu'on veut mesurer, qu'on la définisse comme grandeur ou comme nombre suivi d'une unité. Malgré les définitions contraires données, elle désigne en fait plutôt une grandeur qu'un nombre : si on change d'unité, l'aire ne change pas puisque 12 m^2 = 1200 dm^2. Si on compare à ce qui se passe pour les longueurs et les volumes, on voit quelques différences : trois manuels seulement (datant de 1962 et 1965) définissent la longueur comme un nombre, les autres ne la définissent pas ou la considèrent comme une grandeur ; le volume est presque toujours considéré comme une grandeur (Théron Cossart précise qu'on l'emploie à la fois pour désigner la portion d'espace et la grandeur). La volonté de définir l'aire comme nombre est peut-être liée au fait que, comme le précisent beaucoup de manuels, il n'y a pas de mesure effective des aires : on les détermine par le calcul.

Cependant la grandeur (ou l'invariant) qu'il s'agit de mesurer est rarement explicité au départ : il n'y a que 7 manuels sur 16 où on présente dès le début des surfaces de formes différentes et de même aire (Cagnac Thiberge, Cluzel Nicolas, Brédif, Huisman Itard,Théron Cossart, Queysanne Revuz et Riche) et encore, s'agit-il le plus souvent d'assemblages de carrés. Le Théron Cossart propose dans le cours des assemblages de carrés et de triangles, le Queysanne Revuz propose à l'intérieur du cours des exercices avec des triangles, pose la question pour des formes plus compliquées et explicite l'invariance par découpage et recollement sans chevauchement à l'aide de l'additivité, et les exercices du Riche abondent en exemples de surfaces de formes différentes et de même aire. Cette question est cependant abordée dans le Marvillet et le Duma Mallet au moment de l'addition, quand on montre que la surface (ou l'aire) est une grandeur mesurable, c'est-à-dire qu'on peut ajouter ou soustraire des surfaces, les multiplier ou les diviser par un nombre. Le Dubreil aborde ce problème un peu plus loin, juste avant d'établir les formules usuelles. Dans les six autres manuels, on ne trouve nulle part dans le cours des surfaces de formes différentes et de même aire, sauf comme moyen d'établir les formules permettant de calculer les aires usuelles.

Pour ce qui est de l'unité, elle est appelée unité d'aire ou de surface. Il faut noter que sept manuels pour qui l'aire est un nombre parlent d'unité d'aire. Six d'entre eux définissent le m^2 comme l'aire d'un carré d'un mètre de côté : doit-on comprendre que le m^2 est le nombre 1 ? Pour le septième, le m^2 est le carré d'un mètre de côté. Comment pourra-t-on mesurer l'aire d'un triangle en m^2 ? D'ailleurs aucun des manuels consultés n'envisage de pavage avec des unités autre que carrées. Seuls le Brédif et le Queysanne Revuz disent ou laissent penser qu'on pourrait le faire en disant que "l'usage est de choisir (pour unité) l'aire d'un carré dont le côté est une unité de longueur". Le Brédif en propose en exercices.

En ce qui concerne le calcul des aires usuelles, la formule donnant l'aire du rectangle est toujours justifiée par le pavage dans le cas où les dimensions sont entières, dans la plupart des manuels elle l'est pour des dimensions décimales par changement d'unité. Dans quelques manuels on l'établit sur les entiers et on l'applique immédiatement sur les décimaux sans prévenir.

Les formules sont établies dans un ordre variable : on commence indifféremment par le triangle ou le parallélogramme qu'on ramène au rectangle, rarement par le trapèze (Bréard) et on ramène ensuite les figures les unes aux autres par des cheminements variés.

Pour le triangle et le parallélogramme, le fait qu'on peut calculer l'aire de plusieurs façons est mentionné dans neuf manuels sur seize (dont un en exercice donné dans le déroulement du cours).

Les surfaces à bords courbes autres que le disque ne sont envisagées que dans sept manuels. Dans le Shaeffer et Lebaile, on envisage trois méthodes pour ces surfaces : le pavage avec l'unité et des sous-multiples de plus en plus petits de l'unité : dm^2, cm^2, mm^2... on s'arrête quand on a atteint la précision souhaitée, la rectification du bord qui consiste à remplacer les lignes courbes par des lignes brisées en essayant de ne pas trop changer l'aire, ce qui nécessite "un bon coup d'œil" et enfin la pesée ; aucune différence n'est faite entre les approximations obtenues : la première qui est une approximation par défaut qu'on sait comment améliorer, la seconde qui est liée au coup d'œil de l'exécutant et la troisième à la précision de la balance. Dans le Cagnac Thiberge on envisage la rectification du bord et les encadrements sur papier quadrillé. Notons que l'utilisation des pesées pour déterminer l'aire de surfaces quelconques est parfois envisagée dans le chapitre sur les masses, et le comptage de carreaux sur quadrillages dans le chapitre sur les échelles (à propos des cartes). Le Dubreil, le Queysanne Revuz et les autres manuels les plus récents se limitent aux encadrements sur papier quadrillé, c'est-à-dire au point de vue qui correspond à la définition théorique qu'on pourra donner de la mesure d'une surface à bords arrondis. Avant 1960, les encadrements ne sont envisagés que dans le Cagnac Thiberge. On les trouve ensuite dans la moitié des manuels, surtout à partir de 1965.

Quand la formule donnant l'aire du disque est justifiée, c'est le plus souvent en référence aux polygones réguliers, le plus souvent par analogie, par limite de polygones réguliers inscrits (dans le Riche), par encadrements par des polygones réguliers inscrits et exinscrits (dans le Cagnac Thiberge). D'autres manuels proposent une évaluation de l'aire du disque sur papier millimétré, soit dans le cours, soit en exercice.

3.2. Manuels de 1969 à 1976

L'analyse des manuels de cette époque est résumée dans le tableau 2 en annexe.

La gratuité des manuels scolaires dans les collèges entraîne que les éditeurs font tous paraître leurs manuels aux mêmes dates : on trouve une édition de 1969, correspondant aux nouveaux programmes et une édition de 1974. Seules quelques fiches datent de 1970 ou 1971. Nous avons examiné les fiches dans le même tableau que les manuels, mais on ne peut pas les mettre sur le même plan puisqu'elles ne remplissent pas tout à fait la même fonction : les fiches proposent des activités aux élèves et laissent peu de place pour les définitions et les explications.

Les termes surface et aire sont encore utilisés avec des sens différents suivant les manuels, mais avec des tendances majoritaires très nettes. Le terme surface reste peu défini ; quand il l'est, c'est avec le sens de portion de plan, et c'est toujours de cette façon (ou portion de plan à isométrie près) qu'il est utilisé par les manuels qui ne le définissent pas : il ne désigne plus la grandeur. Pour qu'il n'y ait pas ambiguïté, certains ne l'utilisent plus du tout (notons que le Queysanne Revuz et le Riche avaient déjà cette attitude en 1965 ou en 1967). D'ailleurs, la notion de grandeur a presque disparu. Dans ces programmes où on veut avoir des définitions précises, éviter d'employer des mots qu'on n'a pas définis, c'est un concept difficile à définir et on préfère l'évacuer. L'aire est presque toujours la mesure de la surface, donc un nombre ; cette fois, contrairement à ce qui se passait dans la période précédente, ce n'est plus un nombre concret, on ne le fait plus suivre du nom de l'unité, l'unité est indiquée avant (sauf dans des manuels comme le Monge où on donne la définition de l'aire comme un nombre et où on revient assez vite à l'écriture habituelle).

Un livre, celui de la collection Vissio (R. Polle), distingue la mesure de la surface qui est un nombre de son aire qui est une expression de la forme "n u-C", n étant un nombre, u-C étant le carré de côté 1u où u est l'unité de longueur. Cette définition de l'aire comme un nombre se réfère en fait au point de vue mathématique de l'application mesure, explicite dans le Bréard, le Hachette (éd. 1974) et dans des publications pour les professeurs (par exemple R. Polle : "L'enseignement mathématique en 6ème" paru chez Delagrave en 1969).

Pour les élèves, on a un souci de simplicité, on fait le choix de distinguer l'objet mesuré de sa mesure mais on ne veut pas faire intervenir un troisième terme : "*...si nous distinguons nettement l'objet mesuré (segment, secteur angulaire...) de sa mesure, il nous a paru inopportun de distinguer entre longueur, aire, volume d'une part et mesure d'une longueur, d'une aire, d'un volume d'autre part. Par* longueur, aire, volume, *nous entendons un nombre, résultat d'une opération de mesure et qui présuppose le choix d'une unité ; ainsi l'emploi du signe = entre deux longueurs par exemple sera justifié, puisqu'il s'agit de l'égalité de deux nombres.*" (Queysanne Revuz, livre du maître).

Ceci pose un problème au moment de la définition de unités. Une bonne partie des manuels consultés parlent quand même d'unité d'aire et beaucoup définissent le m^2 comme une aire ; si on peut considérer "unité d'aire" comme un bloc indécomposable, on est gêné pour le m^2 : si c'est un carré, on risque d'avoir des problèmes pour mesurer des triangles par exemple ; dire que c'est une aire, donc un nombre paraît assez absurde. Certains s'en tirent en ne donnant pas de définition : on a autant d'applications mesure que d'unités, le passage de l'une à l'autre étant souvent implicite. D'autres déclarent, comme le Bréard, *"En mathématiques, il n'y a pas d'unité d'aire ; mais les physiciens utilisent des unités d'aire. Pour le physicien ayant choisi une unité de longueur, l'unité d'aire est l'aire de la surface limitée par un carré dont le côté a pour longueur l'unité de longueur".* Comme on ne dit pas ce qu'est une aire pour le physicien, le problème est le même.

Il y a en général concordance des points de vue entre longueur et aire : les deux sont des nombres. Les volumes ne sont plus au programme de 6ème.

On explicite maintenant le plus souvent le fait que l'aire n'est pas liée à la forme : des surfaces de formes différentes peuvent avoir la même aire, mais cette précision se fait le plus souvent à travers la mesure sur quadrillage ; il est très rare qu'on fasse allusion au découpage recollement pour conserver l'aire mais on l'utilise pour établir les formules usuelles.

En ce qui concerne les formules, le calcul de l'aire du rectangle n'est plus toujours justifié, on ne mentionne plus les différentes possibilités du choix de la base pour le calcul de l'aire du triangle et du parallélogramme, pour le disque, on donne la formule sans se référer aux polygones réguliers : quand il y a une motivation en exercice, c'est par encadrements sur quadrillage. D'ailleurs les surfaces à bords arrondis (autres que le disque) et les encadrements font leur apparition dans la plupart des manuels alors qu'ils étaient rares auparavant. Cela s'explique par le fait que le point de vue résolument adopté pour aborder l'aire (et indiqué dans les programmes) est celui du comptage de carreaux sur quadrillage. Tous les manuels, sauf le Riche qui a conservé sur les aires le même chapitre qu'en 1965, abordent la notion d'aire de cette manière. Ce point de vue est cohérent avec la volonté de voir la mesure comme une application à valeurs dans $\mathbf{R}^{+}$. Nous avons d'ailleurs vu dans l'approche mathématique que c'est le point de vue le plus économique pour définir l'application mesure.

3.3. Manuels de 1977 à 1985

Avec la gratuité des livres dans les collèges, les parutions coïncident avec le renouvellement du stock des établissements. Nous avons examiné les manuels de 1977 qui correspondent à un changement de programme et quelques manuels de 1981. Cette étude correspond aux tableaux 3 et 4 situés en annexe.

En 1977, la définition de "surface" comme ensemble de points du plan s'est généralisée ; même si quelques manuels continuent à ne pas définir ce terme, ils l'emploient dans ce sens. Pour l'aire, les avis sont partagés :

- 9 manuels sur 15 lui conservent le sens de nombre, dont un fait aussi apparaître la grandeur sous le nom de superficie ou étendue

- 6 manuels utilisent le terme aire avec le sens de grandeur, en le définissant comme une propriété de la surface, ou en ne le définissant pas mais en disant que deux surfaces équivalentes ont même aire. Le point de vue souvent adopté est de considérer l'aire comme une classe d'équivalence de surfaces ; c'est la définition donnée aux professeurs (par exemple livre du maître pour la collection R. Polle) mais non aux élèves. Cependant, pour la longueur, la définition comme classe d'équivalence de segments est parfois donnée aux élèves (Mauguin, Louquet, Magnard). D'autres comme R. Polle la sous-entendent fortement : *"des segments correspondant au même réglage de compas sont des représentants d'une même longueur", on construit "un segment représentant un longueur".* Cette différence n'est pas étonnante puisque la relation d'équivalence peut, dans le cas de la longueur, s'exprimer de façon purement géométrique alors que ce n'est pas le cas pour l'aire.

Finalement, 7 manuels sur 15 prennent en compte le point de vue grandeur. Ils distinguent ainsi 3 pôles : objet géométrique, grandeur (physique) et nombre. Le nombre est alors la mesure de la surface ou la mesure de l'aire.

Le point de vue grandeur est encore plus net à propos de la longueur : 6 manuels seulement définissent la longueur comme un nombre. Outre le Magnard qui fait correspondre superficie à longueur, deux manuels ne sont pas cohérents entre longueur et aire, le Louquet qui définit la longueur de [AB] comme l'ensemble des segments superposables à [AB] et le Bordas qui définit la longueur comme une propriété commune à un ensemble de segments alors qu'ils définissent tous deux l'aire comme un nombre.

L'aire est souvent abordée à partir du quadrillage qui est presque toujours présent. On retrouve le problème signalé précédemment à propos des unités dans les manuels qui définissent l'aire comme un nombre et parlent d'unité d'aire (Queysanne Revuz, Monge, Bordas, Hachette, Boutin-Novelli, Louquet), les deux derniers définissent l'unité comme un carré, les autres comme une aire. On donne souvent des exemples de surfaces ayant la même aire sans être superposables, mais c'est souvent à partir du quadrillage et rarement en se servant de découpage et recollement.

L'addition des aires est abordée dans la majorité des manuels, ainsi que l'encadrement de surfaces à bords arrondis. La formule dans le cas du rectangle n'est pas toujours justifiée, mais la question est parfois posée et certains manuels annoncent qu'elle est valable dans tous les cas. Un manuel (celui de l'IREM de Strasbourg) regarde ce que devient l'aire d'un rectangle quand on multiplie une dimension par un nombre, les deux dimensions par deux nombres différents, les deux dimensions par le même nombre. Le fait qu'il y ait plusieurs bases possibles pour le calcul de l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme est rarement mentionné, quelquefois c'est utilisé en exercices.

Un livre de cette série (le Deledicq Lassave) est de conception très différente des autres : il propose des activités variées regroupées par objectifs et, à la fin du livre, un "guide mathématique" reprenant les contenus visés dans les activités. Ainsi, on trouve les aires principalement dans le thème "mesure" mais aussi dans les thèmes "approcher" et "petite histoire de la multiplication"

Les éditions de 1981 différent peu de celles de 1977 quand il n'y a pas changement d'auteur. Nous examinons quatre livres de cette année là qui, pour 3 d'entre eux, n'existaient pas en 1977.

On voit dans ces manuels une évolution par rapport aux précédents : on prend un point de vue "naïf" et on ne cherche pas à définir les termes "longueur", "surface", "aire". Il semble qu'on soit arrivé à un consensus : la surface est un ensemble de points comme le segment, longueur et aire sont des grandeurs, deux segments (resp. surfaces) superposables ont même longueur (resp. même aire), la mesure de la longueur, de l'aire sont des nombres. Dans 3 des manuels sur 4, on fabrique des surfaces non superposables et d'aires égales, à la fois sur quadrillage et par découpage-recollement ; dans le Deledicq-Lassave, ce n'est pas explicite.

On aborde à la fois les aires sur papier quadrillé et sur papier uni. Les surfaces à bord arrondis et les encadrements sont envisagés. Dans deux des manuels, on utilise des pavages avec des unités non carrées (triangles, losanges) ; dans le Bareil-Zehren, on propose même de nombreuses surfaces susceptibles de paver le plan ; dans le Deledicq-Lassave, on utilise des unités non carrées pour faire le lien entre aires et fractions.

Le Deledicq-Lassave garde les caractéristiques de l'édition précédente mais avec une présentation plus "classique" : les activités et le cours sont regroupés.

Un manuel est très différent des autres : le Bareil-Zehren. Ainsi la notion d'aire apparaît dans de nombreux chapitres : 4 orthogonalité et parallélisme (p. 74 à 76 pavage de triangles avec des triangles...), 5 division (p. 88, 89 encadrements), 7 rectangle (p. 105 à 114, aires et périmètres), 8 la mue des écritures (p. 119 distributivité), 10 échelles (p. 149 bidimensionalité), 11 cercle et disque (p.163 à 170), 15 aires (p. 207 à 222). On assiste ainsi à la mise en place de jeux de cadres entre géométrique, numérique et graphique, à une confrontation entre longueurs et nombres : recherche de rectangles à périmètre constant, calcul de l'aire, recherche de rectangles à aire constante, calcul du périmètre. Il annonce l'esprit des programmes qui vont être décidés en 1985 et entrer en vigueur en 1986.

3.4. Manuels de 1986

Comme nous l'avons déjà indiqué, un consensus est apparu sur l'emploi du mot "surface" qui désigne une partie du plan, mais la plupart du temps c'est de façon implicite : le terme n'est pas défini, l'existence du consensus semble maintenant rendre la définition inutile.

Pour l'aire il n'y a pas unanimité, quand elle est définie, c'est comme nombre, mais elle est le plus souvent utilisée avec le sens de grandeur, sans définition ; certains distinguent aire et mesure : la mesure, c'est le nombre, l'aire le nombre avec l'unité, par exemple la mesure de l'aire avec l'unité u est 5, l'aire est 5u. En tous cas, l'aire ne dépend que de la surface : elle ne change pas quand on change d'unité. Presque tous les livres proposent des surfaces de formes différentes et de même aire et beaucoup font appel au découpage et recollement et aux comparaisons sans mesure pour donner du sens à la notion d'aire. L'aire est encore souvent définie à partir du quadrillage, mais ce n'est en général plus le point de vue unique. On l'utilise en tous cas pour encadrer l'aire de surfaces à bords arrondis (autres que le disque) quand on aborde cette question, qui peut être considérée hors programme. Comme nous l'avons vu, dans les nouveaux programmes, l'étude des aires n'est pas terminée en 6ème, elle se prolonge en 5ème et en 4ème. Ceci explique que les formules donnant les aires des surfaces usuelles ne soient souvent pas traitées et que la place consacrée aux aires dans le manuel soit relativement plus modeste que dans les années précédentes.

3.5. Conclusion

On constate une évolution des points de vue et un glissement du vocabulaire entre 1960 et 1980. Nous avons vu cette évolution à travers les programmes, mais on la voit plus précisément à travers les manuels qui précèdent parfois les changements de programme.

Avant 1960, le terme de surface est considéré comme assez clair et désigne plutôt une propriété, une qualité de la surface, on peut l'interpréter comme une grandeur physique. Il désigne parfois aussi l'objet géométrique dans des expressions comme "on décompose la surface en figures géométriques simples". Le même terme sert aussi souvent, par abus de langage, à désigner la mesure elle-même. La figure (parfois la portion de plan) est un ensemble de points, mais un ensemble de points à isométrie près : deux figures sont égales si elles sont superposables. L'aire est un nombre, mais un nombre spécial, un nombre de m^2 ou de cm^2 ou d'ha... il s'écrit d'une manière particulière (nombre suivi d'une unité) qu'il est nécessaire d'étudier en détail : on étudie "les nombres qui servent à désigner des aires" comme dans un autre chapitre on étudiera les "nombres qui servent à désigner des volumes" ou encore ceux qui servent à désigner des heures, les fameux "nombres complexes".

Dans les années 60, avant même la parution des nouveaux programmes de 1968-1969, un souci de clarification du vocabulaire et de l'utilisation de l'égalité se fait jour. Il faut distinguer l'objet à mesurer de sa mesure. Les deux mots existants vont servir à cette distinction : la surface désignera l'objet, ensemble de points du plan, et l'aire désignera la mesure, c'est-à-dire un nombre. Mais, à partir de 1969, un nombre est vraiment un nombre : les nombres servant à désigner les aires ne sont pas différents de ceux qui servent à désigner autre chose et 12 n'est pas égal à 1200. On choisit d'abord l'unité et on n'a plus affaire qu'à des nombres. Dans cette distinction, il n'y a plus de place pour un troisième terme qui serait l'invariant attaché à la surface. On le mentionne éventuellement pour les maîtres en leur précisant qu'on fait un abus de langage en l'identifiant à la mesure, ce qui n'est pas gênant dès lors qu'on a décidé de ne travailler qu'avec des aires exprimées dans la même unité.

Les changements à l'école primaire vont dans le même sens mais le souci de simplification, ou peut-être même une mauvaise compréhension de certains auteurs de manuels, amène à une certaine dénaturation de la notion d'aire, encouragée par les commentaires des programmes eux-mêmes.

Dans le même temps, le point de vue pour aborder l'aire change.

Avant 1965, il s'agit avant tout de mesurer des figures, de préférence des polygones, et de savoir utiliser les unités légales. Ce sont d'ailleurs le plus souvent les seules considérées. Il faut noter qu'à la même époque, on mesure un segment avec une unité quelconque alors que pour les aires on se limite aux unités légales. Quand les surfaces à bord courbe (autres que le disque) sont abordées, c'est dans un but pratique. On envisage compensations, pesées (dans le chapitre sur les masses) comptage de carreaux sur une carte à l'échelle. On pense à l'arpentage et à la mesure des champs, les unités agraires sont en bonne place.

Après 1965, et surtout après 1969, on cherche à associer un nombre à n'importe quelle surface. Le point de vue généralement adopté est celui du quadrillage et de ses raffinements successifs pour montrer qu'on peut encadrer l'aire par des nombres décimaux de plus en plus proches. On admet sans le dire l'existence de l'aire et donc l'unicité du nombre associé à chaque surface, une fois l'unité choisie. L'invariance par déplacement est également admise implicitement, elle peut permettre d'améliorer un encadrement (cf R. Polle). Il arrive même que la finesse d'un encadrement soit non seulement outil, mais elle-même objet d'enseignement (cf Galion, les définitions à ce sujet sont encadrées, comme ce qui est à retenir de la leçon).

A partir de 1981 et surtout de 1986, la distinction entre objet et mesure est unanime : la surface est un ensemble de points du plan, la mesure de la surface (ou de l'aire) est un nombre, mais on voit réapparaître le troisième terme : l'aire prend plutôt le statut de grandeur, mais les positions sont loin d'être claires à ce sujet. Pour certains, la référence implicite est nettement celle de la grandeur physique : on utilise l'expression "avoir même aire" en référence à la mesure ou au découpage et recollement. On n'a plus le même souci de définir que dans les années 70, il s'agit de donner du sens à la notion même si on ne peut pas en donner de définition. Pour d'autres, l'aire reste un nombre, mais on retrouve le nombre avec l'unité, c'est-à-dire en fait la grandeur physique. Il semble que cette définition de l'aire comme nombre soit plutôt un moyen de traduire l'indépendance par rapport à la forme, et par là la différence entre aire et surface. Les définitions ne viennent d'ailleurs souvent que pour préciser des distinctions : *"ne confonds pas la surface qui est une partie du plan et l'aire qui est un nombre", " la mesure de la surface avec l'unité u est 10, on dit que l'aire de la surface est 10 u".*

Par ailleurs, l'approche sur quadrillage n'est plus la seule envisagée. Il semble qu'on commence à assister à une synthèse entre l'approche sur quadrillage et celle sur papier uni, et ceci dans un souci de construire la notion d'aire avant de poser la question de la mesure. Dans le primaire, cet aspect construction de la notion d'aire aussi bien que de la notion de mesure apparaissait déjà dans les programmes de 1980, et il est développé dans des manuels pour les maîtres comme le ERMEL.

L'évolution que nous décrivons ici est celle d'une tendance générale des manuels. Nous avons vu que les manuels d'une même époque ne sont pas uniformes : certains conservent la conception dominante à l'époque précédente, et d'autres annoncent déjà celle de l'époque suivante et traduisent le travail qui se fait dans la noosphère, que nous allons aborder maintenant

4. Le travail de la noosphère de 1958 à 1974.

Nous nous sommes intéressée à la période entourant la modernisation de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire, qui commence timidement dans les classes terminales en 1962 pour aboutir aux nouveaux programmes qui entreront en vigueur en 1969 en 6ème. Nous avons choisi d'étudier le travail de la noosphère à travers le bulletin de l'APMEP. L'Association des Professeurs de Mathématiques (A.P.M.), devenue ensuite A.P.M.E.P. (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), prend en effet une part active dans l'évolution de l'enseignement des mathématiques et on voit les témoignages de cette activité dans le Bulletin de cette Association où s'expriment aussi bien des professeurs de l'enseignement supérieur, le plus souvent partisans de la modernisation, que des professeurs de lycée. Dans le même temps, la réforme des programmes et instructions de 1945 en primaire est ardemment souhaitée et des projets de programmes pour l'école élémentaire paraissent aussi dans le bulletin de l'A.P.M.E.P. à la fin des années soixante.

En ce qui concerne les aires et plus généralement les mesures, on peut distinguer 3 grands moments :

- années 1958 - 1959
- années 1965 - 1969 (mars)
- années 1969 (oct) - 1974

4.1. Première période : les prémices de la réforme, 1958-1959.

Au cours de la première période, on constate surtout un souci de formation théorique des professeurs du secondaire par ceux du supérieur. En effet, au cours de l'année scolaire 1958-1959, le Bulletin de l'A.P.M. fait paraître une série d'articles théoriques sur la mesure :

- dans le numéro 194 d'octobre 1958 un article de J. Dixmier sur la mesure des angles et un de H. Cartan sur le volume des polyèdres. L'exposé sur la mesure des angles sera suivi d'un autre sur la mesure des rotations par A. Doneddu dans le numéro 253 de juillet 1966
- dans les numéros 196, 198, 199 de janvier, mars et juin 1959 trois articles de A. Revuz sur la mesure des aires et la théorie de l'intégration
- dans les numéros 198 et 199, on a aussi deux articles de R. Fortet sur le calcul des probabilités.

On ne trouve pratiquement rien sur l'enseignement de la mesure pendant les 5 années suivantes.

4.2 Deuxième période : la préparation de la réforme 1965-1969.

Au cours de la deuxième période, des projets de programmes commencent à être élaborés pour tous les niveaux d'enseignement, y compris l'école élémentaire (n°249, sept. 1965) ; parallèlement, on commence à mener des expérimentations. Dans le numéro 251 de janvier 1966, N. Picard indique bien le changement d'état d'esprit à propos des mesures : il ne s'agit plus seulement d'avoir des compétences pratiques et de savoir se servir des instruments de mesure. On a un objectif plus théorique en faisant apparaître l'arbitraire du choix des unités : *"La mesure relève d'une physique expérimentale élémentaire. L'accent porte sur les idées très importantes d'encadrement et de choix arbitraire des unités."*

Dans le même temps, des membres de l'A.P.M.E.P. participent à la mise au point d'une série d'émissions télévisées "Les chantiers mathématiques" accompagnées d'un bulletin. Plusieurs doivent être consacrées à la mesure (annonce du bulletin n° 232 d'octobre 1963).

La réflexion théorique continue dans le numéro 254-255 de septembre 1966 avec un article de G. Delpla sur "grandeur, mesure et unité" inspiré d'un ouvrage de Landolt portant le même titre paru en 1947 chez Dunod.

De nouveaux projets de programme pour les écoles maternelle et primaire paraissent dans le numéro 258 de mai 1967. Au sujet de la mesure, l'approche est assez différente de celle des programmes de 1945 encore en vigueur à l'époque :

Au C.P. on utilise la relation "avoir même longueur" pour classer les éléments d'un ensemble puis ranger les classes d'équivalence.

Au C.E. on mesure (longueur, aire, masse, durée) avec des unités quelconques avant de s'intéresser aux unités légales. Les commentaires distinguent nettement la grandeur du nombre qui la mesure : *"les expressions "nombre concret, nombre abstait" étant dénuées de sens, il paraît nécessaire d'abandonner l'habitude de faire à côté d'un nombre l'indication de la nature des objets ou de l'unité de mesure lorsque ce nombre est un terme* *d'une opération quelconque (exemple : écrire 3 + 2 = 5 et non pas 3 billes + 2 billes = 5 billes ou 3 cm + 2 cm = 5 cm)".*

Au C.M. on aborde de plus les notions d'unité de mesure et de changement d'unité, les valeurs approchées d'une mesure et les correspondances entre grandeurs qui vont donner lieu à l'étude de relations fonctionnelles et non fonctionnelles, de correspondances linéaires et non linéaires. A ce propos, les commentaires font apparaître les fractions comme opérateurs sur des grandeurs et le produit des fractions comme composition de ces opérateurs : *"s'il est rare d'exprimer une mesure par une fraction, il n'est pas rare de "prendre une fraction d'une grandeur", c'est-à-dire multiplier une grandeur par une fraction."* Par ailleurs les commentaires invitent à utiliser plusieurs cadres pour l'étude de la proportionnalité entre grandeurs : *"L'étude de correspondances linéaires entre deux grandeurs ... sera nourrie de nombreux exemples... La découverte et l'exploitation judicieuse des tableaux de valeurs correspondantes et même de la représentation graphique, permettront de briser l'automatisme stérile de la "règle de 3""*. Cet esprit sera tout à fait celui des nouveaux programmes de 1970 à l'école élémentaire.

Sur la notion de grandeur, dans ce même numéro 258, l'A.P.M.E.P. *"opte pour une notion naïve ... qui serait une propriété commune à des objets ... d'un point de vue plus savant, ce serait une classe d'équivalence pour les relations étudiées"*. Nous avons vu que ce point de vue ne sera pas retenu par les nouveaux programmes et que la notion de grandeur y sera complètement évacuée.

En mars 1969, il n'y a pas encore de nouveaux programmes pour l'enseignement élémentaire mais le Ministère a mis en place depuis l'été précédent une Commission Ministérielle de Rénovation Pédagogique qui doit, entre autres se pencher sur cette question. L'A.P.M.E.P. soutient avec l'I.P.N. (Institut Pédagogique National) deux projets : l'un (projet A) serait applicable immédiatement et permettrait aux maîtres de se former en attendant la mise en place progressive du projet B qui devrait être généralisé en 1971 au niveau du C.P. (bulletin n° 267 de mars 1969).

Sur la mesure, ces projets sont plutôt modestes :

Projet A : on parle de "travaux pratiques de mesure" :

- cours élémentaire : exprimer une mesure, une unité étant choisie. (on ne précise pas s'il s'agit des unités légales ou d'unités arbitraires)
- cours moyen : "recherche de mesure. Utilisation des unités légales usuelles (longueur, aire, volume, masse, durée). Encadrements d'une mesure."

Projet B : la mesure a presque disparu !

- cours élémentaire (fin) : travaux pratiques entrant dans le cadre des activités d'éveil (conduite d'une expérience, compte rendu d'une expérience, étude du milieu)
- cours moyen : mesure sur fond de quadrillage.

Dans le vote pour l'assemblée générale de 1969, les adhérents doivent se prononcer sur cette question.

Avant la parution des nouveaux programmes, un seul article concerne un travail en classe sur des mesures : il s'agit d'un article de C. Hug paru dans le numéro 263-264 de juillet - octobre 1968 : "A propos de la mesure des aires au cours moyen" qui rend compte d'un travail utilisant le quadrillage et le découpage - recollement avec pour objectif de déstabiliser un modèle faux des élèves qui consiste à penser qu'en déformant une surface, on conserve son aire : la première idée des élèves dans un travail sur quadrillage est de mesurer le périmètre et de "mettre la surface en carré". Notons que c'est un modèle que nous avons pu retrouver au cours de nos observations (voir chapitre II).

Dans le même temps, la commission du dictionnaire de l'A.P.M.E.P. se donne pour but de fixer le vocabulaire et les notations : ainsi, en accord avec la plupart des manuels de 6ème (bulletin n° 268 de mars 1969), J.M. Chevallier propose de distinguer la droite (AB) de la demi-droite [AB), du segment [AB] et de sa longueur AB, mais rien ne nous permet de savoir si la longueur est un nombre ou une grandeur.

Un an plus tard (n° 274 de juin 1970), le même auteur se réjouit de ce que les auteurs de manuels n'aient pas appliqué à la lettre les instructions des programmes au sujet des notations de mesures, ce qui nous épargne des énoncés du genre : *" le kilogramme et le franc étant les unités respectives de masse et de prix, un épicier achète 100 de sucre et 18 de café pour 303. Le mois suivant, les F-prix massiques n'ayant pas changé, il paie 527,25 pour 125 de sucre et 36 de café. Combien paie-t-il 1 de sucre ? 1 de café ?"*

4.3. Troisième période : la mise en place de la réforme.

La troisième période correspond au début de l'application des nouveaux programmes. Le numéro 269-270 daté de juillet-octobre 1969 paraît au moment où entrent en application les nouveaux programmes de 6ème. C'est un numéro spécial consacré à la classe de 6ème.

Concernant la mesure, on y trouve un article de P. Buisson qui donne d'abord un exposé théorique de la "mesure des segments géométriques sur une droite affine" (mesure au sens d'application de l'ensemble des segments de D dans $\mathbb{R}^+$), puis aborde ce qu'on peut faire en classe de 6ème : il parle alors de mesure d'un segment physique et utilise les reports à l'aide d'un compas à pointes sèches. Dans les deux cas, il distingue les 3 termes : segment pour désigner l'objet physique ou géométrique, longueur pour désigner une classe d'équivalence de segments, mesure pour désigner le nombre. Pour les élèves de 6ème, il reconnaît que s'il *"n'est pas possible de définir la longueur comme classe d'équivalence", "par contre, on doit pouvoir dire que u mes[AB] = β est synonyme de longueur du segment [AB] = βu et que cela s'écrit AB = βu."* Pour la classe de 5ème, il propose de préciser la notion de longueur comme exemple de relation d'équivalence : *"deux segments [AB] et [CD] sont équivalents si pour toute u mesure on associe aux segments le même encadrement ; <u>on appelle longueur du segment</u> [AB] <u>la classe d'équivalence du segment</u> [AB] <u>et on la note</u> AB".* Les autres mesures sont à peine abordées mais l'auteur propose une terminologie cohérente :

segment	surface	solide	secteur angulaire
longueur	aire	volume	amplitude

la première ligne désignant des ensembles de points de l'espace et la deuxième les classes d'équivalence correspondantes par la relation $\mathcal{R}$ (A,B) si et seulement si pour toute mesure μ on a $\mu(A) = \mu(B)$. Le choix de la définition dans le cas des segments de la relation d'équivalence en référence à la mesure et non à l'isométrie est fait justement parce qu'il est généralisable aux autres mesures.

Dans ce même numéro du bulletin, G. Walusinski donne son point de vue sur l'enseignement de la mesure en 6ème : il pense qu'elle doit permettre une approche de la théorie de la mesure mais que c'est un sujet difficile et qu'il faut pour les professeurs bien connaître les exigences des physiciens et des mathématiciens, même s'ils ne pourront toutes les satisfaire. Il propose quelques situations permettant d'approcher la théorie de la mesure et la notion de clan, en particulier des situations où l'invariance par translation n'est pas réalisée.

La volonté de ne pas se contenter d'une pratique de la mesure, comme dans les anciens programmes mais de l'aborder d'un point de vue plus théorique est manifeste aussi dans le compte-rendu de l'équipe d'expérimentation de Poitiers : *"Nous avons considéré cet alinéa (des programmes) comme une borne supérieure de ce qu'on peut traiter en sixième : c'est une liste d'exemples parmi lesquels il faut choisir ceux qui se prêtent le mieux à l'introduction de la notion d'<u>encadrement</u> et aussi, dans la mesure où cela est possible en sixième, à la <u>notion mathématique de mesure</u>."* Ils insistent sur la notion d'encadrement en précisant qu'il s'agit "de la notion physique d'encadrement (imprécision des instruments de mesure) et non de la notion mathématique (encadrements de plus en plus fins conduisant à une mesure définie comme une limite).

Toujours dans ce numéro, dans un article intitulé "La physique mathématique en sixième", J.M. Chevallier pose bien la question de la relation entre la théorie et la pratique, entre les mathématiques "pures" et la physique, le professeur de mathématique du collège ayant à se préoccuper des deux. Une de ses préoccupations concerne le vocabulaire et les notations qui traduisent des problèmes de fond : comment, si la longueur est une application à valeur numérique admettre à la fois AB = 3 et AB = 30 et AB = 0,03...? Certes, c'est cm-mes AB = 3 et mm-mes AB = 30 qu'il faut écrire mais outre que cela montre que AB n'est pas un nombre, cela conduit aux abus de langage précédents. Nous ne pouvons que l'approuver quand il dit *"Franchement, AB = 3 cm = 30 mm était plus clair"* ! Il aborde aussi les écritures du type "2 cm x 3 cm = 6 cm^2" ou "15 km : 3 h = 5 km/h" en disant que la discussion à leur sujet doit porter sur le plan pédagogique et non sur le plan théorique où on ne saurait condamner cet abus de langage sous peine d'être "ensevelis sous l'avalanche des notations".

Le numéro 282 de février 1972, entièrement consacré à l'école élémentaire, aborde très peu la question de la mesure : on n'y trouve que quelques réflexions d'un groupe constitué de professeurs d'école normale et d'un instituteur qui précise surtout qu'il est souhaitable d'aborder la mesure d'un point de vue qualitatif avant de s'intéresser au quantitatif et que l'objectif est d'avoir compris la méthode plus que de retenir des formules (pour les aires par exemple).

Dans le numéro 283 d'avril 1972, on trouve encore un article (de H. Bareil cette fois) attirant l'attention sur les mesures et égalités abusives dans les manuels de 6ème. Comme P. Buisson et J.M. Chevallier, H. Bareil distingue 3 catégories d'êtres et demande que le vocabulaire et les notations soient cohérents dans ce domaine et respectent le sens de l'égalité.

Les journées A.P.M.E.P. qui ont lieu en 1973 à Nancy, et dont le numéro 291 du bulletin rend compte, abritent un groupe de réflexion sur la mesure à l'école élémentaire animé par F. Colmez. La progression proposée commence par des comparaisons directes (on s'intéresse aux longueurs, aux masses et aux capacités) puis propose des comparaisons entre objets pour lesquels la comparaison directe est impossible, de façon à rendre nécessaire l'utilisation d'un instrument : étalons divers ou report d'une unité ; le report d'une unité amène à la construction d'une échelle qu'il faudra affiner pour avoir plus de précision sur les mesures. Cet affinement est fait dans le cas des longueurs et dans différents systèmes : on introduit à cette occasion une notation à virgule (dans des bases variables et non seulement dans la base 10).

Le débat sur l'école élémentaire qui a eu lieu dans ces mêmes journées et que R. Crépin rapporte, met l'accent sur la liaison entre les contenus et les méthodes : l'instituteur a l'habitude d'enseigner des certitudes et quand le mathématicien parle "mesure", l'instituteur pense "système métrique" ; le premier "tient à ménager toutes les étapes pour une véritable construction de la connaissance mathématique" pendant que le deuxième "affirme son enseignement par ce qui est retenu plus facilement par l'enfant parmi les résultats qui, aux yeux du maître, paraissent indispensables à retenir". Le rapporteur se demande si les points de vue sont inconciliables et pose des questions qu'il demande à l'A.P.M.E.P. d'étudier d'urgence :

Quelles sont à l'école élémentaire les notions mathématiques à faire connaître ? Quelle est la méthode d'approche pour une bonne compréhension des enfants ?

Comment peut-on ne pas confondre une notion et la communication de cette notion ? Une notion et un modèle concret préfabriqué pour schématiser cette notion ?

Comment ménager la continuité de l'enseignement mathématique de la maternelle à l'élémentaire, de l'élémentaire au premier cycle,... de l'école à la vie ?

Le numéro 293 d'avril 1974 contient un article de P. Rougée "Axiomatique pour les dimensions physiques, les scalaires et les vecteurs du physicien", article théorique qui décrit un groupe permettant de modéliser les dimensions en physique et un corps des grandeurs scalaires physiques dans lequel on associe une dimension à chaque grandeur physique, on définit une addition entre grandeurs de même dimension et un produit entre grandeurs physiques quelconques ; cela permet de justifier des écritures comme "300 m + 4 km = 43 hm" ou "3 grammes x 4 ms^{-1} = 1200 dynes".

Nous voyons que la réflexion à l'intérieur de l'APMEP reflète et précède le changement de point de vue sur la mesure qui a lieu dans les programmes de 1969-1970. Les auteurs sont d'accord pour mettre l'accent sur l'application mesure et pour distinguer clairement l'objet à mesurer de sa mesure. Les avis sont plus partagés sur la considération d'un troisième terme correspondant à l'aspect grandeur. C'est la définition de l'aire comme un nombre en ne considérant que les deux pôles surfaces - nombres qui a été retenue dans les nouveaux programmes. Mais le point de vue qui consiste à distinguer les trois termes dans l'enseignement continue à exister au sein de la communauté des professeurs de mathématiques et réapparaît dans les programmes de l'école élémentaire de 1978-1980. Il est adopté dans la brochure "Grandeur - mesure" qui tente de faire le point sur la question et dont nous avons déjà parlé dans le paragraphe 1.

Après 1974, si l'on excepte un article de G. Vergnaud et autres "Quelles connaissances les enfants de 6ème ont-ils des "structures multiplicatives" élémentaires ?" paru dans le numéro 313 d'avril 1978 qui est plutôt centré sur la proportionnalité et aborde des problèmes de volume parmi d'autres problèmes relevant de la linéarité, aucun article ne traite de mesures pendant 5 ans.

Dans le numéro 320 de septembre 1979, on trouve dans la nouvelle rubrique des "Etudes didactiques" un article de J. Rogalski intitulé "Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifications : les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes" qui s'intéresse plutôt à l'aspect cognitif de la question. Ici l'accent est mis sur l'élève et son développement. Jusque là, on s'est interrogé sur le contenu, le vocabulaire adéquat, l'élève était singulièrement absent du débat. La nouvelle rubrique fait apparaître le fait que, dans les travaux de didactique, les trois termes de la relation didactique - contenu, maître, élève - sont pris en compte : l'élève et le contenu sont au centre de l'étude de l'enseignement d'une notion.

Conclusion

De l'analyse des programmes et des manuels, il ressort que deux objectifs se manifestent dans l'enseignement des aires et plus généralement des mesures, de façon très inégale suivant les époques, avec une rupture très marquée au début des années 70 :
- d'une part, il s'agit de répondre à un besoin de la société de dispenser des connaissances élémentaires, notamment concernant le système métrique, utiles pour la vie quotidienne aussi bien que professionnelle de tout adulte.
- d'autre part, il s'agit d'enseigner des notions mathématiques qui ont une place dans l'édifice des savoirs, qu'on sera amené à reprendre et à généraliser plus tard, il s'agit en quelque sorte de mettre des jalons pour la suite de l'enseignement des mathématiques.

La rupture des années 70 correspond au passage de la prédominance du premier point de vue à celle du second. On a pu voir comment ce passage a été préparé par un travail qui avait commencé bien plus tôt au sein de l'Association des Professeurs de Mathématiques. Conformément à l'esprit de l'ensemble des programmes de cette époque, on a pris le parti de choisir le chemin le plus direct possible pour atteindre le concept mathématique visé, ici celui de mesure qui permet d'associer un nombre aux surfaces en court-circuitant l'aspect grandeur. Comme c'est l'usage en mathématiques, l'aire est ainsi identifiée au nombre qui la mesure. Cette identification, prise à la lettre, a d'ailleurs pour conséquence qu'à l'école élémentaire l'aire n'est explicitement plus un invariant de la surface. De plus, l'utilisation presque exclusive des quadrillages nous semble donner aux élèves une réponse au problème de la mesure sans le poser, et sans construire l'invariant qu'il s'agit de mesurer.

La notion d'aire elle-même nous paraît autant un enjeu d'enseignement que celui de sa mesure, c'est pourquoi nous verrons dans le prochain chapitre que nous avons fait des choix différents, conformes d'ailleurs à l'évolution des programmes dans les années 80 : commencer par travailler sur la notion d'aire sans mesure et poser le problème de la mesure à partir du pavage avec des pavés de formes variées.

Liste des manuels de 6ème consultés

Programmes de 1945-1947, modifiés en 1957, modifiés en 1960

P. Boutin (Ed. De Gigord) édition de 1951

H. Schaeffer et J. Lebaile (Ed. Delagrave) édition de 1951 avec additif de 1958 (ne concernant pas les aires)

collection G. Cagnac et L. Thiberge par L. Thiberge et E. Gilet (Ed. Masson) édition de 1958

Lespinard et Pernet (Ed. A. Desvignes) édition de 1960 (?)

collection J. Marvillet par R. Girard et P.M. Fournier (Ed. Armand Colin) 5ème édition de 1961

R. Duma et G. Mallet (Ed. Bourrelier) édition de 1961

collection P. Dubreil par A. Brailly-Marchand et A. Fouché (Ed. Vuibert) édition de 1961

C. Bréard (Ed. de l'école) programmes de 1958 - 5ème édition (1962?)

Maillard et Cahen (Ed. Hachette) édition de 1962

M. Monge et M. Guinchan (Ed. Belin) édition de 1963

R. Cluzel et M. Nicolas (Ed. Delagrave) édition de 1963

collection M. Queysanne et A. Revuz par P. Plessier et M. Morlet (Ed. Nathan) édition de 1965

Huisman et Itard (Ed. Wesmaël - Charlier) édition de 1965

collection Brédif (Ed. Hachette) édition de 1966

collection E. Riche par M. Nonnotte et A. Favier (Ed. Hatier) édition de 1967

collection P. Théron et E. Cossart par L. Kruger (Ed. Bordas) édition de 1967

Programmes de 1969

Collection Bréard Editions L'école Année 1969

Collection Vissio, auteurs R. Polle, G.H. Clopeau Editions Delagrave, années 1969 et 1973.

Collection Monge et Guinchan, auteurs J.P. Pelle, J. Monge et G. Pelle, Editions Belin, 1969.

Collection Queysanne et Revuz, auteur Morlet, Editions Nathan, 1969.

Collection Riche, auteurs Nonnotte et Favier, Editions Hatier, 1969

P. Dedron et P. Lebreton, Editions Magnard, 1969

Hamel, Cherrier, Content, Editions Didier, 1969

Fiches Galion, OCDL, Editions Hatier, 1968 et 1973

Fiches du lycée de Sèvres, Editions Magnard, 1970

Fiches Touyarot et alii, Editions Nathan, 1971

Fiches Gueldry, Berteaud, Berger, Editions Vuibert, 1971

Collection Monge et Guinchan, auteurs J.P. Pelle Editions Belin, 1974

Boursin, Caparros, Bitton, Editions Bordas, 1974

Boulier, Bocage, Andreu, Editions Hachette, 1974

Collection Queysanne et Revuz, auteurs Morlet et Rouquairol, Editions Nathan, 1975.

Programmes de 1977. Editions de 1977.

Fiches Galion, OCDL, Editions Hatier

R. Polle, G.H. Clopeau, J. Delobel Editions Delagrave.

Collection Monge Editions Belin.

Collection Mauguin, P. Fauvergue, J. Jeanmot, R. Rieu, Editions Istra

Collection IREM de Strasbourg Editions Istra

Collection Horizons Mathématiques Editions La Capitelle

Boutin et Novelli, Editions L'école

Collection Louquet par Louquet, Gandil et Viviani, Editions A. Colin

Thirioux, Domain, L. et S. Sanchez Editions Magnard

Editions Bordas

Collection M par Gerll, Cohen et Gaillard, Editions Hachette

Collection "faire des mathématiques", Deledicq et Lassave, Editions Cedic

Collection Durrande, par Peyronnel et Prautoy, Editions Techniques et Vulgarisation

Collection Jéomatri par IREM de Grenoble, Editions Ophrys

Collection Queysanne et Revuz, par Rouquairol, Editions Nathan

Programmes de 1977. Editions de 1981.

M. Claude, J.P. Ménardo, Y. Bellecave Editions Nathan

H. Bareil et C. Zehren, Editions Hachette.

Crépin, Millet, Cisterne, Jamin, Editions Bordas.

A. Deledicq et C. Lassave, Editions Cedic

Programmes de 1986. Editions de 1986.

C. Fibu, V. Jullien, B. Ravel, Editions Magnard.

Collection P. Louquet, par P. Aguilar, P. Louquet, L. Moulia, Editions A. Colin

Collection Pythagore, par G. Bonnefond et D. Daviaud, Editions Hatier.

A. Benoît, D. Guy, F. Gutmacher, A. Hugon, Editions Didier.

Collection Jéomatri, IREM de Grenoble, Editions Ophrys.

P. Boulanger, I. Marmande, H. This, R. Szajnfeld, Editions Belin.

Collection Evariste, Editions Delagrave.

S. Puts-Lajus et A. Deledicq, Editions Nathan.

H. Bareil et C. Zehren, Editions Hachette.

manuels de 6ème 1951-1967

collection ou auteurs	P. Boutin	Shaeffer Lebaile	Cagnac Thiberge	Lespinard Pernet	Marvillet	Duma Mallet
éditeur	De Gigord	Delagrave	Masson	A. Desvigne	A.Colin	Bourrelier
année	1951	1951	1958	1960 ?	1961	1961
longueur	non def. (grandeur) nb suivi d'une unité	grandeur (non def.)	grandeur (non def.)	non def.(grandeur) mesure = nb ("pur")	grandeur (non def.)	grandeur (non def.)
volume	non def (grandeur)	grandeur	grandeur	portion d'espace = grandeur	grandeur	grandeur, portion d'espace
termes employés	surface, aire	surface, aire	surface, aire	surface, aire	surface = aire	surface,aire
surface	non défini	non défini	grandeur	portion de plan = grandeur mesurable	grandeur mesurable	non défini
aire	nombre qui mesure une surface	mesure de surface	nombre qui exprime une mesure	mesure de la surface i.e. nombre (vrai)	grandeur mesurable	nombre qui expime la mesure
surfaces de formes différentes et de même aire	non	non	oui (assemblages de carrés)	non	oui (dans l'addition)	oui (dans l'addition)
addition des aires	non	non	oui	oui	oui	oui
unités de formes non carrées	non, unités légales seules	non	non	non, unités légales seules	non	non
unités	d'aire	d'aire	de surface	de surface	de surface	d'aire
m2	surface d'un carré de 1m de côté	carré de 1m de côté	surface d'un carré dont le côté mesure 1m	aire d'un carré de 1m de côté	surface d'un carré dont le côté mesure 1m	aire d'un carré de 1m de côté
justif. aire rectang. entiers décimaux	 oui non	 oui changement d'unité	 oui changement d'unité	 oui non	 oui changement d'unité	 oui changement d'unité
changement de base triangle, parallélog.	mentionné sans justification	mentionné sans justification	mentionné sans justification	non	non	non
bords arrondis	non	oui	oui	non	non	oui
encadrements	non	non	oui	non	non sauf dans calcul	oui
disque	formule donnée	formule donnée explication $\pi<4$	encadrements polygones réguliers	formule	analogie polygones réguliers	évaluation sur papier millimétré
nombre de pages	24/280		30/270	16/207	35/252	27/283
rapport	0,086	0,126	0,111	0,077	0,139	0,095

manuels de 6ème 1951-1967

collection ou auteurs	Dubreil	Bréard	Maillard, Cahen	Monge Guinchan	Cluzel Nicolas	collection ou auteurs
éditeur	Vuibert	L'école	Hachette	Belin	Delagrave	éditeur
année	1961	1962?	1962	1963	1963	année
longueur	grandeur (non def.)	mesure puis nombre suivi d'une unité	mesure du segment	grandeur (non def.)	grandeur (non def.)	longueur
volume	grandeur	grandeur	mesure d'un solide	grandeur	grandeur (place occupée)	volume
termes employés	surface,aire	surface,aire	surface,aire	aire	surface, aire	termes employés
surface	non défini	non défini	non défini	non utilisé	portion de plan	surface
aire	nombre qui exprime la mesure	résultat de la mesu- re, nombre d'unités	mesure de la surface	nombre	nombre mesurant la grandeur de la surf.	aire
surfaces de formes différentes et de même aire	pas au début, traité plus tard	non	non	non	oui (assemblage de carrés)	surfaces de formes différentes et de même aire
addition des aires	non	non	non	non	non	addition des aires
unités de formes non carrées	non	non	non	non	non	unités de formes non carrées
unités	d'aire	de surface	d'aire	d'aire	d'aire	unités
m2	aire d'un carré dont le côté mesure 1m	surface d'un carré qui a pour côté 1m	aire d'un carré de 1m de côté	aire d'un carré de 1m de côté	aire d'un carré ayant un côté de longueur 1m	m2
justif. aire rectang. entiers décimaux	 oui changement d'unité	 oui non	 oui non	 oui non	 oui changement d'unité	justif. aire rectang. entiers décimaux
changement de base triangle, parallélog.	mentionné sans justification	non	non	oui sans justification	non	changement de base triangle, parallélog.
bords arrondis	oui	non	non	non	non	bords arrondis
encadrements	oui	non	non	non	non	encadrements
disque	formule donnée	analogie polygones réguliers	formule	formule donnée	analogie polygones réguliers	disque
nombre de pages	15/244	35/323	20/250	22/233	33/270	nombre de pages
rapport	0,061	0,108	0,080	0,094	0,122	rapport

manuels de 6ème 1951-1967

Queysanne Revuz	Huisman Itard	Brédif	Riche	Théron Cossart
Nathan	Wesmael Charlier	Hachette	Hatier	Bordas
1965	1965	1966	1967	1967
grandeur (non def.) mesure = nombre	mesure du segment	non utilisé	grandeur (non def.) mesure = nombre	grandeur (non def.)
grandeur		quantité d'espace occupée	qualité qui exprime étendue	portion d'espace, grandeur
portion de plan, aire	surface, aire	surface, aire	aire	surface, aire
non utilisé	portion de plan (à isométrie près)	ens. de points	non utilisé	portion de plan
grandeur	nombre qui mesure l'étendue de la surf	mesure de la surface i.e. nombre	"qualité" du polygone	grandeur
oui	oui : différence avec segments et angles	oui (réunion de carrés)	oui	oui
oui	non	signalé	non	oui
non mais sousentend qu'on pourrait	non	signalé possible, oui en exercices	non	non, mais carrés quelconques
d'aire	d'aire	surface-unité	d'aire	d'aire
aire d'un carré dont le côté mesure 1m	aire d'un carré dont le côté mesure 1m	pas défini segment-unité : m surface-unité : m2	aire d'un carré de 1m de côté	carré de 1m de côté
oui changement d'unité	oui changement d'unité	oui changement d'unité	oui non	oui non
en exercice	signalé	non	oui	oui
oui	oui (T.P.)	oui	non	non
oui	oui (T.P.)	oui	non	évoqué pour disque
formule donnée	analogie polygones réguliers	approx.polygones réguliers inscrits	limite de polygones réguliers inscrits	formule donnée
22/248	29/215	38/331	24/282	48/266
0,089	0,135	0,115	0,085	0,180

Manuels de 1969 à 1976

collection auteurs	Bréard	Vissio R. Polle, G.H. Clopeau	M. Monge, M. Guinchan J.P. Pelle, J. Monge G. Pelle	Queysanne Revuz Morlet	Riche Nonnotte, Favier	P. Dedron P. Le Breton
éditeur	L'école	Delagrave	Belin	Nathan	Hatier	Magnard
année	1969	1969	1969	1969	1969	1969
longueur	nombre	non utilisé	nombre	nombre	I N	nombre, mesure du segment
termes employés	surface, aire partie de plan	surface, aire	surface, aire	aire, partie de plan	C H	surface, aire
surface	non défini	partie du plan	non défini	non utilisé	A	non défini
aire	application ou nombre	expression "n u-C" mes. de la surf = nb	nombre puis nombre suivi d'une unité	nombre	N G	nombre qui exprime la mes. d'une surface
def. à partir des quadrillages	non	oui	oui	oui	E /	oui
surfaces de formes différentes et de même aire	non	oui, sur quadrillage en suivant les lignes puis hors lignes	non	oui	1 9 6	oui (assemblages de carreaux)
addition des aires	non	oui	oui	oui	7	non
unités non carrées	non	non	non	en T.D. (quad.à base losange)		non (carreau + unités légales)
unités	pas en maths	de surface	d'aire	d'aire		de mesure d'aire
m2	aire de la surface carrée qui a pour côté 1m	carré unité de côté 1u a une aire 1 u-C qu'on écrit u par abus de langage	unité d'aire = carré dont la longueur du côté est l'unité de longueur	aire d'un carré dont le côté mesure 1m		aire d'un carré de 1m de côté
justif. aire rect. entiers décimaux	non non	oui chang. unités + encad. dans le cas général	oui non	oui changement d'unité		oui changement d'unité
changement base	non	non	non	non		non
bords arrondis	non	oui, très peu	en exercices	en T.D.		oui
encadrements	évoqué	évoqué	en exercices	oui		oui
disque	formule donnée	non traité	formule	formule		analogie poly. reg.
nombre de pages	12/174	9/268	17/287	18/266	21/315	22/311

Manuels de 1969 à 1976

collection auteurs	Hamel, Cherrier, Content (Ecole Alsacienne)	Fiches Galion	Fiches Brédif	fiches lycée de Sèvres	fiches Touyarot et alii	Fiches Gueldry Berteaud, Berger
éditeur	Didier	OCDL (Hatier)	Hachette	Magnard	Nathan	Vuibert
année	1969	1968	1970	1970	1971	1971
longueur	nombre, mesure du segment	non utilisé m-mes AB =	non utilisé	non défini	non utilisé	non déf. mesure = nombre
termes employés	surface, aire	surface	surface	surface, aire	surface, aire	aire
surface	non défini	non défini	ens. de points	non défini	non défini	non utilisé
aire	nombre	non utilisé	non utilisé	nombre de carreaux		non défini mesure de l'aire
def. à partir des quadrillages	oui	oui (à maille rectangulaire	oui	oui	oui	oui (à maille rectangulaire)
surfaces de formes différentes et de même aire	mentionné	oui sur quadrillage	non	oui (surfaces équivalentes)	oui (surfaces équivalentes)	oui, sur quadrillage puis sans
addition des aires	oui	exercice	non	oui	non	non
unités non carrées	oui (assemblage de carreaux)	oui, triangles	non	non	oui	oui, rectangles
unités	de mesure d'aire	de mesure	de mesure de surf.	d'aire	de mesure	d'aire
m2	non défini	non défini on dit a-mes ou m2-mes	non défini	aire d'un carreau de 1m de côté	non défini	mesure de l'aire d'un carré de côté 1 (m)
justif. aire rect. entiers décimaux	 non non	formules données en exercice	 non non	 toutes les formules sont données à chercher en exercice	 toutes les formules sont données à chercher en exercice	 toutes les formules sont données à chercher en exercice
changement base	non		non			
bords arrondis	non	oui	oui	oui	oui	oui
encadrements	non	oui	oui	oui	oui	oui
disque		encadrements	transf. en parallélog.	non traité	non traité	evaluat. sur quad.
nombre de pages	7/136	4/90	12/172	9/127	8/192	7/100

Manuels de 1969 à 1976

collection auteurs	Vissio R. Polle G.H. Clopeau	Fiches Galion	M. Monge, M. Guinchan J.P. Pelle	Boursin Caparros Bitton	Boulier Bocage Andreu	Queysanne Revuz Morlet Rouquairol
éditeur	Delagrave	O.C.D.L.	Belin	Bordas	Hachette	Nathan
année	1973	1973	1974	1974	1974	1975
longueur	I N	I N	ambigu entre nombre et grandeur	nombre	ensemble de segments	nombre
termes employés	C H	C H	surface, aire	surface, aire	aire, domaine	aire, domaine
surface	A	A	partie du plan	non défini	non utilisé	non utilisé
aire	N G	N G	mesure=nombre	nombre	nombre décimal et application	nombre
def. à partir des quadrillages	E	E	oui	oui	oui	oui
surfaces de formes différentes et de même aire			oui	non	non	non
addition des aires			oui	non	oui	oui
unités non carrées			non	oui, triangle	oui, sur fiches quadr. à base tr.	en exercices
unités			d'aire	carreau	de mesure des aires	d'aire
m2			unité d'aire = un carré dont la longueur du côté est 1 unité de longueur	carré de 1m de côté	non défini : correspond au m	aire d'un carré dont le côté mesure 1m
justif. aire rect. entiers décimaux			 oui non	 oui oui	 non non	 oui non
changement base			non	signalé	non	en exercice
bords arrondis			non	non	oui	oui
encadrements			non	oui	oui	oui
disque			formule	quadrillage	formule	formule
nombre de pages	11/295		18/250	26/207	9/195	18/220

Manuels de 1977

collection ou auteurs	Queysanne Revuz Rouquairol	Galion	Renée Polle R.Polle, GH Clopeau J. Delobel	Monge	Mauguin P. Fauvergue J. Jeanmot,R. Rieu	IREM de Strasbourg
éditeur	Nathan	O.C.D.L.	Delagrave	Belin	Istra	Istra
longueur	nombre	grandeur, mesure du segment = nomb.	grandeur : classe d'équiv. de segments	nombre	classe d'équivalence de segments	nombre
termes employés	aire, portion de plan	surface, aire	surface, aire	surface, aire	surface, aire	surface, aire
surface	non utilisé	portion de plan	portion de plan	portion de plan	portion de plan	région du plan
aire	nombre	grandeur (même aire = surf. équiv.)	grandeur	nombre	grandeur	nombre
aire définie à partir du quadrillage	oui	oui	oui	oui	non (quad. après)	non
surfaces de formes différentes et de même aire	oui (sur quadrillage)	oui (via mesure)	non	oui (via mesure)	oui : découpage-recollement	oui à partir de carreaux
addition des aires	oui	non	non	oui	oui	oui
unités non carrées	oui (quadrillages à base parallélogr.)	oui (quadrillages à base triangle et unité triangle	non	non	non	non
unités	d'aire aire d'un carré dont le côté est une unité de longueur	d'aire aire d'un carré de 1m de côté	portion de plan carré ayant comme côté l'unité de longueur	d'aire carré dont la longueur du côté est une unité de longueur	d'aire m2: aire d'un carré dont la longueur du côté est 1m	non utilisé m2 non défini
justif. aire rect. entiers décimaux	oui chang. d'unité	question posée	à peine chang.unité évoqué	oui oui	oui oui	questions sur bidimensionalité
changem. de base	question posée	non	non		non, mais utilisé en exercices	utilisé en exercices
bords arrondis	non	non	oui	en exercices	non	oui
encadrements	non	non	oui, très peu	en exercices	non	oui
disque	formule+encadr. par 2R et 4 R	formule + compar. au carré (3/4)	formule	formule	formule	formule
notations particulières		cm-mes.[AB] cm -mes (A)	mesure : n aire : n u			
nombre de pages	17/123	10/125	6/175	18/190	22/213	6/128

Manuels de 1977

collection ou auteurs	Horizons mathématiques	Boutin Novelli	Louquet Louquet, Gandil Viani	Thirioux,Domain L et S Sanchez		M Gerll, Cohen, Gaillard
éditeur	La Capitelle	L'école	A. Colin	Magnard	Bordas	Hachette
longueur	grandeur physique propriété du segm.	nombre	ens. des segments superpos. à un seg.	ens. de segments	propriété commune à un ens. de segm.	nombre
termes employés	surface, aire	surface, aire	surface, aire domaine	surface, étendue superficie, aire	surface, aire	surface, aire
surface	ens. de points	non défini	non défini	ens. de points	non défini	domaine plan
aire	grandeur physique mesurable	nombre	nombre	nombre (superficie pour grandeur)	nombre	nombre
aire définie à partir du quadrillage	non (quadrillage ensuite)	non	oui	non (quadrillage ensuite)	oui	oui
surfaces de formes différentes et de même aire	oui, à partir de carreaux	oui, à partir de carreaux	non	non	non	non
addition des aires	oui	non	non	non	oui	oui
unités non carrées	non	non	non	en exercice	non	non
unités	d'aire m2: aire d'un carré de 1 m de côté	d'aire carré de 1m de côté	d'aire carré dont le côté a pour mesure l'unité de longueur	de superficie superficie d'un carré dont la mes. de la longueur d'un côté en m est 1	d'aire aire du carré dont le côté a pour mesure l'unité de longueur	d'aire aire d'un carré dont la longueur du côté est 1
justif. aire rect. entiers décimaux	validité annoncée	oui non	oui chang. d'unité	oui oui	oui oui, et on admet pour non décimaux	non non
changem. de base	non	non	non	oui	non	non
bords arrondis	oui	oui	oui	oui	en exercices	oui
encadrements	oui	oui	oui	oui	oui	oui
disque	formule	formule	formule	évaluation papier millim. + formule	évaluation papier millim. + formule	formule
notations particulières						
nombre de pages	10/153	9/127	9/155	27/269	18/127	13/154

Manuels de 1977

collection ou auteurs	Deledicq, Lassave	Durrande Peyronel, Prautoy	Jéomatri IREM de Grenoble
éditeur	Cédic	Tech. et Vulgaris.	Ophrys
longueur	propriété	nombre	grandeur (même longueur=superp.
termes employés		aire, domaine	surface, aire, mesure
surface	non défini	non utilisé	non def (ens de pts)
aire	propriété	nombre	grandeur (même aire=même mesure
aire définie à partir du quadrillage	non, quadrillage ensuite	non	non, quadrillage outil de mesure
surfaces de formes différentes et de même aire	non	non	oui, pavage + découpage-recollement
addition des aires	oui	oui	non
unités non carrées	non	non	oui, triangles, hexagones...
unités	de mesure non défini	d'aire aire d'un carré dont le côté a pour longueur 1m	d'aire, de mesure de surface non def explicitem.
justif. aire rect. entiers décimaux	oui non	oui oui	oui oui
changem. de base	non	non	non
bords arrondis	oui	non	oui
encadrements	oui	non	oui
disque	formule + encadr. sur papier millim.	formule	encadrements sur papier quadr.+form
notations particulières			
nombre de pages	11/188	11/160	21/185

Manuels 1981

collection ou auteurs	M. Claude, J.P. Ménardo Y. Bellecave	H. Bareil C. Zehren	Crépin, Millet, Cisterne, Jamin	A. Deledicq C. Lassave
éditeur	Nathan	Hachette	Bordas	Cédic
longueur	grandeur "naif"	grandeur "naif"	grandeur "naif"	grandeur "naif"
termes employés	surface, aire	surface, aire	surface, aire	surface, aire
surface	non déf. (ens. pts)	non déf. (ens. pts)	non déf. (ens. pts)	non déf. (ens. pts)
aire	grandeur "naïf"	grandeur "naïf"	grandeur "naïf"	grandeur "naïf"
aire définie à partir du quadrillage	oui	oui et aussi uni	oui et aussi uni	oui et aussi uni
surfaces de formes différentes et de même aire	oui avec découpage recollement	oui avec découpage recollement	oui avec découpage recollement	non explicité
addition des aires	oui	non	non	oui
unités non carrées	non	oui, triangles, nombreux pavages du plan	oui, triangles, losanges	non sauf pour exprimer des fractions
unités	d'aire aire d'un carré dont la longueur du côté a pour mesure 1	d'aire aire du carré de 1m de côté	d'aire aire d'un carré dont chaque côté mesure l, l'unité de longueur	d'aire non défini
justif. aire rect. entiers décimaux	exercice sur papier millimétré	bidimensionalité : aires et échelles	non	non
changem. de base	non	oui	non	non
bords arrondis		oui	non	oui
encadrements		oui	oui	oui
disque	formule	encad. polygones pap.millim. formule découp. recollement	encadrement sur quadrillage formule	formule
nombre de pages	13/238	37/255	10/176	12/223

Manuels de 1986

collection ou auteurs	C. Fibu V. Jullien B. Ravel	P. Louquet P. Aguilar, P. Louquet, L. Moulia	Pythagore G. Bonnefond D. Daviaud	A. Benoit, D. Guy F. Gutmacher A. Hugon	Jéomatri IREM de Grenoble	P. Boulanger, I. Marmande H. This R. Szajnfeld
éditeur	Magnard	A. Colin	Hatier	Didier	Ophrys	Belin
longueur	non traité	même longueur = superposables	non défini	non défini	même longueur = superposables	même longueur = superposables
termes employés	surface, aire	surface, aire	surface, aire	aire	surface, aire	surface, aire
surface	partie de plan	partie de plan	non défini	partie du plan	non défini	partie du plan
aire	nombre de carrés unité	mes. de l'aire = 5 aire = 5u	non défini	mesure	même aire = même mes avec même un.	nombre
aire définie à partir du quadrillage	oui	oui	oui	oui	oui, pavages carrés triangles, hexag.	non
surfaces de formes différentes et de même aire	oui, découpage-recollement et mesure	oui sur quadrillage	oui sur quadrillage sans suivre les car reaux, déc. recoll.	en exercice	oui, par mesure sur quadrillage et découp. recollem.	oui, découpage recollement
addition des aires	non	oui	non		non	oui
unités non carrées	non	non	oui, assemblage de carrés	non, légales seules	oui, triangles, hexagones	oui, assemblage de carrés
unités	d'aire m2 : aire d'un carré de 1m de côté	d'aire m2 : aire d'un carré dont un côté a pourlongueur 1m	d'aire m2 non défini	d'aire m2 : unité d'aire associée au m	d'aire, de mesure de surface ; m2 correspond au m	d'aire, aire d'un carré dont la longueur du côté est l'unité de longueur
justif. aire rect. entiers décimaux	non	oui oui	non	oui non	oui admis explicitem.	oui admis explicitem.
changem. de base	non	tr. et parallélog. non traités	tr. et parallélog. non traités	non	tr. et parallélog. non traités	tr. et parallélog. non traités
bords arrondis	oui	en exercices	non	en exercices	non	oui
encadrements	oui	en exercices	non	en exercices	non	oui
disque	formule	non traité	non traité	non traité	non traité	non traité
nombre de pages	21	12	13	7	13	15
nombre total	347	235	123	219	218	255
rapport	0,061	0,051	0,106	0,032	0,060	0,059

Manuels de 1986

collection ou auteurs	Evariste	S. Puts-Lajus A. Deledicq	H. Bareil C. Zehren
éditeur	Delagrave	Nathan	Hachette
longueur	longueur = 7u, mes. de la long. = 7	non défini	non défini
termes employés	surface, aire	surface, aire	surface, aire
surface	non défini	non défini	non défini
aire	mes. de la surf= 9 aire de la surf= 9u	mesure de surface	non défini grandeur
aire définie à partir du quadrillage	oui	non	non, quadrillage ensuite
surfaces de formes différentes et de même aire	oui	non	oui, découpage recollement
addition des aires	non	non	non
unités non carrées	oui, assemblage de carreaux	non	en exercice
unités	d'aire m2 non défini	unité m2 non défini	d'aire à rappeler en exercice
justif. aire rect. entiers décimaux	oui admis explicitem.	non	oui non
changem. de base	tr. et parallélog. non traités	non	tr. et parallélog. non traités
bords arrondis	non	non	oui
encadrements	non	non	oui
disque	non traité	non traité	non traité
nombre de pages	6	8	16
nombre total	186	165	249
rapport	0,032	0,048	0,064

CHAPITRE 2

REALISATION D'UN PROCESSUS D'APPRENTISSAGE DU CONCEPT DE SURFACE PLANE AU COURS MOYEN[1]

1. Problématique et méthodologie[2]

Nous avons vu dans le premier chapitre diverses approches possibles, d'un point de vue mathématique, de la mesure des aires de surfaces planes, ainsi que les différentes manières dont cette notion est ou a été abordée dans l'enseignement au niveau qui nous occupe.

En ce qui nous concerne, dans toute la suite, nous utiliserons les termes "surface" pour désigner une partie du plan, "aire" pour désigner la grandeur physique, qualité ou propriété de la surface et "mesure" pour le nombre associé quand on a fait choix d'une surface unité.

Notre objectif est d'élaborer un processus d'apprentissage visant à construire la notion d'aire comme moyen de rendre compte de la place occupée par une surface dans le plan.

D'un point de vue mathématique, nous visons à définir une application mesure F d'un certain ensemble $\mathcal{S}$ de surfaces planes à valeurs dans $\mathbf{R}^+$. Nous ne chercherons pas à caractériser les surfaces qui sont dans l'ensemble $\mathcal{S}$. L'important est pour nous qu'il contienne toutes les surfaces qu'on sera amené à mesurer à l'école élémentaire et au collège. On peut dire que l'ensemble $\mathcal{S}$ est contenu dans l'ensemble des parties de $\mathbf{R}^2$ intégrables au sens de l'intégrale de Riemann et qu'il contient toutes les parties compactes de $\mathbf{R}^2$ à bord $\mathcal{C}_1$ par morceaux.

L'application F de $\mathcal{S}$ dans $\mathbf{R}^+$ devra vérifier les propriétés suivantes :

- si S_1 et S_2 sont des surfaces "quasidisjointes" (i.e. qui n'ont en commun que des points du bord), alors $F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) + F(S_2)$
- si $S \in \mathcal{S}$ et S d'intérieur non vide, alors $F(S) > 0$
- pour toute isométrie g de $\mathbf{R}^2$, et toute surface $S \in \mathcal{S}$, $F(g(S))=F(S)$

F peut être définie par le choix d'une unité. Si l'on change d'unité, les nombres changent mais les nouvelles mesures sont proportionnelles aux anciennes. Cependant, contrairement à ce qui se passe pour les segments, deux surfaces connexes auxquelles on associe le même nombre ne sont pas nécessairement superposables.

Nous commencerons dans ce chapitre par donner un aperçu des travaux existants sur la notion d'aire et des difficultés généralement observées chez les élèves avant de formuler nos hypothèses didactiques et les choix que nous avons faits pour la réalisation des séquences en classe.

1.1 Les travaux antérieurs

Piaget a étudié la construction de la notion d'aire, même si ce n'est pas le vocabulaire qu'il emploie dans "La géométrie spontanée de l'enfant". Les élèves de l'âge qui nous intéresse (entre 9 et 12 ans) sont en principe au stade IIIB décrit par Piaget : la conservation de l'aire par déplacement d'une surface ou par découpage et recomposition des morceaux sans chevauchement est acquise. Tout semble en place pour la construction par les enfants des mesures de surfaces. Cependant, selon Piaget, si la mesure des longueurs suit bien les conservations, il n'en est pas de même pour les surfaces et les volumes. L'enfant de cet âge peut reporter une surface unité pour faire des mesures, mais il ne comprend pas le calcul à partir des mesures de longueur ; il faut, pour cela, attendre le stade IV des opérations formelles. *"On observe au contraire, durant tout le sous-stade IIIB, un dualisme très frappant qui oppose les progrès de la construction euclidienne dans le domaine de la mesure linéaire aux résidus topologiques irréductibles sur le terrain des surfaces et des volumes."* (Piaget et al. 1948, p. 480).

---

[1] Ce chapitre et les suivants résultent d'une recherche menée en collaboration avec R. Douady et qui a donné lieu à plusieurs publications, principalement :
- un cahier de didactique des mathématiques de l'IREM de Paris 7 (n°37)
- un article dans Educational Studies in Mathematics n°20 de décembre 1989
- deux articles dans Petit x n° 6 et n° 8.

On y trouvera donc des éléments communs avec ces articles que nous signalerons le moment venu, surtout dans les parties théoriques, mais les observations et les analyses relatées ici ne concernent que la classe de CM2 que nous avons observée nous-même.

[2] Ce paragraphe reprend pour l'essentiel une partie du cahier 37 et de l'article de Educational Studies.

Pour les enfants plus jeunes, Piaget explique le décalage observé pour les conservations *"dans le cas de la surface, il intervient une circonstance particulière qui ne joue qu'un rôle restreint dans la conservation d'une quantité de poids, par exemple, ou a fortiori d'un ensemble logique ou numérique : c'est qu'un arrangement différent des parties, tout en maintenant leur somme constante, engendre une autre surface qualitative (quoique de valeur quantitative égale). ... En outre, en modifiant la forme d'une surface, on augmente ou diminue la longueur de la ligne frontière, ce qui joue un rôle du point de vue des intuitions topologiques dont part toujours l'enfant."* (Piaget et al. 1948, p.337-338).

Nos observations montrent que les compétences des élèves ne sont pas aussi nettement rattachées aux stades. Nous verrons par exemple que les difficultés caractéristiques de élèves plus jeunes (stade II) subsistent longtemps, en particulier dans la catégorie d'âge qui nous intéresse, dans des situations un peu plus complexes et que, par contre les élèves de 10 ans sont capables de calculer des aires à partir des mesures de longueur dans des situations assez simples.

Vinh Bang et Lunzer (1965) ont abordé le point de vue de la variation de l'aire dans la déformation d'une surface. Au cours de notre travail, nous trouverons des résultats qui rappellent ceux qu'ils ont obtenus au cours de l'expérience suivante :
un fil de longueur fixe est tendu entre les trois points A, B, M. A et B sont fixes, M varie d'une position centrale M_0 à une position limite L.
Les enfants ne perçoivent pas la variation de l'aire comme continue : ils pensent que l'aire reste constante dans toute une zone autour de la position centrale, qu'elle diminue seulement quand on s'approche de la position limite L (figure ci-contre).

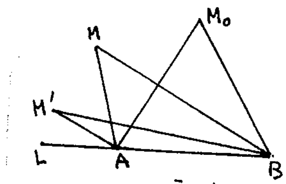


Fig 4

Dans ses recherches sur l'acquisition des mesures spatiales, J. Rogalski (1983) s'est intéressée à l'acquisition par les élèves de la "bidimensionalité" de l'aire (si les longueurs sont multipliées par k, l'aire est multipliée par k^2) et a montré à cette occasion que le pavage de surfaces par des pavés de forme non carrée n'est pas toujours disponible chez les élèves de 10 à 12 ans. Son travail était en cours de publication au moment où notre recherche s'effectuait et elle nous a procuré, ce dont nous la remercions vivement, quelques-unes de ses épreuves qui nous ont servi à l'évaluation de nos élèves (voir chapitre 3).

1.2 Quelques difficultés et erreurs observées chez les élèves

Un certain nombre de difficultés concernant les aires sont bien connues des instituteurs et des professeurs. Certaines ont été étudiées dans des travaux de didactique contemporains de cette étude.

* La surface unité étant une surface avec une certaine forme, la mesure d'une surface S est tributaire de la possibilité de paver effectivement S avec cette forme. Ainsi des élèves rencontrent des difficultés pour exprimer l'aire d'un triangle en cm^2 puisqu'on ne peut pas le paver avec des carrés. Inversement, ils n'imaginent pas le pavage avec autre chose que des carrés. (cf J. Rogalski 1983)

* L'aire est attachée à la surface et ne se dissocie pas d'autres caractéristiques de cette surface, surtout le périmètre :

- les élèves confondent les formules de calcul d'aire et de périmètre
- si le périmètre d'une surface augmente, son aire aussi (et réciproquement) Cette difficulté a également été observée par N. Balacheff (voir sa thèse)
- si deux surfaces ont le même périmètre, elles ont la même aire (et réciproquement).

* Les élèves étendent des formules à des situations où elles ne sont pas valables : par exemple produit des "dimensions" pour un parallélogramme ou des "trois dimensions" d'un triangle. Cette erreur est particulièrement tenace dans le cas du parallélogramme et on la voit réapparaître dans toutes les classes de l'enseignement secondaire, et aussi chez les élèves instituteurs.

* Si on multiplie les dimensions d'une surface par un nombre k, l'aire est aussi multipliée par k (voir le travail de J. Rogalski (1983)).

1.3. Nos hypothèses didactiques

Il nous semble qu'un certain nombre de difficultés sont liées au traitement par les élèves des problèmes d'aire, soit du point de vue des surfaces, soit du point de vue des nombres.

Par exemple, une diminution de l'aire est comprise comme une diminution de la surface avec sa forme et va de pair avec une diminution du périmètre. L'aire et le périmètre sont alors amalgamés à la surface et liés à sa forme : on agrandit ou diminue la surface en conservant sa forme ; le périmètre c'est le contour, l'aire c'est l'intérieur.

A l'autre extrême, l'aire est un nombre : on est sur le plan du calcul et on ne relève que des éléments pertinents pour le calcul, par exemple des mesures de longueur qui paraissent caractéristiques de la surface considérée et qu'on combine dans des formules plus ou moins fondées, par exemple ajouter les mesures de deux côtés d'un triangle et multiplier par la troisième pour calculer l'aire du triangle en faisant le produit de deux longueurs.

Ainsi, au sujet de l'aire, les élèves nous semblent développer une "conception forme" liée au cadre géométrique ou une "conception nombre" liée au cadre numérique, ou les deux, mais de façon indépendante l'une de l'autre, et traiter les problèmes sans établir de relation entre les deux points de vue. Or les problèmes d'aire mettent de façon essentielle en relation les cadres numérique et géométrique. Le concept d'aire en tant que grandeur constitue à notre avis un relais entre les surfaces et les nombres. Ceci nous amène à faire notre première hypothèse didactique :

(1) Le développement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur permet aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les deux cadres (géométrique et numérique)

L'analyse que nous faisons nous amène ainsi à distinguer 3 pôles : le pôle géométrique avec les surfaces considérées comme parties du plan, le pôle grandeur avec les aires et le pôle numérique avec les mesures.

Par ailleurs, notamment si on prend comme unité l'aire d'un carré, on pourra, pour certaines surfaces, éviter de dénombrer les unités une à une : il suffira en effet, pour trouver le résultat du pavage, de calculer sur les mesures de longueur. On aura donc besoin, pour construire F, d'établir des relations entre les mesures de longueur et les mesures d'aire.

Or la mesure permet d'identifier toutes les grandeurs (y compris longueurs et aires) à $\mathbf{R}^+$, ce qui est précieux du point de vue de la modélisation mathématique : une fois les unités bien choisies, on calcule sur des nombres. Toutefois une identification trop précoce nous semble favoriser l'amalgame des différentes grandeurs alors que l'objectif à cet âge est plutôt de les différencier, et c'est sur quoi porte notre deuxième hypothèse.

(2) Une identification trop précoce entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs (ici longueurs et aires)

Nous voulons éviter les confusions entre longueurs et aires, en particulier entre périmètre et aire, qui sont une des difficultés des élèves dans l'acquisition des mesures spatiales. Pour cela il nous paraît important de développer des situations d'apprentissage dans lesquelles jouent de façon significative, pour les unes les différences entre longueurs et aires, pour les autres les relations que ces grandeurs entretiennent. C'est pourquoi, dans notre ingénierie didactique, nous choisirons de dissocier les grandeurs (longueurs et aires) d'une part des objets (segments, surfaces), d'autre part des nombres, avant d'aborder la mesure en fonction d'une unité choisie et les relations entre mesures de ces grandeurs.

1.4. Nos choix didactiques

Nous avons élaboré un processus d'apprentissage s'appuyant sur le modèle didactique explicité par R. Douady dans sa thèse sous le nom de "dialectique outil-objet et jeux de cadres" (R.Douady 1984) .

Pour choisir les problèmes nécessaires à la réalisation des séquences, nous nous sommes appuyées sur les hypothèses formulées plus haut concernant le contenu.

L'objectif final de l'enseignement que nous cherchons à mettre sur pied est de fournir aux élèves un moyen d'associer un nombre au maximum de surfaces (en particulier tous les polygones et les disques) de façon à pouvoir faire des comparaisons et des calculs. Cependant, pour définir une application mesure entre surfaces et nombres avec suffisamment de sens pour les élèves, les diverses présentations de l'aire et les différentes manières d'aborder la construction d'une application mesure $F : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{R}^{+}$ ne sont pas équivalentes au regard de nos hypothèses.

Pour un choix fixe d'une surface unité A, par exemple un carré, il est facile d'associer un nombre à toute une catégorie de surfaces : celles qui sont pavables avec un nombre fini de copies de A. Le problème est d'enrichir l'ensemble des surfaces mesurables avec l'unité A. Par exemple quel nombre associer à un triangle ou à un disque ? Avec les enfants, le choix se fait essentiellement entre deux approches : le découpage-recollement ou les encadrements sur quadrillage.

Pour une surface donnée S, deux cas se présentent :

1) on peut découper S, ou un certain nombre d'exemplaires de S, en un nombre fini k de pièces et recoller ces pièces sans chevauchement de manière à obtenir une surface S' pavable avec A.

Alors F(S) = F(S'), ou k F(S) = F(S') selon le cas. On s'appuie sur l'additivité et l'invariance par déplacement.

2) on ne peut pas utiliser le procédure (1) et le seul moyen est alors d'encadrer S par des surfaces pavables avec A ou des subdivisions de A et qui approximent S de mieux en mieux par l'intérieur et par l'extérieur.

Pour aborder la construction de l'application mesure, on peut soit utiliser les deux procédures soit n'utiliser que la deuxième. En effet, par la première procédure il est impossible d'atteindre toutes les surfaces de $\mathcal{S}$. La deuxième méthode est suffisante pour atteindre n'importe quelle surface de $\mathcal{S}$ et elle ne nécessite pas d'utilisation d'autre surface unité que des carrés. Cependant, nous pensons que la seule considération du deuxième point de vue, même en lui ajoutant l'invariance par déplacement, comme il était privilégié dans les années 70, ne permet pas à l'élève d'échapper à la prégnance de la forme des pièces et peut expliquer certaines des difficultés rencontrées. Pour réaliser notre ingénierie, nous traduisons notre première hypothèse sous la forme :

(1') l'utilisation du découpage-recollement permet l'élaboration du concept d'aire, étape-relais entre les surfaces et les nombres dans la construction de F.

L'analyse précédente nous amène ainsi à distinguer dans l'apprentissage des objectifs intermédiaires que nous regroupons en 3 points :

a) construire la notion d'aire comme grandeur autonome

- en comparant directement des surfaces par inclusion (éventuellement après déplacement), ou indirectement par découpage-recollement, c'est-à-dire en découpant l'une des surfaces S en un nombre fini de morceaux qu'on recolle sans chevauchement pour obtenir une nouvelle surface S' qu'on substitue à S pour la comparaison,
- en attribuant à certaines surfaces des mesures déduites directement du pavage à l'aide de pavés de formes variées.

Cela nous amène à :

- dégager l'aire de la forme en différenciant aire et surface : deux surfaces de formes différentes peuvent avoir des aires égales.
- distinguer l'aire du nombre tout en contrôlant la correspondance surfaces ---> nombres : à une même surface peuvent correspondre des nombres différents suivant l'unité choisie, mais l'aire, elle, ne change pas.

b) étendre l'application mesure à des surfaces qui ne sont pas pavables avec le pavé unité A.

- par découpage et recollement de la surface donnée ou du pavé unité
- par encadrements à l'aide de quadrillages.

c) pointer les différences et établir des relations entre aires et longueurs

Pour cela, on s'intéresse à diverses transformations : les unes sont choisies pour pointer qu'aires et longueurs peuvent varier indépendamment l'une de l'autre, et même en sens inverse (aire et périmètre par exemple) ; les autres pour établir des relations entre aires et longueurs : calcul d'aires des surfaces usuelles, bidimensionnalité. Ce faisant, on travaille à différencier aire et longueur en même temps qu'aire et surface.

1.5. Méthodologie

Nous avons contruit des séquences didactiques correspondant aux choix ci-dessus et nous avons observé leur déroulement dans deux classes : un CM1 (9-10 ans) et un CM2 (10-11 ans). Les CM2 n'avaient, à notre connaissance, pas abordé la notion d'aire en CM1.

Nous rendons compte du déroulement et de l'observation des élèves dans la classe de CM2 que nous avons suivie, en prenant des notes et en enregistrant au magnétophone les phases collectives pour la plupart des séances. Chaque séance de travail durait environ 1 heure 1/4. R. Douady a travaillé avec le CM1.

Les élèves des deux classes ont ensuite été interrogés en entretien par deux, pour le CM2 entre le 20 et le 31 mai 1983, deux mois après l'apprentissage.

Ils ont également répondu en juin 1983 à des épreuves écrites empruntées à J. Rogalski (1983).

Ces deux contrôles nous permettent de repérer les acquis et les difficultés qui subsistent à l'issue de cet apprentissage. Cela nous amène à faire un retour sur l'ingéniérie didactique, à formuler une nouvelle hypothèse didactique et à proposer une modification du processus.

2. Séquences réalisées en CM2

2.1. approche géométrique (3 séances)

2.1.1. description des situations

La tâche de base consiste en découpages et recollements à partir de rectangles. L'objectif de ces séquences est de dégager la notion d'aire comme invariant de la surface dans un découpage et recollement convenable.

Première séance (10-01-83).[3]

On distribue des rectangles de carton aux élèves : un même rectangle pour les 4 membres d'une équipe, des rectangles différents pour deux équipes différentes. Chaque équipe dispose de deux rectangles supplémentaires : l'un d'eux ne sera pas découpé et servira de rectangle témoin, l'autre sera découpé mais on ne collera pas les morceaux, de façon à pouvoir reconstituer le rectangle si besoin est. Les rectangles ont été choisis de façon que la comparaison directe par inclusion soit possible d'une équipe à l'autre.

Consigne : Découper les rectangles et recoller les morceaux sans en perdre et sans les faire chevaucher de façon que les quatre membres de l'équipe aient des surfaces de formes différentes. Comparer les surfaces obtenues dans l'équipe du point de vue de la place occupée.

Analyse de la tâche : pour répondre correctement à la question, les élèves doivent mettre en œuvre implicitement les deux principes suivants qu'il s'agit d'expliciter :

- chaque surface a la même aire (occupe autant de place) que le rectangle témoin puisqu'elle a été obtenue par découpage de ce rectangle et recollage des morceaux sans perte ni chevauchement.

- dans une même équipe, les différentes surfaces ont la même aire puisqu'elles ont la même aire que le rectangle témoin.

On peut attendre que certains élèves se réfèrent à la perception.

Deuxième séance (14-01-83) :

Reprise de la consigne de la première séance en demandant aux élèves de ne pas faire plus de 8 morceaux et de couper droit (au cours de la première séance certains élèves ont fait des découpages si compliqués qu'ils ont eu du mal à recoller les morceaux : ils y avaient peut-être été incités par l'utilisation du mot "puzzle" par le maître lors de l'explication de la consigne). On demande cette fois de décalquer les assemblages obtenus sur une feuille blanche, de hachurer les surfaces décalquées et de comparer les nouvelles surfaces au sein de chaque équipe.

On demande de décalquer pour que la nouvelle surface soit bien perçue comme une surface et que l'utilisation de l'invariance par découpage et recollement se combine avec celle de la transitivité.

Troisième séance (24-01-83) :

Bilan des séances précédentes pour la maîtresse qui était absente. Introduction du mot aire. Comparaison des aires des surfaces construites lors de la deuxième séance, en réunissant celles de deux équipes (une équipe doit demander à l'autre ce qui lui manque pour la comparaison), au niveau de la classe.

2.1.2. comportement des élèves

Au cours de la première séance, certains enfants ont une conception de la place occupée par une surface liée à sa forme et se référant plutôt à l'encombrement ou à la situation de la surface dans la feuille de papier ou même à la manière dont elle a été obtenue : pour comparer la place occupée par des surfaces obtenues par découpage et recollement sans perte ni chevauchement de rectangles superposables, des élèves ne peuvent accepter qu'une surface encombrante (figure 5a) puisse ne pas occuper plus de place qu'une autre plus "compacte" (figure 5b)

---

[3] La maîtresse étant absente, les deux premières séances ont été réalisées par le directeur de l'école avec qui nous avions travaillé pendant plusieurs années quand il était chargé de classe. Nous le remercions de sa collaboration.

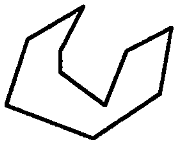


Fig 5a

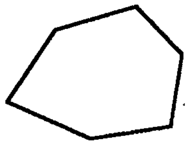


Fig 5b

D'autres élèves affirment que plus le bord est long, plus la surface est grande, d'autres veulent mesurer les distances des surfaces au bord de la feuille et d'autres ajouter les périmètres de tous les morceaux.

Mais ces difficultés ne résistent pas : des élèves sont convaincus dès qu'on parle du morceau de feuille caché par le collage, de quantité de carton utilisée ou quand on fait référence à l'usage d'une balance : les élèves pensent que la quantité de papier est la même et que les deux plateaux d'une balance seraient en équilibre si on plaçait sur chacun d'eux une des surfaces de l'équipe.

Lors de la deuxième séance, les difficultés proviennent du fait que certaines des surfaces réalisées par collage comportaient des trous et que des élèves ont hachuré la partie qui correspondait aux trous. Cela amène à préciser ce qu'est la surface. Le mot aire est introduit par le maître : on dit que les surfaces des élèves d'une même équipe ont la même aire parce qu'on a recouvert la même quantité de papier.

A la troisième séance, les élèves recourent tous à la comparaison des rectangles pour comparer toutes les surfaces de la classe du point de vue de l'aire. Le problème est plutôt de s'entendre sur ce que l'on veut comparer. L'introduction du mot aire dans un premier travail sur papier quadrillé aurait peut-être évité cette ambiguïté au départ. Dans la classe de CM1, on avait commencé par une séance destinée à approchée la notion d'aire à partir de la masse (voir brochure 48 de l'IREM de Paris 7). Les variables avaient été choisies de façon à différencier les deux grandeurs : des surfaces pouvaient avoir la même aire et non la même masse, la comparaison des masses pouvait répondre à certaines comparaisons d'aires mais pas à toutes. Cette séquence n'a pas été réalisée au CM2 pour gagner du temps : il nous semblait que l'évocation de la pesée pourrait suffire, c'est d'ailleurs ce qui s'est produit au cours du bilan.

2.2 différenciation aire et périmètre (1 séance : 31.01.83)

2.2.1. description de la situation

Objectif : des aires égales n'entraînent pas des périmètres égaux.

Consigne : Commander par écrit de la ficelle pour border les surfaces fabriquées précédemment, réaliser le collage de cette ficelle au bord de la surface et comparer la longueur de fil nécessaire pour toutes les surfaces de l'équipe.

2.2.2. observations

Les élèves ont tous mesuré le périmètre de la surface, opération d'autant plus délicate que certains périmètres sont assez découpés. La plupart des élèves mesurent les côtés et font une addition ; certains font l'addition directement sur la règle qu'ils font tourner sur le bord de la surface en repartant de l'endroit où ils étaient arrivés précédemment.

Le bilan permet de distinguer plusieurs causes d'erreur dans la détermination de la longueur de la ficelle :
- *mesures trop peu précises* : dans ce cas, l'erreur sur la longueur de ficelle n'est pas trop grande ; une discussion s'engage sur l'erreur qu'on peut admettre (1 ou 2 centimètres)
- *erreur de calcul* en faisant l'addition
- *erreur de méthode* : côtés oubliés ou comptés deux fois

Dans ces derniers cas, l'erreur sur la longueur de la ficelle peut être beaucoup plus importante.

Le bilan permet aussi de pointer que deux surfaces de même aire peuvent avoir des périmètres différents : les surfaces fabriquées par les élèves d'une même équipe ont la même aire et des périmètres différents, celles qui ont un bord plus découpé ont un périmètre plus grand ; il ne sert donc à rien de comparer les périmètres de surfaces si on veut comparer les aires.

On compare les périmètres de toutes les surfaces obtenues dans la classe ; on n'a pas le même classement que pour les aires.

2.3. pavages, mesures et comparaisons d'aires (7 séances)

2.3.1. choix de la situation : analyse a priori

Il s'agit au cours de ces séances de paver des surfaces à l'aide de pavés variés (rectangles, carré, triangles rectangles), puis de comparer les aires des surfaces en ne disposant plus des surfaces elles-mêmes mais seulement des résultats du pavage et des pavés afin de dégager la notion de mesure d'une surface ou d'une aire à l'aide d'une unité, que le pavage soit réalisable ou non.

Les pavés ont été choisis de façon qu'il y ait des relations numériques entre eux faciles dans certains cas (rapports 2 ou 4), difficiles dans d'autres cas (rapports fractionnaires : 3/2, 3/4). Les surfaces sont pavables par au moins un des pavés, ce qui donne des comparaisons faciles entre certaines surfaces, difficiles entre d'autres et amène la nécessité de rechercher une unité commune ou de trouver au moins une des relations difficiles. Une surface non pavable avec une seule des unités fournies est introduite ensuite. Il faut utiliser la mesure et les relations entre unités pour comparer son aire à celle des autres surfaces.

Surfaces proposées :

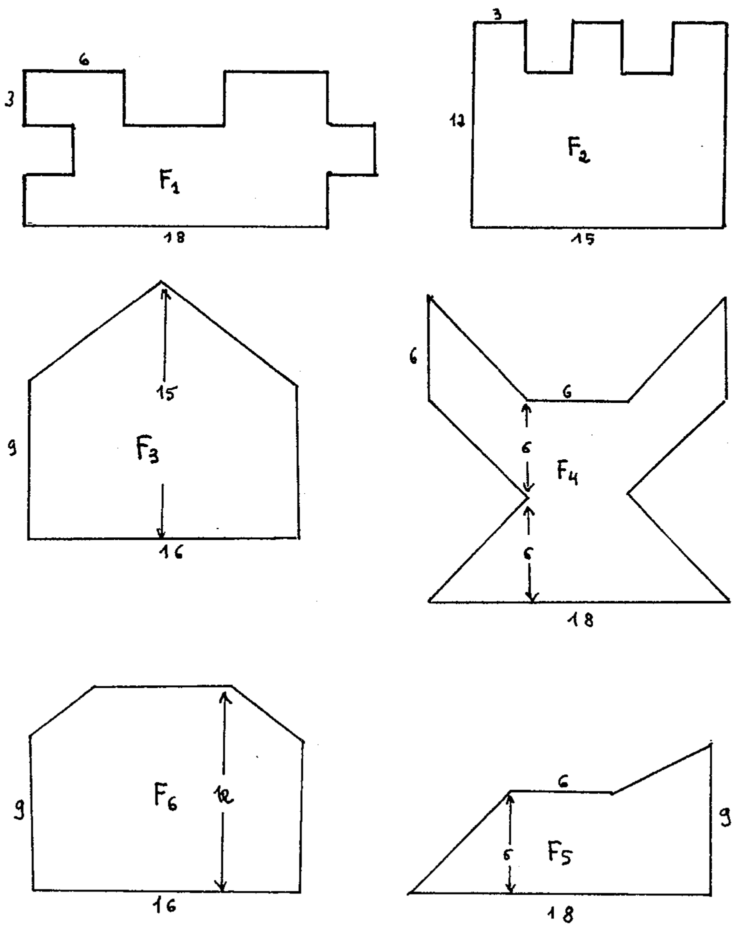


Fig. 6a

Pavés utilisés :

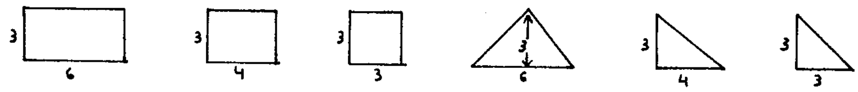


Fig. 6b.

rectangle bleu (rb) rectangle rouge (rr) carré marron (cm) triangle orange (to) triangle vert (tv) triangle rose (tr)

Les surfaces S_1, S_2, S_3 et S_4 ont été choisies de façon à être pavables exactement par au moins un des carrelages proposés. S_6 a été ajoutée à la liste avec les mêmes contraintes pour faciliter le pavage de S_3.

S_1 peut être pavée avec rb, cm, to, tr et on a A_1 = 8 rb = 16 cm = 16 to = 32 tr (= 144cm²).

S_2 peut être pavée avec rr et tv et on a A_2 = 13 rr = 26 tv (= 156 cm²) .

S_3 peut être pavée avec tv et on a A_3 = 32 tv (= 192 cm²).

S_4 peut être pavée avec to et tr et on a $A_4 = 20$ to $= 40$ tr ($= 180$ cm^2).

S_6 peut être pavée avec tv et on a $A_6 = 30$ tv ($= 180$ cm^2).

Donc $A_6 = A_4$ mais il est impossible de s'en apercevoir avec les pavages.

On a $A_1 < A_2 < A_4 = A_6 < A_3$.

Si on empêche la comparaison directe et le découpage recollement, on ne peut obtenir ce classement qu'après avoir fait choix d'une unité commune pour mesurer toutes les surfaces.

Si l'unité commune est une des unités proposées, il faut exprimer les autres unités à l'aide de celle-là, ce qui oblige à trouver des rapports fractionnaires.

Il suffit que l'unité commune choisie permette de paver les rectangles unité pour que toutes les aires s'obtiennent facilement à partir de celle-là par substitution. On peut par exemple choisir le carré de côté 1 cm ou le rectangle de dimensions 1 cm et 3 cm.

2.3.2. déroulement

***Première séance** (17-02-83) :*

Pavage des surfaces S_1, S_2, S_3 et S_4 à l'aide des six pavés fournis. On écrit sur la feuille le résultat du pavage avec le plus de pavés possibles. Les élèves sont par équipe de 4 : ils disposent d'une collection de surfaces qu'ils se répartissent et de deux collections de pavés.

Les surfaces S_1, S_2 sont pavées facilement ; on distribue S_3 ou S_4 aux élèves qui ont terminé ; les élèves qui s'occupent de S_3 et S_4 ont souvent des difficultés : ils n'utilisent pas la symétrie et essaient de faire entrer un triangle dans la pointe de la "petite maison". On voit des dispositions de ce type :

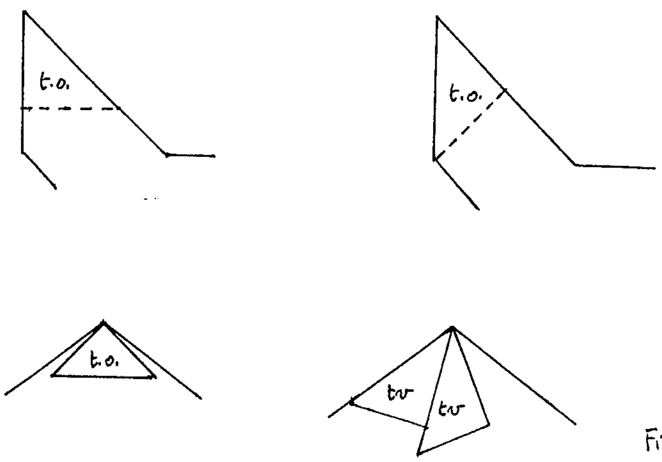


Fig. 7

Dès cette première séance, les élèves recherchent et explicitent des relations entre carrelages différents, ce qui leur permet de déduire un nouveau pavage d'un pavage déjà effectué.

***Deuxième séance** (24-02-83) :*

Bilan de la séance précédente. Récapitulation des résultats du pavage. Les élèves désignent les pavés par leur forme et leur couleur par exemple rectangle rouge ou triangle vert et écrivent les initiales rr ou tv.

La discussion amène la distinction entre le pavage et la mesure : Nous transcrivons ci-dessous un extrait de l'enregistrement (la maîtresse est désignée par M, l'élève interrogé par ses initiales, les autres élèves par E, l'observateur par O)

St.P on a trouvé que un rectangle rouge c'est égal à 2 triangles verts.
M. Tu commences par les rapports que vous avez pu trouver entre certains carrelages. Tu as procédé comment pour arriver là ?...
St.P on a fait le pavage dans les formes ... (inaudible) la maison...
M. la maison, c'était la forme numéro...
StP 3 .
M. 3. Bien. Tu me dis que tu as utilisé quel pavage ?
StP le triangle vert
M ce triangle vert, donc, tu l'as utilisé combien de fois ?
StP 32 fois
M 32 fois ; est-ce que pour cette même forme, vous avez utilisé un autre pavage ?
StP oui ... on a utilisé le rectangle rouge, mais on a trouvé ... ... 14 fois seulement
Protestations
M Est-ce que tout le monde est d'accord avec ceci ?
MG Non parce que le rectangle on peut pas le placer... (inaudible) ...

M On en est donc là. Vous avez bien tous sous les yeux la forme de la maison, c'est-à-dire la figure 3. Bien, alors, on me dit que ...on a utilisé le triangle vert et qu'on l'a reporté 32 fois. Première chose : est-ce que toutes les équipes sont arrivées à ça ?
E oui
M Bon, c'est déjà une information. Deuxième chose, on me dit donc là qu'on avait utilisé le rectangle rouge et qu'on n'a pu le reporter que 14 fois. Est-ce que je vais avoir le droit d'écrire que l'aire de la figure 3 est égale à 14 rectangles rouges ?
MS On peut le faire 14 fois mais des fois il faut la moitié du rectangle rouge
M Est-ce que 14 fois c'est le nombre de rectangles rouges que tu as utilisés pour paver entièrement ta forme ?
StP Non
Silence
M Tu dis qu'on ne peut pas paver directement le rectangle rouge sur la figure S3
MS On fait la moitié du rectangle rouge
M La moitié du rectangle rouge, bon ... et combien de fois tu as eu à la reporter cette moitié de rectangle rouge ? C'est sur le toit de la maison qu'on est là, on est bien d'accord... bon... viens ici nous montrer... tu me dis si je découpe la moitié du rectangle rouge je peux la reporter dans mon toit... montre nous comment tu as fait et dis nous combien de fois tu peux la reporter cette moitié de rectangle rouge ...
MS 4 fois (il montre au tableau, voir dessin ci-contre)

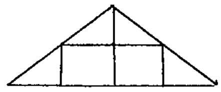


Fig. 8

M Est-ce que je pourrais si je voulais donc donner la mesure de ma figure F3, est-ce que je pourrais l'évaluer avec ... le rectangle rouge? Est-ce qu'on peut arriver à un nombre, même si on ne l'a pas obtenu directement, même si on ne l'a pas utilisé de manière entière puisqu'on a dit qu'on aurait pu le découper, alors... à quel résultat on parviendrait ?
E pareil
O Attendez, les enfants, je vais peut-être vous poser la question autrement : Est-ce qu'il y a un certain nombre ... est-ce que vous pourriez former une figure avec un certain nombre de rectangles rouges qui ait la même aire que cette maison. Est-ce qu'en prenant un certain nombre de rectangles rouges, et si oui quel est ce nombre, est-ce qu'avec un certain nombre de rectangles rouges, je peux fabriquer une figure qui ait la même aire que cette maison ?
F 16 ... parce que le rectangle rouge ça fait deux fois le triangle vert, donc, des triangles verts ça fait 32, et la moitié de 32, c'est 16
E Oui, c'est sûr
M Il y a une objection à cela ?
E Non
M Tout le monde le comprend ?
E oui
M par conséquent, on peut donc arriver à dire que la mesure de cette surface F3, l'aire, ... vous avez tous pu la paver avec le tv et vous êtes arrivés à 32 tv et qu'en faisant des petites modifications avec votre rectangle rouge comme vous a expliqué Fabienne, nous pouvons donc arriver à une autre mesure... on arrive donc à 16 rr bien que vous n'ayez pas pu le faire directement, paver directement avec le rectangle entier tel que vous l'avez entre les mains.

La maîtresse écrit aux tableau sous la dictée des enfants ces résultats et les relations entre tv et rr ; on en se met d'accord sur le code.

La suite de la séance est consacrée aux récapitulations au tableau des relations de ce type. Chaque équipe donne les résultats qui concernent une figure. On cherche le plus d'expressions possible pour les mesures et pour les relations entre carrelages. Les enfants cherchent des relations qui n'ont pas encore été écrites. Certaines relations entre carrelages sont obtenues directement, d'autres sont déduites de la mesure : on a vu que 1cm = 2tr, que 1to = 2tr, on en déduit 1cm = 1to et, comme 1rb = 2cm, on a aussi 1rb = 2to. Dès qu'une relation est proposée dans un sens, on l'écrit aussi dans l'autre sens : 1rb = 2to, donc 1to = 1/2 rb. Un élève propose même 1/2 to + 1/2 cm + 2 tr = 1 rb, mais on décide de ne pas faire d'assemblages de différents pavés.

A partir des mesures obtenues par pavage, les élèves produisent des mesures par calcul, par exemple A_1 en to en utilisant plusieurs raisonnements possibles (à partir du cm, du tr, du rb).

La question se pose de savoir si on a dit tout ce qu'on pouvait dire sans oublier de relation et sans répéter ce qu'on a déjà trouvé.

Troisième séance (26-02-83) :

Les élèves écrivent chacun sur leur cahier les différents résultats obtenus en utilisant des couleurs différentes pour les relations entre carrelages et pour l'expression des mesures des surfaces. Michaël et Véronique proposent de faire deux tableaux à double entrée : l'un pour les mesures, l'autre pour les relations entre carrelages. Au cours de cette séance, les élèves pavent aussi une nouvelle surface : F_6. Le pavage se réalise facilement avec tv, on a 30 tv et donc 15 rr. Cette fois, les élèves ne rencontrent aucun problème pour le pavage ; il est vrai que F_6 ressemble beaucoup à F_3.

Quatrième séance (28-02-83) :

Après un bilan de la séance précédente, la maîtresse distribue les deux tableaux à double entrée qu'elle a préparés et que les enfants remplissent (certaines difficultés avec le sens de lecture pour ceux qui n'écrivent qu'un nombre dans les cases ; ils ne peuvent s'y retrouver qu'en écrivant la relation entièrement).

On aboutit à des tableaux de ce type :

	rb	cm	to	tr	rr	tv
rb	rb = 1rb	rb = 2 cm	rb = 2 to	rb = 4 tr		
cm	cm = $\frac{1}{2}$ rb	cm = 1cm	cm = to	cm = 2 tr		
to	to = $\frac{1}{2}$ rb	to = cm	to = to	to = 2 tr		
tr	tr = $\frac{1}{4}$ rb	tr = $\frac{1}{2}$ cm	tr = $\frac{1}{2}$ to	tr = tr		
rr					rr = rr	rr = 2 tv
tv					tv = $\frac{1}{2}$ rr	tv = tv

	rb	cm	to	tr	rr	tv
A_1	8 rb	16 cm	16 to	32 tr		
A_2					13 rr	26 tv
A_3					16 rr	32 tv
A_4	10 rb	20 cm	20 to	40 tr		
A_6					15 rr	30 tv

La maîtresse donne ensuite une nouvelle consigne : comparer les aires des 5 surfaces. On ne dispose plus des surfaces, mais seulement des mesures et des carrelages.

Analyse de la tâche : les élèves ne disposent plus des surfaces ; les procédures de comparaison directe ou par découpage et recollement sont donc bloquées. Les élèves doivent se servir des résultats des mesures. Certaines comparaisons sont faciles : $A_1 < A_4$ et $A_2 < A_6 < A_3$. Mais pour comparer A_1 et A_2 par exemple, il faut exprimer les mesures avec une unité commune qui permette de paver rb et rr par exemple. Une autre méthode consisterait à établir la relation 2 rb = 3 rr par juxtaposition de rectangles. La substitution permet alors de tout exprimer sans trop de difficulté en rr (les mesures en rb sont toujours des nombres pairs).

Déroulement : Certains élèves ont du mal à démarrer, gênés par le grand nombre d'informations ; une partie des élèves pense qu'on leur demande de comparer les aires des carrelages puisqu'ils disposent des carrelages et non des figures ; cependant, après une intervention de la maîtresse qui reprend la consigne et leur demande si certaines figures ont été évaluées avec le même carrelage, les élèves peuvent tous trouver les relations faciles. Dans certains groupes, le problème a tout de suite été transformé en "mesurer toutes les surfaces avec la même unité". Ainsi, pour comparer A_1 et A_2, Véronique et Michaël cherchent à exprimer rr en fonction de rb ; Michaël annonce "rr = $\frac{3}{4}$ rb" (estimation à l'œil) ; Véronique lui demande pourquoi ; Michaël mesure les longueurs des 2 rectangles : 4 cm et 6 cm et rectifie sa proposition : "le bout qui dépasse, c'est $\frac{1}{3}$ rb, donc rr = $\frac{2}{3}$ rb" ; mais il voudrait aussi la relation dans l'autre sens et annonce $1+\frac{1}{3}$ puisque le bout qui dépasse, c'est $\frac{1}{3}$. Je lui suggère alors de nommer le bout qui dépasse, il décide de l'appeler a ; je reviens un peu plus tard, il a changé de stratégie : il a posé cm sur rr, nommé b le bout qui dépasse, écrit rr = 4b, cm = 3b et il cherche à évaluer 13 rr et 16 cm avec b.

A la fin de cette séance, les relations faciles sont trouvées mais les élèves ont peu avancé sur les autres.

***Cinquième séance** (4-03-83) :*

Reprise de la consigne de la séance précédente. Après 1/4 h de travail en équipe, on fait un bilan collectif, et cette fois les élèves ont plusieurs procédés de comparaison. Voici un extrait de l'enregistrement au moment où les relations faciles à écrire ont été explicitées par les enfants de plusieurs manières :

$A_2 < A_6 < A_3$ en utilisant rr ou tv

$A_1 < A_4$ en utilisant rb ou cm ou to ou tr

Fr. On n'est pas toujours obligé de prendre par exemple le triangle vert, on n'est pas toujours obligé de prendre le rectangle rouge, on peut prendre une autre forme, par exemple le rectangle bleu ... parce que le rectangle rouge on peut le mettre une fois et la moitié du rectangle rouge, ça fera le rectangle bleu ... on pourrait prendre le rectangle bleu, le rectangle rouge on peut le remplacer par le rectangle bleu

...

M. Explique-nous pourquoi tu tiens absolument à trouver une relation entre ton rectangle bleu et ton rectangle rouge ? A quoi cela avancera-t-il ?

Fr. Je pourrai terminer mon tableau, en plus, je pourrai, au lieu de faire toujours ceux-là, on pourrait prendre un qui a un pavage avec un autre qui a pas le même pavage ... (inaudible)

M. Lorsque nous sommes arrivés ici, ça va ..., pour tout le monde, c'est clair ? premier paquet de comparaison, deuxième paquet de comparaison. Là, on est un petit peu bloqué, pourquoi ?

MG Parce qu'on savait pas la valeur entre le rectangle bleu et le rectangle rouge, alors...
M. J'ai remarqué que, à chaque fois, vous m'employez des phrases longues pour désigner le carrelage qui nous a servi à comparer l'aire d'une figure et d'une autre figure... Est-ce qu'il n'y aurait pas un petit terme qui pourrait en un seul mot nous résumer tout ça ?

...
M. Si vous ne le connaissez pas, je vais vous le donner. Le rectangle rouge qui nous a servi à paver les trois figures ici, c'est ... l'unité d'aire commune aux trois figures, qui nous a permis de paver les 3 figures.

...
M. reprend les évaluations trouvées dans les deux paquets
M. Il faudrait donc trouver une porte de passage entre ce paquet (A_1, A_4) qui utilise les unités communes rb, cm, to et tr et ce paquet (A_2, A_3, A_6) qui utilise rr et tv. Mais comment ? ... Frédéric nous a donné une idée, ... intéressante ... comment allons-nous arriver à nommer cette relation entre les deux valeurs ? C'est intéressant, mais peut-être un peu difficile pour le moment et nous pourrons peut-être y revenir un peu plus tard, il y aurait peut-être un moyen plus simple pour passer d'un paquet à l'autre ?
...
Sami On a pris une règle, on a mesuré le rectangle rouge et le rectangle bleu, la longueur et la largeur, ... on a trouvé que l'aire du rr, ça faisait 12, et l'aire du rb, 18...
M. Comment t'as fait pour arriver à 12 ?
S. La largeur, ça faisait 3 et la longueur 4, j'ai multiplié 3 par 4 et ça donnait l'aire du rectangle
O. Ca fait 12 quoi ? On a parlé d'unités depuis tout à l'heure, 12 c'est un nombre, ... c'est sûrement une mesure ...par exemple 8, c'était la mesure de A_1 avec comme unité le rectangle bleu, ...tu me dis 12, ...c'est la mesure de l'aire de ce rectangle, mais avec quelle unité ? Tu pourrais dessiner pour nous montrer où sont tes 12 ?
... Sami dessine sur le tableau quadrillé.
Je compte tous les petits carrés ...
O. Avec quelle unité ? On a une mesure de l'aire de ce rectangle avec quelle unité ?
E. 1 centimètre...
M. La règle t'a permis de mesurer (elle montre) 1 centimètre, 1 centimètre, le centimètre nous a permis de faire une mesure de longueur, sur le trait, ici...c'est une longueur ... alors, ce petit carré ici ? quelle unité ? Comment on va l'appeler ?
Sami un centimètre carré
M. C'est bien, mais pourquoi ? on y reviendra ... On pourrait lui donner n'importe quel nom. Bon, lui, il a dit on va l'appeler 1 centimètre carré parce que ses mesures c'est 1 cm sur 1 cm et comme c'est un carré, je vais l'appeler un cm carré. On pourrait simplement l'appeler avec une initiale comme on a fait jusqu'à maintenant ... On pourrait l'appeler c, je le colorie, ce petit carré, c'est l'unité, au même titre que le rectangle rouge ... étaient des unités qu'on reportait
Manuel On le reporte 12 fois ...
M. Maintenant que nous avons l'existence de ce petit c, est-ce qu'il pourrait nous être utile ?
E. Oui
M. A quoi ?
E A calculer l'aire de tous les pavages
M. Pas les pavages, les figures
Michaël explique sa procédure avec b (ce qui dépasse quand on pose le carré marron sur le rectangle rouge) cm = 3 b, rr = 4 b ; il dessine les b sur cm et rr.

A partir de là, les propositions fusent : les élèves proposent de nouvelles relations entre unités, avec c et b. Michaël reprend sa première idée comparer rb et rr : rb = 1 rr + 1/2 rr, exprimée aussi par Frédéric au début du bilan. Manuel explique que le tiers de rb c'est la moitié de rr, on appelle a cette nouvelle unité. Frédéric veut revenir à sa méthode (trouver toutes les relations entre carrelages).

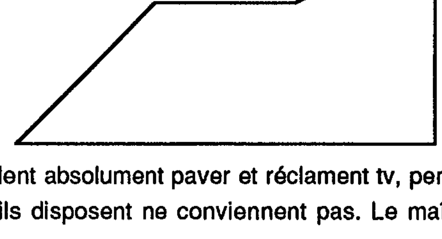
Sixième séance (7-03-1983)

Il s'agit d'une séance d'homogénéisation de la classe et de renforcement : Les élèves expriment toutes les mesures avec a, b et c, et complètent le tableau des relations entre carrelages. Avec les nouvelles unités, ils ont les résultats suivants qui sont ajoutés au tableau :

	a	b	c
A_1	24 a	48 b	144 c
A_2	26 a	52 b	156 c
A_3	32 a	64 b	192 c
A_4	30 a	60 b	180 c
A_6	30 a	60 b	180 c

Septième séance (10-3-1983)

On distribue aux élèves la surface S_5 (pour eux elle s'appelait F_5) qui n'est pavable avec aucune des unités fournies et on leur demande de la comparer aux autres ; ils disposent de rb, cm, to, tr.



S5

Au démarrage, les élèves veulent absolument paver et réclament tv, pensant qu'il faut un triangle et que ce doit être tv puisque les deux dont ils disposent ne conviennent pas. Le maître leur dit alors qu'ils peuvent se débrouiller sans tv et que le pavage entier n'est possible avec aucune des unités fournies. Aussitôt les élèves trouvent de nombreuses solutions utilisant deux ou plusieurs carrelages et évaluent l'aire avec chacune des unités fournies.

On voit là un effet du contrat didactique : les mesures précédentes avaient été obtenues à partir de pavages avec une seule unité ; les élèves veulent rester dans le contexte familier, réutiliser des procédures qui ont fait leurs preuves et n'acceptent d'en sortir que quand on le leur demande explicitement. De plus, sur le plan cognitif, la situation de mesure et de comparaison d'aires a pris son sens à partir du pavage, c'est donc cela que les élèves veulent utiliser.

Les solutions proposées sont les suivantes :

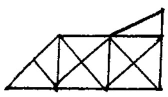
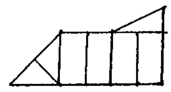
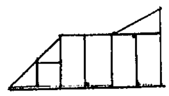
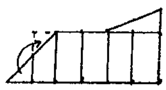
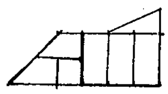
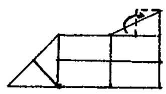




Fig.10

10 to $+\frac{1}{2}$ rb = 11 to   4 rb + 2 to + $\frac{1}{2}$ rb   4 rb + 1 cm + 2 tr + $\frac{1}{2}$ rb= 5 rb + $\frac{1}{2}$ rb

5 rb + $\frac{1}{2}$ rb   3 rb + $\frac{1}{2}$ rb + $\frac{3}{4}$ rb + $\frac{3}{4}$ rb+ $\frac{1}{2}$ rb   4 rb + 2 to + 1 cm = 11 cm

Rémi a choisi comme unité c et a obtenu 99 c en évaluant en c les éléments d'un pavage avec plusieurs carrelages (le deuxième dessin : 4x18c + 9c + 2x9c)

Dès qu'une solution est donnée par un élève, d'autres résultats obtenus par le calcul sont spontanément proposés par d'autres :

- à partir du premier découpage : 1 to = 1 cm donc on a 11 cm ; 1 tr = 1/2 to, on peut mesurer la figure 5 avec tr, on a 22 tr

- Véronique propose 16 1/2 tv parce que 1 rb = 3 tv et on multiplie 5+1/2 par 3, ce qui fait 16+1/2.

Pour le rr, on divise 16+1/2 par 2, cela fait 8+1/4.

Fabienne veut évaluer aussi avec b : elle propose 99x3 ; d'autres élèves protestent immédiatement et corrigent 99 : 3

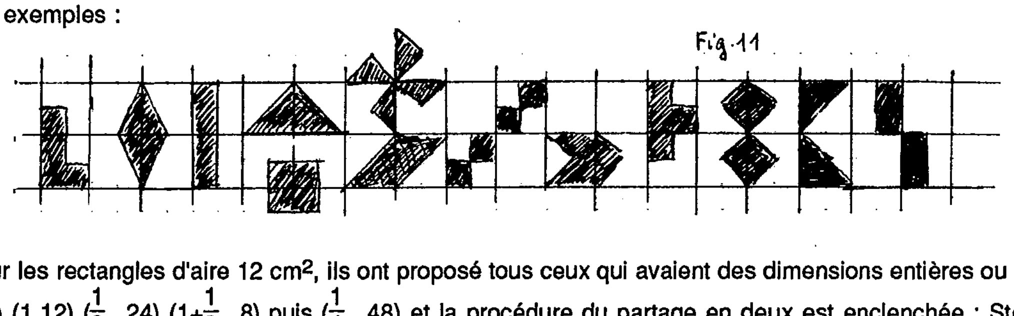
2.4. Etude de l'aire 1 cm^2 (1 séance et demie : 15.03.83 ; 17.03.83)

Recherche de surfaces variées d'aire 1cm^2 ; d'aire 12 cm^2 dont au moins deux rectangles (le 15-03, terminé à la maison pour le 17-03)

Recherche de rectangles d'aire 12cm^2 (le 17-03).

Les élèves disposent de papier quadrillé au cm. Ils produisent des surfaces variées d'aire 1cm^2 dont voici quelques exemples :

Fig.11



Pour les rectangles d'aire 12 cm^2, ils ont proposé tous ceux qui avaient des dimensions entières ou "demi" : (3,4) (2,6) (1,12) ($\frac{1}{2}$, 24) ($1+\frac{1}{2}$, 8) puis ($\frac{1}{4}$, 48) et la procédure du partage en deux est enclenchée : Stéphanie explique "j'ai divisé $\frac{1}{2}$ par 2, ça fait $\frac{1}{4}$, j'ai multiplié 24 par 2, ça fait 48". D'autres enchaînent : "on peut aller à l'infini". Cependant, sur demande d'explication de la maîtresse, Manuel remarque: "1/4, c'est 1 divisé par 4, 48 divisé par 4, ça fait 12, un autre élève "comme $\frac{1}{4}$ c'est la moitié d'$\frac{1}{2}$, il faudra faire 2 fois plus grand que 24" et

Stéphanie précise : "si on prenait une bande de $\frac{1}{2}$ sur 24, qu'on la coupait en 2, ça fait $\frac{1}{4}$ et si on met la bande du haut à côté de l'autre bande, on aurait 48 sur $\frac{1}{4}$"

2.5 Encadrements : (1 séance et demie : 17.03.83 et 18.03.83)

A l'aide de papier millimétré transparent, encadrements de l'aire d'une surface polygonale et d'une surface à bords arrondis.

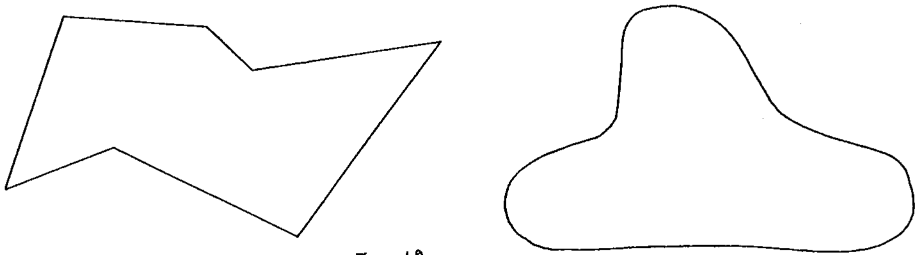


Fig. 12.

Analyse de la tâche : les élèves n'ont pas encore établi les formules de calcul d'aires ; on ne peut donc pas attendre une triangulation de la surface polygonale, pas plus qu'une décomposition en trapèzes et triangles rectangles. La seule méthode possible est l'encadrement en se servant du papier millimétré. C'est cette procédure que l'on vise.

Il faudra ensuite utiliser les résultats de l'encadrement pour comparer les aires de ces nouvelles surfaces à celles des anciennes et donc avoir des encadrements suffisamment fiables.

17-03-83 *(deuxième moitié de la séance)*

Avant le travail, la maîtresse demande aux élèves d'observer le papier millimétré et de le décrire.

Il y a des gros carrés de 1cm de côté et des tous petits carreaux de 1mm de côté, et aussi des moyens de 1/2 cm. Frédéric "ça fait 1/4 cm^2" ; Laure trouve qu'il y a 4 carreaux de 1/2 cm^2 dans un carré de 1 cm^2 :

"des petits carrés de 1/2 cm^2 ; j'ai mesuré le pourtour... j'ai mis ma règle en dessous, j'ai vu que ça faisait 1/2 cm, j'ai regardé celui qui est horizontal, il fait 1/2 cm et celui qui est vertical aussi"
M. "tu dis : donc l'aire est égale à 1/2 cm^2"
L. le pourtour...
M. fait calculer le périmètre et précise bien que 1/2 cm, c'est la longueur d'un côté puis demande quelle est l'aire.
Un élève en apparté (parlant de Laure) "j'ai compris pourquoi elle dit ça"
Rémi répond à M. : 25 petits carrés
L. 2 cm
Protestations puis n'importe quoi : 4
O. Laure, montre-nous 1cm^2 sur ton dessin, colorie
M. Maintenant colorie l'autre ... bon ... ce carré tu peux le reporter combien de fois dans celui-là ?
L. 4
M. Quelle est l'aire de celui-là
E. 1/4
E. 0,25
La discussion continue sur l'utilité du papier millimétré :
Manuel : Les petits carrés vont nous servir : le carré de 1cm^2 va nous servir à savoir dans la forme 8 ou 7 combien il y a de carrés de 1 cm^2
...

La maîtresse donne la fin de la consigne : classer les surfaces 7 et 8 parmi les autres ; cette fois l'instrument de travail, ce ne sont plus les carrelages, c'est le papier millimétré.

Sur demande des enfants, elle fournit des trombones pour fixer le papier millimétré sur la feuille.

Les enfants transforment immédiatement la consigne et la répètent sous une forme instrumentale : "compter les cm^2", "calculer l'aire", "compter les petits carrés contenus dans les formes", "trouver l'aire", "c'est comme si on pavait la forme avec des petits carrés du papier millimétré". Après plusieurs protestations de la maîtresse, enfin un élève reprend "pouvoir dire si c'est plus petit ou plus grand que A_1, A_2 ..." M. répète la consigne en faisant remarquer qu'elle n'a pas dit "calculer"

Un élève : "oui mais pour comparer, il faut calculer l'aire"

18-03-83

Les élèves réalisent le travail amorcé la veille.

La difficulté réside dans le comptage des carreaux : quelle unité choisir et comment compter de façon économique ? Michaël veut se simplifier le travail et réclame de la ficelle pour transformer sa surface en rectangle ! En fait, le rectangle qu'il montre en dessinant avec le doigt sur sa feuille a une aire proche de celle de la surface donnée (il s'est arrangé pour compenser), mais il réclame la ficelle, sans doute parce qu'il espère ainsi pouvoir trouver un rectangle qui ait exactement la même aire (en mesurant avec la ficelle).

Des élèves choisissent le tout petit carré et ont du mal à se débrouiller, d'autres décident de choisir l'unité moyenne, le quart de cm^2 : Georges "avec le cm^2, il y avait trop de bouts qui dépassaient". Il a appelé cette unité 1/4, Samy 0,25, parce que c'est le quart du cm^2 et 25 mm^2, Véronique l'a appelée u et a compté en u. De plus, ces unités se regroupent par 10x10 dans les gros carreaux du papier millimétré. Les élèves essaient aussi de trouver des rectangles intérieurs aux surfaces. Georges a marqué 100 dans un rectangle de 12 sur 8 ; d'autres élèves sont d'accord avec lui : 10x10 =100, donc 12x8 = 100.

Véronique a pris comme unité u (1/4 cm^2) et a enlevé les u qui étaient sur le bord et ne rentraient pas tout entiers, elle a calculé ce qu'il y avait à l'intérieur de la surface obtenue, puis pour ceux qui étaient sur le bord, elle a regardé si le morceau qui est à l'intérieur est plus grand ou plus petit que la moitié du "rectangle". A l'intérieur, elle a trouvé 542 u pour la forme 8 ; elle a compté 1 par 1 (sans se tromper), d'autres ont fait des paquets pour aller plus vite.

Ce résultat permet à Véronique d'avoir une idée du classement de A_8 : "j'ai pris A_1, ça faisait 144 cm^2, comme le petit u c'est le quart du cm^2, alors j'ai multiplié 144 par 4, j'ai trouvé 576, alors j'ai pu déjà avoir une idée que A_8 c'était entre A_5 (99 cm^2) et A_1(144cm^2) mais c'est pas tout à fait sûr parce qu'il va falloir que je calcule ce qu'il y a sur le côté" (...) "je n'aurai peut-être pas besoin de les compter tous : quand j'aurai 34, c'est pas la peine de continuer, je saurai que A_8 est plus grand que A_1."

Question : combien de cm^2 dans 542 u ?

Les uns (François) proposent de diviser par 4, mais d'autres (Rémi) commencent par multiplier par 4.

Le travail sur les encadrements a été difficile pour un certain nombre d'élèves de la classe et il n'est pas sûr que les objectifs visés aient été atteints. Nous n'avions pas le temps d'approfondir davantage ce travail qui sera de toute façon repris en 6ème.

2.6. Calcul d'aires de rectangles

Les élèves sont partis pour les vacances de Pâques, puis en classe de nature, ce qui fait qu'on les retrouve près de 2 mois plus tard. Pendant le séjour, ils n'ont pas travaillé sur les aires.

Calcul d'aires de rectangles (13 05 83) :

Recherche de rectangles à périmètre fixé, calcul de l'aire : les élèves disposent de papier quadrillé au 1/2 cm sur lequel est dessiné un rectangle ; dans une même équipe, les élèves disposent de rectangles superposables, d'une équipe à l'autre, ils ne le sont pas nécessairement. Les rectangles dessinés étaient (8,6) (7,5) 2 fois (9,6) (5,2) (6,2+1/2).

La consigne est : dessiner d'autres rectangles qui ont le même périmètre ; pour chacun d'eux calculer l'aire ; consigner les résultats dans un tableau

périmètre en cm	dimensions en cm		aire en cm^2
	a	b	

Le travail ne pose pas tellement de problèmes. On observe cependant encore quelques confusions aire-périmètre et surtout des confusions sur le nom des unités (cm et cm^2).

Calcul d'aires de rectangles (27-05-83)

Il s'agit d'un bilan et d'un renforcement de la séance du 13 mai, mais entre temps, la consigne s'est transformée : les élèves ont calculé le périmètre et c'est sa valeur numérique qui sert de point de départ. Collectivement, les élèves proposent des rectangles qui conviendraient pour une équipe autre que la leur et calculent mentalement l'aire.

Au début, on a encore des confusions aire-périmètre : pour 28 cm, une élève propose un rectangle de 7 sur 4. Mais tout rentre dans l'ordre très vite.

Dans ce jeu collectif, on a envie de trouver des rectangles qui n'ont pas encore été proposés. Quand tous les entiers possibles ont été proposés, quelqu'un propose des dimensions fractionnaires, un autre propose 14, 0 dont l'aire serait 0, mais on décide de le refuser parce que ce n'est pas vraiment un rectangle.

L'objectif de la séance devient alors numérique : calculer sur les fractions, le cadre géométrique sert de support pour les calculs :
$\frac{1}{2}$, $13+\frac{1}{2}$: on vérifie $13+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 14$, $14 \times 2 = 28$; $2 \times (13+\frac{1}{2}) = 27$, $2 \times \frac{1}{2} = 1$, $27+1 = 28$ $\frac{1}{2} \times (13+\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} \times 13) + (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2})$
$= \frac{13}{2} + \frac{1}{4} = \frac{12}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 6 + \frac{3}{4}$
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ pose quelques problèmes. Stéphanie propose d'abord 1 puis $\frac{1}{2}$; le dessin lui permet de rectifier. Après la fin de tout le calcul, l'observateur lui demande de retrouver les $6 + \frac{3}{4}$ cm^2 sur le rectangle ; elle le fait sans trop de difficulté.

2.7. Conclusion : les conceptions visées sont-elles à l'œuvre dans l'apprentissage ?

*** *dissociations aire-surface, aire-longueur***

Nous avons vu que la conception de l'aire attachée à la forme ne se manifeste réellement qu'au début de l'apprentissage. Par la suite cependant l'amalgame entre aire et périmètre réapparaît périodiquement quand la situation est complexe (encadrement sur papier millimétré de surfaces à bord arrondi) ou quand on est dans le cadre numérique (situation du 27 mai). On peut cependant en voir une manifestation dans le fait que, dans les surfaces de forme régulière, l'aire est liée à la taille de la surface et la taille est liée aux dimensions. C'est particulièrement net dans le cas du carré où le vocabulaire utilisé pour désigner les unités d'aire entretient la confusion. Ainsi nous avons vu que 1/2 cm^2 peut être compris comme un carré de côté 1/2 cm. Certains élèves ont beaucoup de difficultés à se dégager de ce point de vue même s'ils sont convaincus qu'il faut 4 petits carrés de côté 1/2 cm pour paver un carré de côté 1 cm et qu'ainsi l'aire du petit est 1/4 de l'aire du grand. Cela s'est produit lors de l'examen du papier millimétré transparent, et ceci bien que tous les élèves aient auparavant produit des surfaces de formes variées et d'aire 1 cm^2. Cet exemple montre aussi la difficulté des rapports entre mesure des dimensions et mesure de l'aire, les élèves cherchant parfois plus à caractériser la surface qu'à la mesurer.

*** *approche de la mesure***

Les élèves n'ont pas rencontré de difficulté pour associer des nombres différents à la même surface que ce soit pour exprimer le résultat de pavages avec des unités différentes ou des mesures obtenues indirectement. Le recours aux nombres pour comparer des surfaces et la nécessité d'utiliser une même unité pour mesurer les surfaces à comparer n'ont posé de problème pour personne. Les seules difficultés résidaient dans la recherche d'une unité commune différente de celles qui étaient proposées ou dans le calcul sur les nombres dans le cas où ils étaient fractionnaires.

Nous avons vu qu'au CM2, certains élèves se sont lancés dans la recherche systématique de toutes les relations entre les unités d'aires utilisées, recherche qui sera ensuite effectuée par toute la classe de façon à compléter le tableau donnant les relations entre unités ; cette recherche les a parfois amenés à expliciter une unité commune permettant de mesurer les deux pavés rectangles : trois nouvelles unités ont été proposées, le rectangle (1,3), le rectangle (2,3) et le carré (1,1). La recherche de toutes les relations entre carrelages n'a été possible que parce que les élèves avaient déjà fait du travail sur les fractions à propos de longueurs.
Au CM1, les élèves n'ont pas produit d'unité nouvelle permettant de mesurer tous les pavés, ils n'ont pas non plus exprimé la mesure des pavés en fonction de chacun des autres : ils ont trouvé la relation 3 r = 2 R entre les aires de deux rectangles, qui permettait de mesurer toutes les aires en prenant pour unité le rectangle d'aire r par substitution de 3 r à 2 R et ils ont explicité quelques relations utilisant des 1/4 ou des 1/3. Le travail fait auparavant sur les fractions n'était pas suffisant pour que tous les élèves expriment toutes les relations entre les pavés. Nous verrons que c'est aussi ce qui se passera dans une classe de 6ème que nous avons observée plus tard (voir chapitres 3A et 3B).

CHAPITRE 3

ELEMENTS D'EVALUATION

1. Au cours des entretiens individuels

Les entretiens individuels ont eu lieu au CM2 fin mai 1983[1], plus de 2 mois après l'apprentissage. Nous avons choisi d'interroger les élèves par deux pour observer ou le cas échéant provoquer des conflits de conception. Les élèves étaient choisis de façon qu'il n'y ait pas domination de l'un par l'autre. Les 24 élèves de la classe ont été interrogés, ce qui a donné 12 "binômes".

Le problème était de comparer les aires des surfaces ci-dessous :

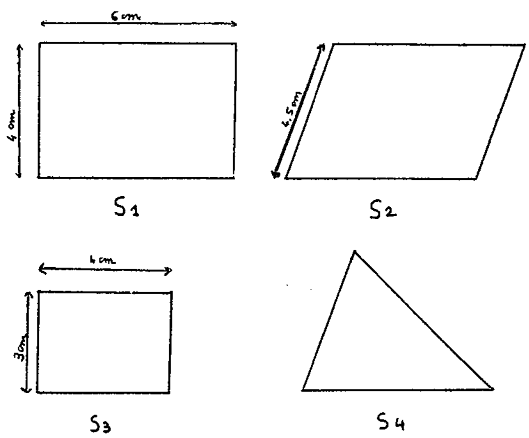


Fig.13

Les figures se présentaient comme ci-dessus : S_3 est moitié de S_1 mais tournée de 90°, S_4 est la moitié de S_2, simplement translatée. Elles étaient dessinées sur papier blanc. En cas de besoin, nous pouvions fournir les mêmes figures sur papier quadrillé au demi centimètre et aussi du papier blanc et du papier quadrillé au demi centimètre à volonté. Les manières de mener l'interrogatoire ont légèrement évolué : au début, nous avons donné les figures sur papier blanc aux deux élèves et éventuellement introduit ensuite le papier quadrillé à un moment jugé opportun (5 groupes). Ensuite, dans trois groupes, avec l'espoir d'accélérer le conflit, on a donné tout de suite à un des élèves les surfaces sur papier quadrillé tandis que son coéquipier disposait des figures sur papier blanc. Dans un groupe composé de deux élèves "faibles" (Franck, Albert), on a donné dès le début aux deux élèves les figures sur papier quadrillé. Dans les trois derniers groupes, pour développer les interactions entre élèves, nous avons donné une seule feuille pour les deux élèves, papier blanc d'abord, papier quadrillé ensuite si nécessaire.

Si les deux élèves étaient d'accord sur une réponse fausse, l'observateur intervenait en apportant un élément de contradiction : en suggérant de "dessiner les cm^2"[2], en fournissant du papier quadrillé ou en proposant de pencher davantage le parallélogramme.

1.1. Procédures observées

1.1.1. Premières procédures

Tous les élèves, sauf Pascale, commencent par mesurer les longueurs des côtés des surfaces, ce que les élèves appellent souvent "les dimensions de la surface". Pascale, qui dispose de papier quadrillé, mesure "à l'intérieur" dans deux directions (verticale et horizontale, voir figure ci-dessous), même pour le triangle où elle prend soin de mesurer au milieu, ajoute ses mesures et écrit son résultat :

---

[1] Je remercie vivement Marianne Frémin qui a pris des notes très précises sur les gestes des élèves et les figures qu'ils dessinaient pendant les entretiens.

[2] Cette formulation n'est pas correcte mais il est difficile de faire autrement avec les élèves : elle fait référence aux situations étudiées en classe et au vocabulaire utilisé alors, notamment au pavage par des surfaces d'aire 1 cm^2 qui ne sont pas forcément toutes des carrés.

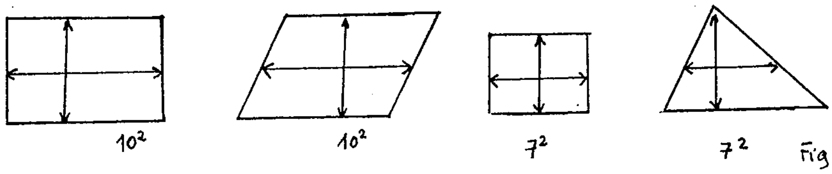


Fig.14

La plupart des autres élèves avancent ensuite des éléments de réponse en se basant sur les procédures suivantes :

- *"calcul" des aires* : François, Sami, Sophie G., Laure, Frédéric, Rémi, Michaël, Delphine, Stéphanie P. (dans le cas du triangle).
- *découpage-recollement* : Stéphanie P., Stéphanie L., Fabienne, Alain (en liaison avec le pavage), Carole
- *pavage spontané avec des carrés dessinés* : Alain
- *comparaison des "largeurs"* : Magali, Franck, Olivier, Muriel, Véronique
- *déformation* : on redresse le parallélogramme pour en faire un rectangle : Manuel, Georges.

Quelques élèves restent indécis : Malika, Albert, Nathalie.

- le *comptage de carreaux* apparaît spontanément et immédiatement, quand on donne les figures sur papier quadrillé dans un deuxième temps. Il est à noter que beaucoup des élèves qui disposaient de papier quadrillé dès le départ ont quand même mesuré les dimensions et donné une première conclusion basée sur cette procédure.

1.1.2. les procédures "calcul"

Elles sont majoritaires pour démarrer et sont employées à un moment ou à un autre par la majorité des élèves. Nous entendons par "calcul", le recours à une formule, exacte ou erronée.

- *Pour les rectangles,* tous les élèves concernés font le produit des mesures des côtés. Pour le parallélogramme et le triangle, les formules n'avaient pas été établies en classe et ont voit apparaître des formules variées :

-*Pour le parallélogramme,* la formule adoptée par tous ceux qui en utilisent une consiste à faire le produit des deux "dimensions" : $6x(4+\frac{1}{2}) = 27$.

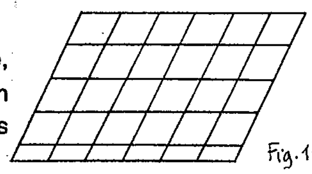


Fig.15

Sur demande de l'interrogateur de montrer où sont les 24 cm² pour le rectangle, les 27 cm² pour le parallélogramme, un élève (Frédéric) justifie son calcul en produisant des pavages avec des carrés pour S_1 et des petits parallélogrammes pour S_2 et déclare : On a bien 27 cm².

Deux autres élèves (François, Georges) amorcent la même démarche. Cette procédure est à rapprocher de celle de déformation continue (voir plus loin), les élèves utilisant des "cm² penchés".

- *Pour le triangle,* apparaissent diverses "formules" établies en fonction des mesures a, b, c des côtés.

  * *produit de 2 longueurs* : on fait (a+b) x c (François, Delphine) ou axc + bxc (Laure et Sophie, Delphine)

  * *produit des "trois dimensions"* : a x b x c (François, Manuel et Delphine). L'observateur demande à Manuel et Delphine si pour le rectangle ils ont fait 4x6x4x6, le produit des longueurs de tous les côtés. Manuel répond "ah, ben non, puisque là y'a 2 dimensions", Delphine précise "ben non, puisque là, ça sert à rien, puisque c'est les mêmes dimensions, mais là, c'est pas les mêmes dimensions"

  * *(a+b+c)x3* (Michaël) : peut-être pour garder des rôles symétriques aux 3 dimensions et avoir quand même un produit

Certains élèves changent de procédé de calcul parce que celui qu'ils ont adopté donne un résultat beaucoup trop grand (par rapport à S_1 et S_3) : ainsi Michaël passe de (a+b+c)x3 (=48) à a+b+c (=16). On assiste aussi à des changements de procédure, y compris au passage à des procédures périmétriques devant une difficulté de calcul : les côtés obliques du triangle mesurent $4+\frac{1}{2}$ et $5+\frac{1}{2}$, François veut multiplier les 3 côtés du triangle et ne sait comment multiplier $4+\frac{1}{2}$ par $5+\frac{1}{2}$; sa coéquipière (Pascale) lui suggère alors de rassembler les $\frac{1}{2}$: il fait $4+\frac{1}{2} + 5+\frac{1}{2} = 10$, $10x6 = 60$; c'est trop grand ; il finit par ajouter les 3 dimensions.

Les procédures de calcul sur le triangle concernent relativement peu d'élèves : ceux qui se sont intéressés aux 4 figures à la fois. Les élèves qui n'ont abordé le triangle qu'une fois réglé le problème de la comparaison de S_1 et S_2 n'ont recouru qu'aux procédures qui menaient au succès pour S_3 et S_4 (pavage avec des carrés ou report de S_3 sur S_1 et de S_4 sur S_2).

1.1.3. procédure découpage et recollement

Elle consiste à dire que le parallélogramme a même aire qu'un rectangle par déplacement d'un triangle. Elle mène normalement à une réponse correcte.

Cette procédure arrive parfois dans un deuxième temps pour justifier une procédure "comparaison de dimensions" : où faut-il mesurer la deuxième dimension du parallélogramme ? Nous reproduisons ci-dessous des extraits de l'entretien avec Stéphanie L. et Fabienne. Après un temps de réflexion et des mesures, Stéphanie prend la parole :

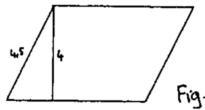


Fig.16

S. "On dirait que celui-là et celui-là" (S_1 et S_2) "ont la même aire" ... "parce que quand je mesure ici, ça fait 4 et demi, mais si je le mets droit, il reste plus que 4 et là ça fait aussi 4, et puis là ça fait la même longueur" (6)

Obs. Tu dis quand je mets penché, ça fait 4 et demi, quand je mets droit, ça fait 4. Tu peux expliquer pourquoi ça te fait penser que c'est la même aire ?

S. J'ai mesuré les 4 côtés. Quand je mettais celui-là comme ça, ça faisait 4 et demi et quand je le mettais droit, ça allait plus haut que quand il était penché et si j'enlevais le demi, ça faisait juste 4 et celui-là aussi.

Obs. Ça nous donne quel renseignement pour l'aire ?

S. Ils ont les mêmes mesures de chaque côté

Obs. Ils ont pas les mêmes mesures de chaque côté, tu m'as dit que celui-là, il avait 4 et demi

S. Mais quand on le met droit, ça fait les deux mêmes rectangles

Obs. Pourquoi ça fait la même aire ? Qu'en pense Fabienne ?

F. Ça se peut que ça soit la même aire parce que le demi, il est reperdu ici (elle montre le triangle qui dépasse)

Obs. Explique-toi. Comment reperdu ? ...

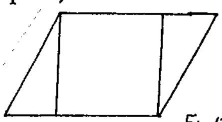


Fig.17a

F. elle a dit qu'on pouvait le remettre droit et ça faisait la même aire (elle dessine le rectangle intérieur)... (long silence)

Obs. Tu penses que ça peut avoir la même aire. Je voudrais que vous soyez sûres toutes les deux, que vous soyez bien d'accord.

S. Ça fait la même aire parce que si on enlève ça et ça (les deux triangles), après il faut bien le rajouter parce qu'il fait partie quand même du ...

Obs. Vas-y ... comment tu les enlèves et comment tu les rajoutes ?

S. on peut rassembler les deux rectangles et puis les mettre sur le côté

Stéphanie dessine : elle reporte le triangle de gauche à droite et hachure le triangle de gauche. Elle mesure les dimensions du rectangle obtenu : 4, 6

Obs. Finalement ?

S. et F. S_1 et S_2 ont la même aire

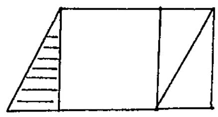


Fig. 17b

Nous verrons cependant (Laure et Sophie) que, dans la comparaison de S_1 et S_2, le découpage et recollement peut parfois venir étayer un argument de type "déformation continue" menant à une réponse fausse.

1.1.4. procédure "pavage"

Elle consiste à dessiner des carreaux à l'intérieur des surfaces et à compter ces carreaux. Nous la distinguons de la procédure "comptage de carreaux" qui n'est possible que sur papier quadrillé à l'avance. Un seul élève (Alain) l'a utilisée spontanément dès le départ.

La procédure "pavage" peut déboucher sur une procédure "découpage et recollement" ou l'utiliser : Alain a quadrillé le rectangle et commencé le quadrillage du parallélogramme. Pour terminer, il propose de rassembler les deux pointes pour en faire un rectangle :

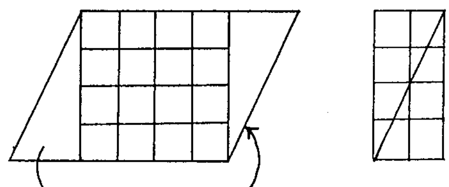


Fig 18

1.1.5. procédure "longueur des côtés"

S_1 et S_2 ont toutes les deux un côté de 6 cm, on compare les autres côtés 4,5 > 4 donc l'aire de S_2 est plus grande que l'aire de S_1.

C'est la première procédure adoptée par beaucoup d'élèves. Notons qu'elle ne nous renseigne pas sur leurs conceptions à propos de l'aire : cet argument peut aussi bien se référer à une conception de type "calcul" (ce n'est pas la peine de faire le produit) qu'à une conception liée à la forme et aux "dimensions", voire même au périmètre ou à une conception liée à la conservation de l'aire par déformation continue (cf ci-dessous)

1.1.6. procédure "déformation continue"

Elle consiste à "redresser" le parallélogramme pour en faire un rectangle de 6 sur 4,5 et à comparer ce rectangle à S_1 pour conclure que $A_2 > A_1$. Elle est utilisée dès le départ par 2 élèves mais reprise ensuite par beaucoup comme justification de leur résultat.

Conclusion

Il nous semble que toutes ces procédures traduisent chez les enfants un souci de simplification du problème :

a) *Ramener la comparaison des aires à la comparaison de nombres.*

1) grâce au pavage : en comptant les carreaux sur papier quadrillé ou en quadrillant le papier blanc en carrés.

2) en faisant un produit de longueurs pour calculer les aires, en inventant au besoin des formules erronées (parallélogramme ou triangle).

b) *Ramener la comparaison des aires à la comparaison des longueurs des côtés* (pour S_1 et S_2).

c) *Se ramener à la comparaison de deux rectangles (pour S_1 ou S_2)*

- en découpant et recollant de façon convenable le parallélogramme
- en redressant le parallélogramme pour en faire un rectangle

1.2. Comparaison de S_1 et de S_2

1.2.1. Les convictions des élèves

Il semble que les élèves aient plusieurs types de conviction qui les amènent à des conclusions différentes pour la comparaison de S_1 et de S_2.

- *Convictions permettant de conclure correctement $A_1 = A_2$:*

* quand on découpe une surface et qu'on recolle convenablement les morceaux, on a une surface de même aire.

* pour comparer des surfaces dessinées sur papier quadrillé, on compare le nombre de carreaux qu'elles contiennent (éventuellement en regroupant des morceaux de carreaux pour faire des carreaux entiers). Au besoin, on quadrille le papier pour faire apparaître des cm^2.

- *Convictions amenant à la conclusion $A_1 < A_2$:*

* quand on déforme un parallélogramme "en penchant plus ou moins" on conserve l'aire, en particulier un parallélogramme de 1cm de côté a une aire de $1cm^2$. Ceci peut s'énoncer sous une forme plus générale : si deux surfaces ont la même forme géométrique (par exemple deux parallélogrammes ou deux rectangles) et qu'une de leurs caractéristiques est conservée (périmètre, dimensions, aire), les autres le sont aussi. En effet, il semble que les élèves utilisent aussi le "théorème en acte" suivant : *un parallélogramme obtenu à partir d'un carré de 1cm de côté par découpage et recollement suivant la diagonale a tous ses côtés qui mesurent 1cm.* La question n'a été posée qu'à deux élèves, mais il est probable que beaucoup d'autres auraient répondu de la même façon.

* l'aire du parallélogramme est le produit des dimensions, comme pour le rectangle. Plus généralement, on observe chez un nombre assez important d'élèves la conviction que pour comparer les aires, il faut les calculer à partir des dimensions.

Le désir de se ramener aux nombres est très fort, particulièrement au CM2 où on avait institutionnalisé la formule de calcul de l'aire d'un rectangle et où les élèves travaillaient sur des calculs d'aires de rectangles pendant la même période en classe : beaucoup répétaient la question posée sous la forme "calculer les aires". Véronique demande : "Mais comment on fait pour calculer ça ?" (à propos du parallélogramme).

La confiance dans les résultats du calcul est très grande, même quand ils entrent en contradiction avec la perception : Sophie et Laure ont démarré par une procédure "calcul". Pour le triangle, elles ont fait axb+axc, ce qui leur donne 60 cm^2 pour S_4 et 24 cm^2 pour S_1. L'observateur leur demande

Obs. Regardez S_4 et S_1, lequel vous paraît le plus grand ?
L. S_4
Obs. Ah ? Regardez
L. et S. Non c'est S_1 L. oui, c'est S_4 S. Ben oui puisqu'il fait 60 cm
L. c'est S_4 le plus grand
Obs. Regardez, regardez-les
L. Pourtant en apparence, c'est le S_1
Obs. Ah...
S. Comme ça, à vue d'œil, oui, mais si on calcule, l'aire c'est ... L. oui, dis donc, ça fait bizarre ... S. ça fait 54, c'est beaucoup plus grand L. pourtant c'est le S_4 puisqu'il fait 60 et l'autre fait 24 ... cm^2 S. Mais même tu regardes là L. Ah oui, mais lui, y'a des mm aussi au S_4. S. si on compte pas les mm
Obs. Oui, mais quand même, à vue d'œil...
S. et L. Ah ben, à vue d'œil, c'est le S_1.
Obs. Ah...
L. Pourtant, c'est le S_4 S. Mais, remarque, y'a les millimètres là, si y'avait pas de millimètres, ça...
L. ben ça ferait quand même plus grand
Obs. On verra, on verra...

Rappelons que les élèves ont pourtant travaillé sur la comparaison d'aires avant d'introduire la mesure ; mais c'était tout au début de l'apprentissage ; depuis, ils avaient travaillé sur des pavages ou des mesures. La semaine même des entretiens individuels, ils calculaient les aires de rectangles dont le périmètre était fixé. Un calcul qui permet de ramener le problème à la comparaison des nombres est une méthode si pratique et si conforme à ce qu'on attend d'un problème de mathématiques qu'on comprend qu'elle attire les élèves. On peut remarquer aussi que ces élèves n'ont qu'une idée très vague des ordres de grandeur des unités de mesure : elles pensent que les millimètres peuvent expliquer la contradiction entre ce qu'elles voient et ce qu'elles calculent.

1.2.2. Les conflits entre diverses convictions.

Les convictions amenant à des conclusions contradictoires provoquent nécessairement un conflit. Dans tous les groupes où la première conclusion d'un des élèves était $A_1 < A_2$, ce conflit s'est produit, spontanément ou provoqué par l'observateur dans le cas où les deux élèves étaient d'accord sur cette conclusion. Il n'y a eu que trois groupes où pratiquement aucun conflit de conception n'a eu lieu : celui de Franck et Albert qui ont eu tout de suite les surfaces sur papier quadrillé et se sont rapidement résolus à compter les carreaux, ceux de Stéphanie L. et Fabienne d'une part, de Carole et Magali d'autre part qui se sont très vite servies du découpage et recollement pour aboutir aux réponses correctes.

Dans le groupe de Véronique et Alain, le conflit a été spontané :

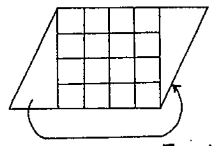
Au début, Véronique est perplexe : elle commence par dire qu'il n'y a pas de relation entre les aires. Alain fait des remarques très générales "il y en a de plus grands que d'autres" ; "ce ne sont pas tous des carrés ou des rectangles". Tous deux mesurent les dimensions.

Véronique remarque que S_1 et S_3 ont la même dimension (4cm), S_1 et S_4 aussi (6cm), et aussi S_2 (6cm).

Alain observe aussitôt "ça veut pas dire que si ils ont la même dimension, ils ont pas la même aire". Peut-être fait-il allusion au fait que Véronique n'a trouvé qu'une "dimension" commune. Peut-être est-ce plutôt au fait qu'on ne peut pas tirer de conclusion sur les aires de relations entre les longueurs. Il se met à quadriller le rectangle avec des carrés de 1 cm de côté.

Pendant ce temps, Véronique a mesuré les autres côtés. Elle demande comment on fait pour calculer les aires. L'observateur fait remarquer qu'il n'a pas demandé de calculer les aires mais de les comparer. Véronique propose alors S_2 plus grand que S_1 parce que "là il fait 6 comme celui-là et là il fait 41/2 et l'autre ne fait que 4.

Alain commence à quadriller le parallélogramme à l'endroit où il peut placer des carrés entiers.



Véronique mesure les diagonales du parallélogramme, remarque que l'une d'elles est plus grande que l'autre.

Fig. 18a

L'observateur demande ce que fait Alain. C'est Véronique qui répond :

V. Il fait des carrés de 1 cm sur 1 cm ; il les reproduit sur l'autre aussi et après il va voir combien il va avoir de carrés, le plus grand et le plus petit. ... Mais là, comment il va faire ? (pour les pointes triangulaires qui restent)
Alain est gêné parce qu'une des pointes est plus grande que l'autre : il trouve 2 cm d'un côté et 1,5 de l'autre. L'observateur le rassure et le fait remesurer les carreaux et rectifier le tracé : on a bien 2 cm de chaque côté.
A. Si on rassemble les deux, ça fait encore un rectangle.
V. En fait, y'a pas tellement besoin de recouvrir tout parce que si là on arrive à autant de carreaux que là et qu'il reste de l'espace, y a pas besoin de continuer, on sait que c'est plus grand

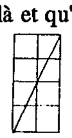
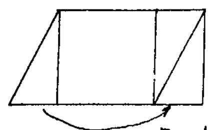


Fig. 18 b

Pendant ce temps, Alain rassemble les deux morceaux à côté pour faire un rectangle et termine son quadrillage.

Véronique est convaincue et annonce "ils ont la même aire mais pas le même périmètre".



Obs. demande si on pouvait le voir sans dessiner les carreaux. Véronique répète ce qu'a fait Alain. L'observateur demande de dessiner. Véronique et Alain dessinent le report du triangle sur leur parallélogramme avec une flèche.

Fig. 19

Dans cette équipe, Alain garde toujours la même position, et Véronique se laisse convaincre tout à fait à la fin quand elle voit qu'on va refaire des carreaux entiers ; on a un indice de son changement de conviction quand elle dit "ils ont la même aire, mais pas le même périmètre" ; elle a vu où intervenaient les mesures qu'elles avaient faites. Il n'est d'ailleurs pas sûr que son changement de conviction se serait produit avec le seul découpage et recollement, sans quadrillage.

En fait, plusieurs convictions coexistent souvent chez le même élève. Pour certains groupes, on assiste même à un va et vient des arguments contradictoires repris tour à tour par l'un ou l'autre des deux partenaires. C'est ce qui se passe pour Sami et Stéphanie P. dont nous décrivons le travail ci-dessous. Le début de l'entretien n'a hélas pas été enregistré.

Sami et Stéphanie P ont commencé par mesurer les dimensions. Stéphanie annonce : "S_1 et S_2 ont les mêmes aires" ; Sami "S_2 est plus grande".

St. "S_1 et S_2 ont à peu près la même hauteur"

Sami on a mesuré, on a multiplié Lxl pour trouver l'aire ... la mesure de la surface ... combien de cm^2

L'observateur demande où sont les cm^2 et demande d'en dessiner un[3]. Sami dessine un carré de côté 1 cm dans le coin en haut à gauche du rectangle et annonce 27 cm^2 pour S_2.

Stéphanie explique qu'on peut faire un rectangle avec le parallélogramme "mais il faudrait découper". Elle dessine .

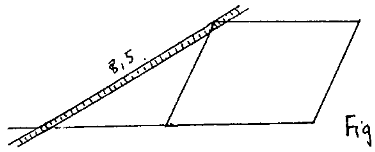


Fig.20

Sami répète "on multiplie L et l et on obtiendra l'aire". Il commence "4,5...

St. Non 4, parce que c'est droit, avant c'était penché
S. on obtiendra 27
St. non 24. Ça peut être plus ou moins penché, ici il y a 8,5 cm (elle pose sa règle en travers à partir d'un sommet du parallélo-gramme)

Sami dessine alors sur une feuille de papier blanc un parallélogramme de 6 sur 7 avec les côtés parallèles à ceux de S_2 (à l'œil). Ils sont d'accord pour dire que ce n'est pas pareil que S_2. On revient au dessin de Stéphanie

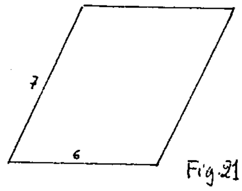


Fig.21

S. Ils n'ont pas la même aire, mais si on les met en rectangle, ils ont la même aire.
Obs. Alors, est-ce que l'aire a changé quand on a enlevé ce morceau-là et qu'on l'a mis là ?
S. oui
Obs. L'aire a changé ?
S. oui, parce qu'avant ça faisait 27
Obs. qu'est-ce que c'est l'aire ? Pourquoi tu dis qu'avant ça faisait 27 ?
S. on a mesuré
Obs. et alors ? qui t'a dit qu'il fallait multiplier pour trouver l'aire ?
S. on l'a appris en classe
Obs. Ah ? pour une figure comme ça ?
S. Ah non, pas pour une figure comme ça
...
Obs. Dessinez les cm^2
...
S. Faut peut-être additionner ?

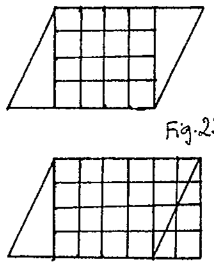


Fig.22

Ils pavent le carré central avec des cm^2 carrés. Sami en compte 16. Stéphanie prévoit que "ça fera 24 parce que si on devait décalquer ce côté là et qu'on rajoute là, ca fera aussi des cm^2" . Sami rassemble les deux pointes sur le dessin et compte : 16 et 8, ça fait 24.

St. C'est la même aire que la figure 1

Ils n'ont pas l'air vraiment convaincus.

Obs. Ça a l'air de vous étonner
St. C'est pas vraiment étonnant, c'est parce que les traits de la deuxième figure sont plus ou moins penchés alors on aurait pu faire un quadrilatère comme ça (elle montre)
Obs. C'est ça, fais-en un très penché, je te donne un crayon de couleur.
St. On aurait pu l'allonger sur toute la feuille, de là à là, il y aurait pas vraiment 4 cm.
Obs. Oui, et est-ce que l'aire serait conservée ?

Stéphanie a du mal à dessiner le deuxième côté penché du parallélogramme, d'autant plus que toutes les figures se chevauchent. Finalement, l'observateur demande comment Sami avait fait tout à l'heure pour dessiner sur le papier blanc le parallélogramme de 6 sur 7. Il répond qu'il avait mesuré 6 et 6, 7 et 7. Stéphanie mesure 6 à partir de l'extrémité en bas à gauche du "trait penché" et finalement termine le parallélogramme

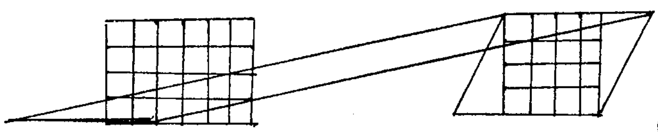


Fig.23

Obs. repose la question de l'aire pour la nouvelle figure (dessinée en vert)

Sami et Stéphanie sont d'accord "elle sera plus grande"

St. 6x14 au lieu de 6x4, il y a quand même 10 cm de plus.
S. Ah non, ça marche pas comme ça, parce que là on avait fait... 4 et demi fois 6 et on trouvait... comme aire, ça faisait 24

[3] L'observateur attend attend que Sami dessine un carré de 1 cm de côté mais il attend aussi qu'il puisse dessiner des cm^2 de formes différentes de façon à relier son calcul au pavage : il devrait être amené à découper le carré de côté 1 cm pour paver S_2.

St. Si, ça se pourrait ... on pourrait faire un trait ici et cette partie là on la découperait et on la mettrait ici

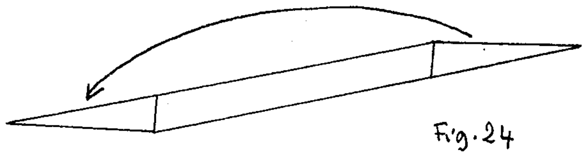
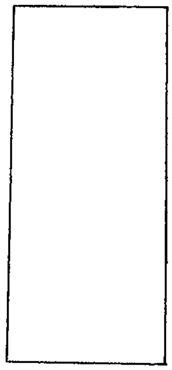


Fig. 24



on obtiendrait un rectangle et puis on aurait...
Obs. Comment on ferait pour obtenir un rectangle ?
St. On mesure 6 cm à partir du haut de la surface 1...(silence)
L'observateur demande de dessiner un rectangle de 6x14.
Sami le dessine.
St. Ah non, c'est pas pareil !
Obs. Est-ce que c'est la même aire ?
S. et St. Ah, non, pas du tout !
Obs. C'est quoi l'aire ?
St. la longueur multipliée par la largeur
Obs. Toujours ?
St. non, ou bien la longueur multipliée par la hauteur
Sami Oh !
St. Ben si, là ...

Fig. 25

L'observateur les interroge sur ce qui a été fait en classe sur les aires. Les enfants parlent des pavages. L'observateur demande si on a pavé ici. On revient à S_1 et S_2. Sami pave le rectangle S_1. Pour le parallélogramme (déjà pavé en déplaçant un triangle), Stéphanie prévoit 27 parce qu'il y a 4 et demi. Sami est d'accord, puis :

S. Non, je crois pas que c'est ça
Obs. Faites-le, on va compter
Cette fois, ils comptent les carreaux à l'intérieur du parallélogramme : 20 carreaux entiers plus les petits bouts. Sami prévoit que ça fera 24.
St. Mais je comprends pas très bien parce là normalement, y a 4 cm et demi et puis...
Obs. Est-ce que c'est ça qu'on compte ? Est-ce que c'est les longueurs qu'on compte ?

Sami finit de compter les petits bouts et annonce "ça fait 24".

Stéphanie compte à son tour en rassemblant deux morceaux pour faire des carreaux entiers et trouve 24.

On revient à l'effet du découpage-recollement en revenant à la première séance de classe sur les aires. Finalement, les élèves concluent qu'en déplaçant le triangle, on n'a pas changé l'aire. Ce qui a changé, c'est le périmètre

On voit ici que, pour Sami, l'aire c'est d'abord un nombre obtenu par un calcul : il considère même que l'aire peut changer par découpage et recollement. Remarquons que Sami est justement l'élève qui s'était ramené au calcul pour la comparaison des surfaces, dès le début de l'introduction de la mesure : il avait calculé les aires du rectangle bleu et du rectangle rouge et substitué leur valeur dans les résultats du pavage. Nous lui avions alors fait expliciter au tableau l'unité d'aire correspondante (carré c) mais il n'était pas évident à ce moment que, pour Sami, le calcul ait besoin d'être validé par le pavage en c. La conception de Stéphanie est en revanche attachée principalement au découpage et recollement. Cependant, on voit ici comment le fait d'envisager le cas extrême où le deuxième côté du parallélogramme s'allonge démesurément a remis en question les convictions de Stéphanie. Elle a pris cet exemple pour persuader son partenaire que la longueur n'avait pas d'importance, que l'essentiel était que le découpage du parallélogramme permette de reconstituer le rectangle. Sur ce cas, le découpage et recollement est mis en défaut, elle n'arrive pas à reconstituer un rectangle ; elle change alors complètement de point de vue, au point de ne pas reconnaître que le pavage de S_2 est déjà fait, alors que c'est elle-même qui a suggéré le regroupement des morceaux à Sami.

Il est possible que cet entretien ait servi aux deux enfants à réorganiser leurs connaissances : en effet, au test écrit, un mois plus tard, Stéphanie fournit des réponses correctes à toutes les questions. Sami fait 3 erreurs sur 31 réponses, et des erreurs qui ne sont pas dues à la notion d'aire. Remarquons c'est dans ce groupe que le conflit entre conceptions a été le plus net ; il était de plus spontané et s'est manifesté dès le début de l'entretien.

1.2.3. Changements de conviction : le découpage et recollement et le comptage de carreaux.

La reconnaissance d'une transformation de figure par découpage et recollement ou le pavage des surfaces données avec des surfaces d'aire 1cm² sont souvent des éléments déterminants dans l'émergence d'un conflit de conceptions. Nous verrons dans les extraits proposés qu'ils sont souvent importants pour provoquer les changements de conviction. Si l'on excepte le grand moment de doute de Stéphanie P. dont nous avons rendu compte ci-dessus, le découpage et recollement et le comptage de carreaux sont des procédures fiables : les élèves ne contestent pas un résultat obtenu de cette manière.

Cependant, ils ne suffisent pas toujours à rejeter d'autres procédures comme le calcul ou la déformation qui reposent sur des convictions profondes. Nous allons donner deux exemples : dans le premier la contradiction arrive par le comptage de carreaux, dans le second le découpage et recollement est interprété d'une façon qui renforce la conviction de départ.

François est binômé avec Pascale (cf paragraphe premières procédures). Il emploie une procédure "calcul" et trouve que l'aire de S_2 est plus grande que celle de S_1 puisque 27 > 24. Il explique à Pascale qu'elle mesure le périmètre même si elle mesure "à l'intérieur" ; il est quant à lui persuadé que l'aire, c'est le produit des dimensions : ils ne sont pas d'accord et quand l'observateur lui demande de quoi on est sûr, il répond : "qu'il faut multiplier la longueur par la largeur pour trouver l'aire". A la demande de l'observateur d'expliquer les calculs, il quadrille le rectangle en cm² et explique à Pascale pourquoi on a 24 cm².

Pour ce groupe, l'entretien s'est fait en deux temps pour des raisons d'horaire. A la deuxième séance, on fournit les surfaces sur papier quadrillé.

François veut quadriller le parallélogramme comme il l'a fait pour le rectangle la première fois. Il compte 20 cm², 4 fois $\frac{1}{2}$ cm² et rassemble 4 petits triangles pour faire encore 1 cm² de chaque côté, ce qui fait finalement 24 cm². Avant de compter, il avait écrit 27 sur S_2 ;

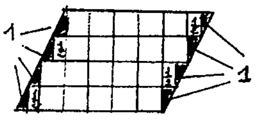


Fig.26a

il annonce "j'avais multiplié 6 par $4+\frac{1}{2}$", ... "je me suis trompé dans mon calcul quand j'ai multiplié".

L'observateur lui demande de dessiner un rectangle de 6 sur $4+\frac{1}{2}$ (sur papier quadrillé) et de compter les cm². On vérifie par le calcul et sur le dessin que $6x(4+\frac{1}{2})$ = 27.

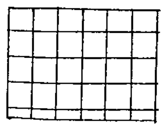


Fig.26b

L'observateur leur demande si le rectangle de 6 sur $4+\frac{1}{2}$ a la même aire que S_2. François répond d'abord oui ; il faut redonner les mesures en cm² qu'ils viennent de trouver pour que les élèves changent d'avis. Ils ne savent pas d'où provient la différence.

L'observateur leur demande alors de dessiner un parallélogramme qui a toujours les mêmes "dimensions" mais beaucoup plus penché (sur papier quadrillé. On compte les cm². Il y en a $5+\frac{1}{2}$.

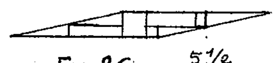


Fig.26c

Enfin, le changement de conviction commence à s'opérer : François déclare "plus c'est penché, moins il y a de carreaux à l'intérieur". A partir de là, la seule procédure utilisée par François pour les comparaisons sera le dénombrement de cm² qu'il dessine sur la surface. Pascale compte les carreaux du quadrillage (petits carreaux).

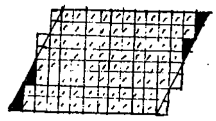


Fig.26d.

Laure et Sophie commencent par une procédure calcul et ne semblent pas prêtes à remettre en question les résultats du calcul (voir paragraphe 2). L'observateur, leur demande alors :

Obs. Je regarde la figure S_2 est-ce que je pourrais, ... si j'avais une paire de ciseaux... mais enfin là on n'a pas de paire de ciseaux alors on va simplement l'imaginer, ... découper la figure S_2 mais l'arranger autrement pour fabriquer un rectangle ? ... C'est pas un rectangle, la figure S_2, S. et L. non, non Obs. vous êtes d'accord avec moi ? S. et L. oui
Obs. Qu'est-ce qui empêche que ça soit un rectangle ?
S. C'est parce qu'il est de travers
Obs. Il est de travers. Qu'est-ce qu'il faudrait pour que ce soit un rectangle ?
S. Il faudrait que ça soit droit L. Il faudrait que ça soit droit, ces deux côtés là
...
Obs. Est-ce que je pourrais, en découpant S_2 en découpant d'une certaine manière, et en recollant autrement, est-ce que je pourrais fabriquer un rectangle avec S_2 ?
L. Ben oui...
Obs. dites-moi comment vous feriez
L. Il suffit de découper cela en petites bandes fines et de mettre dans une autre position
Obs. ben vas-y, montre-moi comment tu ferais, comment vous feriez
L. On ferait des petites bandes comme ça (elle dessine) ... et celles qui seraient au-dessus, on les mettrait plus droites, comme ça (elle montre un glissement).

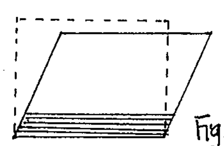


Fig.27

Obs. Ah, d'accord... (silence) et alors, dis-moi, imagine que tu puisses faire ça, découper tes petites bandes fines et les mettre plus droites, tu voudrais les décaler, c'est bien ça ? les pousser pour les mettre bien au-dessus ? (à Sophie) tu es d'accord avec sa manière de faire ? ça te plaît ? Ecoute-moi alors, est-ce qu'en faisant ça, tu changes l'aire ? L. non
Obs. en découpant tes petites bandes et en les poussant L. ben non Obs. tu as du papier, tu découpes...
S. ça aura la même aire, sauf que ça aura pas la même forme L. Ben oui, puisqu'on aura pris exactement les mêmes bouts
Obs. les mêmes bouts de papier... donc ça aura la même aire
L. normalement oui
Obs. et il sera comment le rectangle auquel t'arrives à la fin ?
L. ben, il serait comme ça
Obs. dessine-le, le rectangle auquel t'arrives, dessine-le sur celui là (sur S_2) Laure dessine (dessin en pointillé)

Obs. et qu'est-ce qui va arriver au-dessus, là ?
L. Ah! c'est plus haut !
Obs. est-ce qu'il doit être plus haut ?
L. ben oui
Obs. ben, qu'est-ce qui va arriver au-dessus ?
L. c'est plus haut parce que ça, ça se redresse comme ça ... on dirait un livre !
Obs. oui, mais, tu pousses tes bandes ... et c'est normal que ça arrive plus haut tu crois ?
L. ben oui, parce que ça part comme ça, c'est normal ... S. ben oui...
L. ça part en cercle, alors...
Obs. Ah! alors, c'est ce trait là que tu redresses !
L. oui, c'est celui-là !
Obs. et tu le redresses en gardant la même longueur
L. oui et celui-là, il part en même temps... parce que si je pousse celui-là, les autres vont partir
Obs. mais tes largeurs de bande, elles vont se mettre comment ?
S. ça serait exactement la même aire L. ben elle devrait rester pareil S. parce que ça se voit à l'œil même si c'est la même aire, parce que, si on reporte droit, si on reporte sur le carré, ça fera pareil, exactement pareil, ça se voit à vue d'œil que c'est la même aire ... L. il suffit de dire que c'est un livre puisque ça a l'apparence d'un livre S. ben oui L. ça, c'est droit, ça c'est de travers, on replie ça sur l'autre bout et c'est ... et ça fait exactement pareil
S. ça a exactement la même aire L. ben oui, il suffit de prendre un livre, on le met comme ça

L'observateur va chercher un livre et demande de regarder les deux morceaux : est-ce qu'on a des parallélogrammes ?

S. ben, non c'est des carrés, mais admettons que ... si le livre était cassé en deux, que l'autre soit de travers, si on remet droit...comme ça, voilà, ça serait exactement pareil !

Elle ouvre le livre devant elle et le place pour que le dessin corresponde à une représentation en perspective du livre ouvert

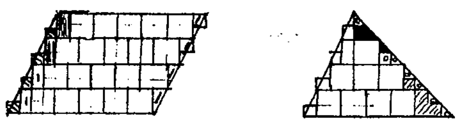
L. le dessin, pour moi, il est comme ça, et là il est beaucoup plus bas ! il est de travers
S. mais si tu le retournes, ah ben non, ça change rien
Obs. oui, mais, il est pas de travers, en vrai
S. c'est comme si, ça, c'était de travers
Obs. est-ce qu'il est de travers ?
S. ben, oui, si on le remet dessus, ça ferait exactement pareil
Obs. oui, mais il est pas de travers là pour l'instant, moi je vois que j'ai des angles droits...
S. si il est comme sur le dessin, si on le remet tout droit, ça fait pareil
L. regardez, c'est bien ce que je dis ... (inaudible)

L'observateur reprend le problème par l'autre bout et dessine sur une feuille de papier quadrillé un rectangle superposable à S_1 et demande si on peut découper un morceau et le recoller pour fabriquer une figure comme S_2

S. éventuellement oui, si on le pose comme ça
L. en tous cas, l'aire c'est impossible
S. avec celui-là, il faudrait voir parce que si on le pose de travers ça irait peut-être
L. non, de toute façon, t'as qu'à regarder l'aire hein, Sophie

Elles remesurent les dimensions et concluent "non ça peut pas aller , y'a un demi-centimètre de trop". L'observateur passe alors à une autre question : la recherche de relations éventuelles entre les surfaces. Sophie et Laure trouvent qu'on peut reporter deux fois S_3 sur S_1 et deux fois S_4 sur S_2, ce qui permet de remettre en doute les valeurs numériques trouvées au début. On passe aux surfaces dessinées sur papier quadrillé. Sophie et Laure évaluent sans trop de peine les surfaces en cm² en regroupant des morceaux de cm². Elles mettent des marquages différents pour chacun des cm² obtenus à partir de plusieurs morceaux.

Fig. 28



Ce travail permet d'arriver aux relations correctes entre les aires. On reprend les figures sur papier blanc et le découpage des petites bandes :

Obs. tout à l'heure tu me disais que si tu repoussais tes petites bandes, ça devrait faire ce rectangle là
S. et L. oui, oui oui, c'est ça
Obs. tu penses toujours ça ?
L. oui, à mon avis
Obs. oui, mais ce rectangle que tu as dessiné là, est-ce qu'il a la même aire que celui-là (S_1) ?
S. et L. non
Obs. alors est-ce que tu crois que ça devrait faire ce rectangle là finalement ? S. et L. non
Obs. lequel ça devrait faire quand on repousse toutes les petites bandes ?

Elles répètent les relations trouvées (S_1, 2 fois S_3, 2 fois S_4). L'observateur leur demande de dessiner avec un stylo de couleur sur la figure. Laure le fait. L'observateur demande alors ce qui se passera en repoussant les bandes

L. (ça se transformerait) en le vert ... parce que en repoussant les bandes ... celle-là ira là, là, là ... ça ira tout droit donc ça fera le S_1.

L'observateur explique que c'est la hauteur qui est conservée et non la longueur du côté et propose de découper un triangle. Elles sont d'accord immédiatement et colorient le triangle qu'il faut déplacer pour transformer S_1 en S_2.

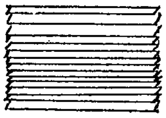


Fig. 28 bis

Dans le glissement des petites bandes, les élèves pensent que l'aire et la longueur doivent être conservées : elles ont l'idée que ni l'aire ni la longueur ne devraient changer dans un déplacement mais elles n'ont pas vu que, dans ce déplacement, les bords verticaux seraient "en zigzag" et plus longs même que le bord penché du parallélogramme, mais qu'on ne pouvait déplier le bord sans augmenter l'aire.

Nous avons renoncé à attirer leur attention sur cette complication. Cependant, on ne peut pas échapper au déplacement du triangle et, du même coup, au remplacement de l'hypoténuse par un côté de l'angle droit sur le bord. Cela nous paraissait plutôt plus difficile à voir sur les petites bandes que sur le parallélogramme de départ, c'est pourqoi nous concluons de cette façon.

1.2.4. les autres éléments qui contribuent à faire changer de conviction

Les changements de conviction ne s'opèrent qu'au moment où les élèves commencent à voir d'où pouvait venir la contradiction et ce qu'il y avait quand même de juste dans leur raisonnement faux. Plusieurs éléments peuvent être pris en compte :

a) ***La "mesure droite" et la "mesure penchée"***

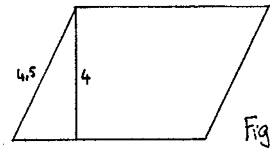


Fig. 16

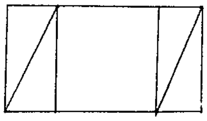
Nous avons vu que la question de savoir où mesurer la deuxième dimension du parallélogramme se pose (Stéphanie L et Fabienne) et il arrive que les élèves soient très étonnés de constater que le "côté droit" (hauteur du parallélogramme) mesure 4 cm alors que le côté penché" mesure 4,5 cm.

Pour Sami et Stéphanie, cela a été le point de départ pour lever la contradiction : l'aire est bien le produit de deux longueurs, mais ce n'était pas la longueur du côté qu'il fallait mesurer

Cette différence entre la "longueur droite" et la "longueur penchée" peut dans un premier temps être un argument pour rejeter le découpage et recollement.

Malika commence par dessiner les hauteurs interne et externe dans le parallélogramme puis les efface

Fig 29



Obs. Pourquoi tu effaces ?
Ma. parce que ça va pas, ça fait pas le même nombre
Obs. qu'est-ce qui fait pas le même nombre ?
Ma. parce que là j'ai 4 et demi et si je le mets là ça fait 4.

Pendant ce temps Michaël développe une procédure "calcul". L'observateur lui fait "dessiner les cm²". Malika continue de son côté en cherchant des relations entre les aires des surfaces : elle trouve que S_3 se reporte 2 fois sur S_1 et que S_4 se reporte 2 fois sur S_2. L'observateur demande alors qu'on s'intéresse à nouveau à S_2.

Ma. Si on enlève cette moitié Obs. oui, c'est pas une moitié, hein, ce morceau Ma. si on enlève ce morceau et qu'on le rajoute là, ça fait toute la figure S_1. Obs. oui, si on enlève ce morceau et qu'on le met là, ça fait la figure S_1, bon... alors qu'est-ce que tu en penses ? et à part ça, tu as marqué 27 là, qu'est-ce que ça veut dire ?
Mi. pourquoi c'est pas la même aire ?
Obs. Ah... (silence) ... et pourquoi tu avais marqué 27, toi Malika ?
Ma. parce que j'ai calculé combien ça faisait, j'ai multiplié cette mesure là par cette mesure là (elle montre le 4) Obs. par celle-là ? cette mesure là, c'était combien ? Ma. 6
Obs. et celle-là ? Ma. ah, non celle-là Obs. ah! Ma. 4 et demi.

Les enfants sont persuadés que l'aire ne devrait pas changer par découpage et recollement, mais ils ne comprennent pas pourquoi le calcul n'est pas juste. Malika émet une hypothèse :

Ma. peut-être que ils ont pas été... par exemple celui-là on l'a mesuré en petit c et puis celui-là on pourrait avoir mesuré en petit b ou...
Obs. ah... parce que... qu'est-ce qu'il représente ce 27 ? oui, mais lui, il a marqué 27 cm²

Pour Malika, la conservation de l'aire par découpage et recollement l'emporte sur le résultat de son calcul, et elle émet une hypothèse d'explication très intéressante : peut-être que l'aire du parallélogramme n'a pas été mesurée en c mais avec une autre unité, ce qui est parfaitement raisonné. Malheureusement, l'observateur ne reprend pas cette proposition qu'il n'a peut-être pas bien comprise, et aussi sans doute parce que Michaël, lui, a écrit 27 cm² et qu'il en conclut que les aires sont différentes. Il repose la question "est-ce que S_1 et S_2 ont la même aire ?"

Mi. non
Obs. quand on découpe ce petit bout là et qu'on le met là, on change l'aire ?
Mi. normalement, ça devrait pas changer

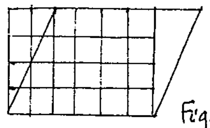


Fig.30

L'observateur demande aux élèves de dessiner les cm² dans S_2.
Michaël dessine de cette façon
Ils concluent qu'il y a 24 cm² dans S_2 comme dans S_1.

Ma. 24 ... parce que ce morceau là, il sera pareil, sauf qu'il sera pas placé au même endroit.

Michaël est d'accord mais il éprouve le besoin de vérifier les mesures. L'observateur le rassure :

Obs. ça fait bien 4 et demi, pourtant ça fait bien 4 et demi mais comme t'a dit Malika, là, ça fait 4 et demi, mais là, ça fait 4. ... qu'est-ce qui n'allait pas ?
Mi. parce que cette mesure était plus grande que cette mesure-là
Obs. pour calculer l'aire, est-ce qu'on pouvait multiplier les mesures ? est-ce qu'on pouvait multiplier les mesures des côtés de S_2 pour calculer l'aire ?
Mi. oui.

L'observateur reprend avec lui l'explication de la multiplication dans le cas du rectangle et montre à Michaël que, par déplacement d'un triangle, on aurait pu fabriquer un parallélogramme de même aire que S_2 mais avec un côté beaucoup plus penché. Michaël convient que le côté aurait été beaucoup plus long et paraît maintenant convaincu.

Un des élèves donne une explication du phénomène "longueur penchée plus grande que longueur droite" qui nous montre ce qui est pour lui le fondement de la procédure "déformation" (voir au paragraphe e, Manuel)

b) ***le papier quadrillé***

Le passage au papier quadrillé ou le dessin d'un quadrillage sont souvent un des éléments importants dans le changement de conviction, même si cela ne suffit pas (voir François ou Michaël).

Pour Frédéric, ce passage a été déterminant : Frédéric dispose des figures sur papier blanc, Rémi des figures sur papier quadrillé. Ils démarrent tous les deux la comparaison de S_1 et S_2 par une procédure calcul. L'observateur demande comment on pourrait vérifier ces résultats de 24 et 27 cm².

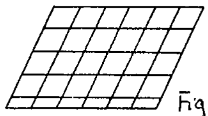


Fig.31a

Après avoir quadrillé le rectangle, Frédéric remarque que ça ne va pas marcher pour S_2 parce qu'il restera les deux triangles, "à moins de faire les carrés de biais". Il quadrille ainsi son parallélogramme avec des parallélogrammes, Rémi dessine les cm² sur ses surfaces en se servant du quadrillage. Frédéric trouve bien 27, Rémi trouve 24.

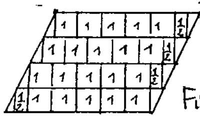


Fig.31b

Frédéric demande alors du papier quadrillé vierge pour refaire la figure de Rémi. Il fait la rangée du bas et s'arrête, s'aperçoit qu'il peut grouper le quart d'un côté avec les trois quarts de l'autre et trouve qu'il a 6 cm² par rangée et 4 rangées identiques, que ça fera 24. Cette constatation le déconcerte : "ça fait 24... je comprends plus rien, il y a quelque chose qui va pas là". La transformation de S_2 en S_1 par découpage et recollement le sécurise un peu.

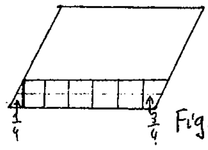


Fig.31c

Nous avons vu également que le pavage du rectangle et du parallélogramme peut amener les élèves à rassembler les deux pointes triangulaires du parallélogramme pour obtenir des carreaux entiers et ainsi utiliser le "découpage recollement" comme outil, sans que cela suffise toujours à rejeter les modèles erronés (voir Michaël).

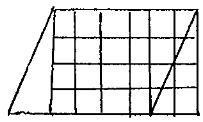


Fig.30

c) ***"pencher plus" le parallélogramme***

Pour d'autres (procédure déformation), le changement de conviction s'opère souvent quand on leur propose de "pencher" de plus en plus le parallélogramme en gardant fixe la longueur des côtés jusqu'à ce qu'il soit évident que l'aire est devenue très petite. Il faut d'ailleurs noter la résistance des élèves à pencher au-delà d'un certain seuil pour aboutir à des dessins comme celui-ci où on ne peut plus parler de "côté vertical":

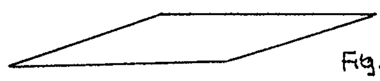


Fig.32

Tout se passe pour certains enfants (voir par exemple Olivier ou Georges) comme si l'aire ne changeait pas quand la déformation n'est pas trop importante et qu'elle ne change qu'après un certain seuil.

Olivier et Nathalie ont trouvé assez vite les relations entre S_1 et S_3 d'une part, S_2 et S_4 d'autre part. On en vient à S_1 et S_2 que les élèves trouvent "presque pareilles". Sur demande de précision

O. différentes
N. parce que là, il y a 5 mm en plus
Obs. qu'est-ce que c'est l'aire ?
N. c'est la longueur multipliée par la largeur
Obs. c'est ça l'aire ? la longueur multipliée par la largeur ?
O. c'est tout ce qui est dedans ... ce qu'il y a dedans là et là, c'est pas pareil
Obs. pourquoi ?
N. là c'est un peu plus grand

Obs. qu'est-ce qui te fait penser cela ?
O. à cause des 5 mm

A ce moment là, l'observateur fournit les surfaces sur papier quadrillé. Nathalie propose de compter les carreaux pour vérifier, Olivier trouve que ça va mettre trop de temps. L'observateur demande alors si l'aire sera conservée si on déforme S_2 en gardant les dimensions 6 et 4 et demi. Les enfants pensent que oui. L'observateur demande de dessiner un parallélogramme encore plus penché. Olivier pense que ça ne changera rien, Nathalie que ça ne donnera pas la même aire.

On leur demande de le faire sur une feuille de papier quadrillé. Le tracé n'est pas évident à réaliser : c'est difficile de garder le parallélisme. Ils produisent le dessin ci-contre. Olivier pense que c'est pareil, Nathalie pense que l'aire a diminué.

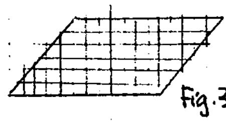


Fig.33a

L'observateur demande alors à Olivier d'en faire un autre, encore plus penché. Olivier change à peine l'angle que fait la règle avec l'horizontale :
il faut lui répéter 3 ou 4 fois "encore plus" "vraiment très penché", en lui parlant de barres articulées pour qu'il accepte de faire un dessin comme celui de la figure ci-contre

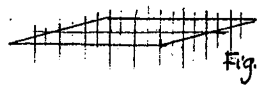


Fig.33b

O. c'est pas du tout pareil, et pourtant, là (figure précédente) on dirait qu'il y a autant de petits carrés dedans (que S_2).

Ils concluent que la seule manière de s'en tirer est de compter les carreaux.

Leur conviction de l'égalité des aires de S_1 et S_2 sera bien plus grande quand ils auront vu qu'on obtenait S_1 par découpage et recollement à partir de S_2 et qu'on a deux manières de pencher les côtés d'un rectangle pour en faire un parallélogramme : celle qui conserve les longueurs des côtés, celle qui conserve la largeur de la bande : pour celle là, le découpage et recollement nous assure de la conservation de l'aire :

Obs. Est-ce qu'on aurait pu le voir autrement qu'ils ont la même aire, sans compter les carreaux ?
N. oui, mettre ces traits là droits comparer

Elle le fait sur S_2 et découvre à ce moment là que la transformation revient à un découpage et recollement ; Olivier remarque qu'on a maintenant 4 cm au lieu de 4 cm et demi

N. il faut faire 6, donc là,on arrête là, et puis ... et là ça fait pareil, et puis comme ça, on le met là, et ça c'est pareil donc ils ont la même aire
O. et là aussi, y'a 4 cm, tout à l'heure y'avait 4 cm et demi
...
Obs. et ça t'étonne qu'il y ait 4 cm là alors que là y'avait 4 et demi
N. ben non, c'est pas étonnant parce que là, on en a rajouté
...
O. quand ils sont droits, ça fait 4 cm et quand on les penche, y'a 5 mm en plus
Obs. et penche encore un peu plus
O. eh ben y'aura de plus en plus de mm
Obs. et si on penche beaucoup beaucoup en gardant les mêmes droites ? ... en gardant le même écart de 4 O. et N. ça va être beaucoup plus grand
Obs. finalement qu'est-ce qui compte pour l'aire ?

Ils pensent que c'est le 6 cm qui compte, de l'autre côté, ils ne savent pas trop ; finalement l'observateur les aide à formuler que ce qui compte de l'autre coté, c'est l'écart, 4 cm et non 4 et demi, puis dessine sur la feuille quadrillée, un parallélogramme en conservant l'écart de 4 cm entre les côtés horizontaux et leur longueur de 6 cm mais en faisant un côté beaucoup plus penché et donc beaucoup plus long (6 cm et demi)

Obs. Est-ce que ça va être la même aire ?
N. ben oui parce que ... y'aura le même nombre de carreaux dedans ...
Obs. y'aura le même nombre de carreaux dedans, pourquoi ?
O. ben non, tout à l'heure on nous l'a démontré
Obs. oui, mais attention, tout à l'heure y'avait quelque chose qui avait changé aussi, est-ce que j'avais gardé la même distance entre les droites ? O. et N. non Obs. là, j'ai fait attention de garder la même distance ... alors est-ce qu'il aura la même aire ? comment on peut le voir sans compter les carreaux ?

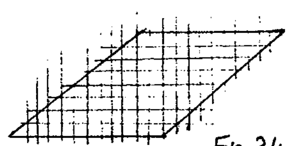


Fig. 34a

O. en multipliant ... Obs. non... N. en le reproduisant... Obs. est-ce qu'on peut avec cette figure refaire un rectangle ? N. oui (elle le fait) O. c'est pareil Obs. est-ce que la figure que j'ai dessinée a la même aire que ce rectangle ? N. oui, parce que là, on a toujours fait 6 et là, y'avait 6 aussi et là, y'avait 6 et demi ...

Ils sont sûrs que l'aire est la même mais n'arrivent pas à expliquer pourquoi : sur cette figure penchée, la correspondance entre les deux triangles est plus longue à apparaître mais Nathalie la formule

N. mais ce bout là, c'est le même que celui-là, si on reproduit ça sur ça, il restera cette partie, et puis cette partie là, si on la rajoute à ça, ça fera un rectangle
Obs. est-ce qu'on pourrait le faire avec des ciseaux ? O. et N. oui
Obs. alors, est-ce qu'ils ont la même aire ? O. et N. oui

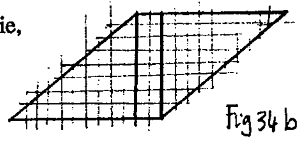
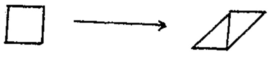
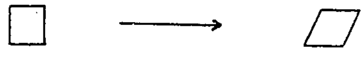


Fig 34 b

d) ***les côtés des parallélogrammes d'aire 1 cm² ne mesurent pas tous 1 cm***

Un autre moyen de remettre en question les convictions de départ, en particulier pour ceux qui justifient le calcul avec un pavage de S_2 par des petits parallélogrammes de 1 cm de côté, consiste à pointer la différence entre les 2 parallélogrammes "unité" :

- celui qu'on obtient par découpage et recollement à partir du carré de côté 1 cm a une aire de 1cm² mais ses côtés ne mesurent pas tous 1 cm,
- celui qu'on obtient par déformation : tous ses côtés mesurent 1 cm, mais son aire est plus petite que 1 cm².

 Fig.35a  Fig.35b

Par exemple Georges et Muriel ont démarré sur papier blanc. Georges fait tout de suite référence à une procédure "déformation". Les mesures des côtés les confirment dans l'idée que $A_2 > A_1$ "si on le mettait droit, ça dépasserait". L'observateur leur demande si ça garde la même aire "en mettant droit". Georges pense que oui, Muriel ne sait pas . L'observateur leur parle de barres articulées, leur demande ce qui se passe pour l'aire quand on penche et leur demande de dessiner un parallélogramme qui ait des côtés de 6 et 4 et demi, mais très penché. Ils conviennent tous les deux que l'aire a changé, qu'elle est plus petite. Cela suffit à Muriel pour changer d'avis à propos de S_2 et dire que l'aire de S_2 sera plus petite que celle du rectangle qu'on a obtenu en redressant. Mais Georges n'est pas convaincu

M. A_2 si on le met droit, l'aire sera plus grande. ...
G. si on la met droite, elle sera pareille, l'aire
...
M. parce que déjà, celui-ci, il a beaucoup moins d'aire que celui-là.
...
Obs. si je penchais encore plus, je continue à pencher, qu'est-ce qui va se passer ?
G. ça rétrécit encore plus
Obs. ça rétrécit encore plus... et si finalement, cette barre là, je la fais toucher celle là, on va arriver à quoi ?
M. y'aura plus d'aire
G. c'est pas possible, si on la met là, elle s'arrêtera là, et puis celle-ci on est obligé de la couper.

Remarquons que Georges semble penser à une sorte de projection : DC doit recouvrir AB sans dépasser. Il continue à penser que quand c'est droit, c'est pareil. L'observateur demande à Muriel (Georges a un bras dans le plâtre) de dessiner sur la feuille de papier quadrillé ce qu'on obtient quand c'est droit. Elle le fait.

Obs. Comment on pourrait savoir si c'est la même aire ou pas, comment on pourrait être sûr ?
G. en faisant là-dessus 1 cm sur 1 cm et puis là-bas aussi
Obs. qu'est-ce que ça veut dire ? je ne comprends pas bien
G; 1 cm² ... ... un petit carreau vaut la moitié d'un cm² et si on en met 2, ça fait 1 cm², et il en faut 4 petits pour en faire 1 ...... après on dessine tous les carrés et puis on compte à la fin combien y'en a ensuite on fait exactement pareil ici.

On peut remarquer la confusion dans le langage de Georges entre les carreaux-bord et les carreaux-intérieur dans leurs relations entre les cm et les cm². Ils commencent à marquer les cm sur le bord du rectangle. L'observateur leur demande s'ils peuvent prévoir le résultat sans les dessiner tous. Georges le fait : il compte les carreaux sur le bord et dit :

G. on a 6x4, et puis il reste les demis, on en prend deux à chaque fois, ça fait 1 là déjà, encore 1 cm², encore 1 cm², ça en fait 3... là on pourra faire pareil, il faut mesurer
Obs. on a déjà mesuré, ça fait 6 et 4 et demi
G.ça va faire pareil alors
Obs. oui, mais comment vont être tes cm², là ?
G. Ah, ils vont être tordus

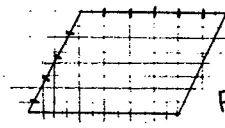


Fig.36

L'observateur demande d'en dessiner un qui ait cette forme là sur le papier quadrillé. Ils en dessinent un en coupant les carreaux en diagonale et vérifient que ça fait bien 1 cm² (4 carreaux)

G. ici, il y a déjà 2 carreaux, ça fait déjà la moitié d' 1 cm², et là il y a les petits bouts et si on les rajoute, ici on a un carreau, et ici un carreau aussi, 2 et 2, 4. ...
Obs. ...maintenant, vous allez mesurer les côtés de ce cm²
G. ça doit faire 1 cm
Obs. Ah, est-ce que ça fait 1 cm
G. non pas tous, ils doivent pas faire tous 1 cm.
Muriel mesure : 1cm, 1 cm et 3 mm
G. oui, il doit faire ça parce qu'il est penché ... Ah, oui, elle a raison Muriel, il est plus grand, il est plus grand... si il est droit, il est plus grand... Ah, non !
M. Ah,si !
G. il est plus petit, aussi ! ...

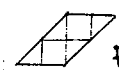


Fig.37

L'observateur propose de dessiner les cm² sur S_2, bien droits pour être sûrs

Georges pense qu'on ne peut pas les dessiner droits. Il commence à marquer des petits segments de 1 cm sur le bord. L'observateur lui demande si avec des longueurs de 1 cm sur le bord, il va faire des cm². Il convient que non mais résiste encore à faire des carrés. Muriel propose alors de multiplier (6 par 4 et demi). Georges remarque qu'on l'a déjà fait, que ça fait 27. Finalement Georges propose de découper S_2 et de le poser sur S_1. On n'a pas de ciseaux, on décalque. Cette fois, ils sont convaincus :

G. Ben, il est égal ! ... il y a le bout qui reste, et puis si on le découpe encore une fois, ça fera exactement pareil !

e) différenciation de transformations différentes

Pour Manuel, le changement de conviction s'opère, en appui sur le découpage et recollement, quand il se rend compte que faire tourner le triangle découpé au coin du parallélogramme amène une rupture, l'autre côté décolle. Manuel et Delphine ont démarré par une procédure "calcul" qui n'est pas exploitée jusqu'au bout parce que Delphine pose tout de suite le problème du triangle (voir paragraphe 1.1.2). Ils passent ensuite à la comparaison de S_1 et S_2 avec une procédure "déformation", sur une remarque de Delphine :

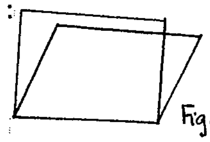


Fig.38a

D. celle-là, de travers, elle ressemblerait à celle-là, sauf qu'il y aurait un demi de plus
M. il serait plus grand
D. il a l'air pareil... non, on peut pas le faire sur la feuille
M. ce serait pas la même mesure (il dessine le rectangle S'_2)
D. si on le mettait comme ça
M. Ah! je comprends, parce que quand on met la règle comme ça, elle fait un certain nombre de cm, mais quand on la met comme ça, la mesure sera la même mais elle sera quand même plus petite
...

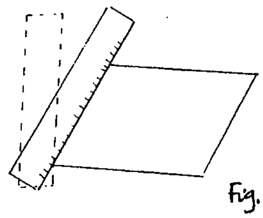


Fig. 38b

M. on part de 0, si on mesure ça, y'a 4 cm et demi, et quand on fait ça (il tourne sa règle), la mesure elle sera encore plus grande parce que, comme elle était en diagonale et qu'elle est exactement pareille que ça, alors quand on la met droite, elle sera plus grande, c'est normal... donc, si on le met comme ça, la mesure, elle fait 4 et demi, c'est normal qu'elle soit plus petite
Obs. oui, d'accord... si tu mets 4 et demi, tu veux dire que ce rectangle là (S'_2) est plus grand que ce rectangle là (S_1), c'est ça que tu veux dire ?
M. l'aire est plus grande D. oui, 1/2 de plus
Obs. oui, mais ce que je vous demande, ce n'est pas ce rectangle (S'_2), c'est cette figure là (S_2).
M. Eh, ben, justement, c'est cette figure là, mais améliorée en penchant comme ça
Obs. oui, mais est-ce que cette figure là (S'_2) a la même aire que cette figure là (S_2) ?
M. et D. non
Obs. cette figure là, en la redressant comme il a fait, est-ce qu'elle a la même aire ?
M. non, parce que, on fait ça, on la coupe comme ça, et ça fera un carré, et ces parties qui restent là, si on pouvait les mesurer...
D. on peut les rajouter
Obs. regarde ce qu'elle a fait, elle a commencé à essayer de faire ça

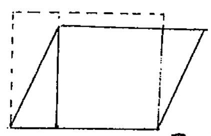


Fig. 39

M. eh ben, si on coupe comme ça, ça fait un carré et il faudrait essayer de mesurer ces parties là, les additionner à ça
Obs. oui, comment on pourrait faire ?
D. faudrait déjà mesurer
M. mais non, ce serait pas possible, parce que, tout à l'heure, on a dit que si on ferait ça, on aurait 3 dimensions
Obs. oui, mais là, regardez un peu, est-ce qu'on ne peut pas se débrouiller avec ces morceaux là pour l'aire ?
M. Ah! si, on part de là, comme Delphine a fait, on part comme ça et cette partie qui est là, il faudrait l'effacer et la partie qui est là, elle sera là
D. Ah oui !
M. donc elle fera presque la même aire, donc cette partie, elle serait effacée, ... elle serait barrée
D. ça, ça ferait ça

Dans cette partie, il semble que la première idée de Manuel et Delphine est que S_1 et S_2 ont à peu près la même aire : la déformation veut en être une justification ; ils se rendent alors compte des différences de longueur, ce qui a l'air de les faire pencher vers une conclusion $A_2 > A_1$, mais leur point de vue n'est pas très clair puisque Manuel affirme à la fois que S'_2 c'est S_2 améliorée et que S_2 et S'_2 n'ont pas la même aire. L'allusion au découpage recollement semble devoir emporter la conviction. Pourtant, s'il est sûr pour les deux élèves que le découpage recollement conserve l'aire (ils le répètent plusieurs fois), l'effet de la déformation n'est toujours pas clair et ils ne sont pas tellement sûrs que S_1 et S_2 ont la même aire tandis que S'_2 a une aire plus grande :

Obs. Est-ce que S_2 a la même aire que cette figure qui est dessinée là (S'_2) ?
D. je sais pas ...il faut mesurer Obs. sans mesurer
M. ça, ça fait 6... Eh... ce carré là il a la même aire que celui-là, parce que quand on fait ça, on trouverait 4... D. non M.en faisant ça, même quand on part de là, on voit que comme ça, ça fait 4, la mesure elle fait 4, quand on part de là, ça fait exactement pareil et ça exactement pareil et si on le coupe là, la mesure elle serait comme ça donc il ferait la même aire

On peut penser qu'en fait ici, Manuel est revenu à la comparaison de S_1 et S_2.

D. ça se peut pas, parce que quand on mesure comme ça, ça fait 4 et demi, donc c'est pas pareil
M. donc, si on fait ça, 4 et demi, ça fait presque mon petit doigt, alors on le remet comme ça, on le redresse, il serait plus grand, donc l'aire, elle arriverait au moins là
D. quand on le redresse, ça ferait la même aire que ça ...
D. quand on le redresse, c'est pas la même aire
...
M. Si, ce serait même la même aire quand on le redresse parce que si on redresse ce petit triangle là, la partie qui est là, elle se lèverait au moins jusque là et si on redresse, ça ferait au moins ça
D. ça peut pas être la même aire parce que en diagonale, c'est pas la même aire que tout droit
...

Une discussion s'engage entre Delphine et l'observateur pour pointer la différence entre une longueur qui se mesure avec une règle et une aire. Pendant ce temps, Manuel réclame une équerre qu'il place sur le dessin pour essayer de matérialiser le petit triangle

M. c'est la même aire, mais en mettant la diagonale, ce serait ... mais si, ce serait la même parce que si on redresse le triangle... on a du se tromper parce que quand on redresse le 4 et demi, il est là et quand on redresse comme ça, le 4 et demi, il est là, mais ça ferait exactement la même aire parce que cette partie du triangle, elle se lèverait aussi.

A partir de là, Manuel est vraiment convaincu que S_1 et S_2 ont la même aire. Delphine n'est pas encore convaincue :

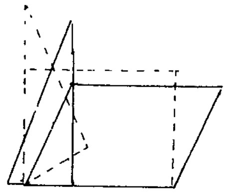


Fig. 40a

D. je ne comprends pas alors pourquoi on a trouvé 4 et demi là et là 4.

L'observateur reprend avec elle une discussion sur la différence entre les longueurs et les aires, mais c'est Manuel qui emporte sa conviction en faisant sur S_1 le découpage qui permet d'obtenir S_2.

M. sur l'autre rectangle, on peut voir que c'est la même aire parce que en prenant les deux comme ça, j'ai coupé exactement pareil
D. Ah ben oui ! alors, c'est la même aire !

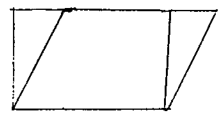


Fig. 40b

1.3. Les autres comparaisons

Deux groupes (Carole - Magali et Nathalie - Olivier) trouvent les relations entre S_1 et S_3 d'une part, entre S_2 et S_4 d'autre part dès le début, avant de s'intéresser à la comparaison de S_1 et S_2. Ces relations sont obtenues en remarquant qu'on peut reporter deux fois la surface S_3 sur S_1(resp. S_4 sur S_2). Dans le groupe Michaël - Malika, cette question a aussi été réglée très vite, avant celle de la comparaison de S_1 et de S_2 : Michaël avait tout de suite annoncé que $S_1 = 2\ S_3$ par le calcul des aires. Malika fait remarquer assez vite qu'on peut fabriquer S_2 avec deux exemplaires de S_4. Laure et Sophie ont aussi réglé cette question par report, avant celle de la comparaison de S_1 et S_2 laissée en suspens après l'épisode du livre ouvert (voir § 2.3). Pour les huit autres groupes, la comparaison de S_3 et S_4 aux autres surfaces ne s'est posée qu'après qu'ils aient conclu à l'égalité de A_1 et de A_2. Ceux qui avaient eu recours au comptage de carreaux pour cela l'ont utilisé à nouveau pour S_3 et S_4 : certains élèves ont marqué les cm^2 différemment pour faciliter le comptage, par exemple François et Laure. Pascale a coché à mesure ses petits carrés. (voir paragraphe 1.2.3. figures 26 et 28)

Dans presque tous les groupes les relations ont été trouvées à la fois par le comptage de carreaux et par report, le plus souvent spontanément. La transitivité a toujours été utilisée spontanément pour conclure $A_3 = A_4$ dès lors que $A_1 = A_2$ avait été établi.

Cette tâche a été rapidement et assez facilement réalisée par tous les groupes sauf Sami et Stéphanie qui se sont d'abord centrés sur la relation entre A_3 et A_4, en renonçant à dessiner les cm^2 sur S_4 parce que c'était compliqué. Finalement ils s'en tirent quand l'observateur leur rappelle qu'ils doivent aussi s'intéresser aux relations de S_3 et S_4 avec S_1 et S_2.

Ils faut noter cependant que si les élèves trouvent facilement les relations entre S_1 et S_3 par exemple, ils ont du mal à les écrire : ils proposent par exemple $S_3 < S_1$ pour "S_3 deux fois plus petit que S_1" ou $S_3 = 2\ S_1$ pour "S_3 se reporte deux fois sur S_1".

La relation entre S_1 et S_4 n'a jamais été obtenue directement mais toujours par transitivité en se servant de S_2. Un seul élève a eu l'idée de redessiner S_1 sur S_4 et de tracer la hauteur ; il ne s'est pas très bien tiré de la comparaison parce qu'il a mal dessiné son rectangle et qu'il a alors essayé de voir S_4 comme somme de 2 triangles rectangles de même aire, ce qui ne marchait pas ; il s'est rallié à la procédure de sa partenaire qui, pendant ce temps, a comparé S_4 à S_2. L'observateur leur a demandé de faire la comparaison directe entre S_1 et S_4 après coup en redessinant une figure propre, cela n'a pas été immédiat, bien que la hauteur ait été dessinée dès le début.

Il est à noter que les enfants avaient pourtant tous trouvé très facilement les relations entre carrelages quand il s'agissait de comparer un rectangle au triangle obtenu en partageant ce rectangle par la diagonale, mais ils disposaient à ce moment là du rectangle et du triangle séparément et même, s'ils le désiraient, de deux triangles qu'ils pouvaient utiliser pour reconstituer le rectangle. De plus, le triangle rectangle, par l'existence de l'angle droit (surtout en position verticale-horizontale), est bien perçu comme un demi rectangle, ce qui n'est pas le cas pour un autre triangle. On peut d'ailleurs remarquer que le triangle orange qui a pourtant un angle droit n'a le plus souvent été vu comme un demi rectangle bleu que par l'intermédiaire du triangle rose.

Remarquons cependant qu'Alain et Véronique à qui la question de la comparaison directe de S_1 et S_4 a aussi été posée après coup se sont acquittés très facilement de cette tâche.

1.4. Doubler un triangle

Dans quatre groupes, on a posé la question supplémentaire suivante : construire un triangle qui ait une aire double de S_3. Cette question n'a été posée que dans les groupes où les autres questions avaient été traitées assez vite : Sami - Stéphanie P, Alain - Véronique, Stéphanie L - Fabienne, Michaël - Malika.

Un groupe a d'abord utilisé le cadre numérique et a glissé sur des procédures périmétriques : Michaël[4] a voulu fabriquer un triangle d'aire 24 et a proposé un triangle équilatéral de côté 6 parce que 3x6 = 24 ! Les autres élèves ont d'abord essayé de se servir de S_4. Nous rendons compte du travail de chaque groupe séparément parce que les entretiens ne se sont pas toujours déroulé de la même façon.

Sami et Stéphanie P ont d'abord essayé de placer deux S_4 côte à côte mais n'ont réussi à obtenir que des parallélogrammes ou des "cerf-volants tordus" (ils avaient fabriqué un exemplaire de S_4 mobile en le décalquant et en le découpant). L'observateur leur a alors demandé s'ils connaissaient un rectangle qui ait une aire double de S_3. Cette question a déclenché chez Stéphanie une autre procédure : elle reste un moment centrée sur S_4, mais propose ensuite de décalquer et découper S_1 quelle partage en deux triangles suivant la diagonale. La recomposition des deux morceaux en triangle n'est pas évidente : ils obtiennent d'abord des "losanges", des cerf-volants, des rectangles avant de réussir à fabriquer deux triangles.

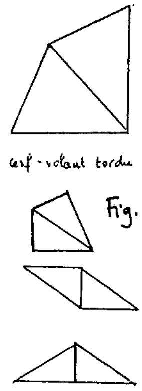


Fig. 41

Alain et Véronique veulent doubler les dimensions de S_4 et pour construire le triangle double, Alain se sert de la hauteur : il trace la base de 12 cm, marque un point à 4 cm d'une extrémité, trace une hauteur de 8 cm et termine son triangle. L'observateur leur demande s'ils peuvent placer S_4 dedans.

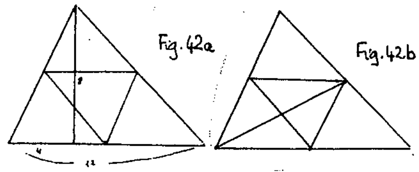


Fig. 42a Fig. 42b

Alain voit tout de suite que c'est beaucoup plus grand et Véronique en place 4. Elle propose alors de partager le triangle en deux en partageant un seul côté. Ils vérifient avec l'observateur que les deux triangles obtenus ont la même aire : S_4 de chaque côté et deux demi parallélogrammes.

Fabienne commence aussi par doubler toutes les dimensions de S_4, elle a du mal à dessiner le triangle : elle essaie de garder à l'œil la même pente pour les côtés obliques, l'observateur l'aide à y parvenir. Elle voit tout de suite que c'est trop grand.

L'observateur lui demande combien on peut mettre de S_4 dans ce triangle, elle en dessine 4. Elle propose ensuite de partager en deux selon la médiane mais pense que les deux morceaux n'ont pas la même aire parce qu'un des triangles est plus allongé que l'autre. L'observateur regarde avec elle les morceaux : les triangles S_4 et les demi parallélogrammes mais Fabienne n'est pas vraiment convaincue.

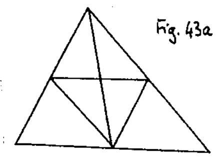


Fig. 43a

dessin de Fabienne

Pendant ce temps, Stéphanie essaie de dessiner un triangle rectangle d'aire 24 en dessinant les carreaux mais elle n'y arrive pas (voir figure).

L'observateur leur demande alors de dessiner un rectangle qui ait une aire double de celle de S_1. Stéphanie dessine 2 S_1 côte à côte et obtient un rectangle de 6 sur 8, Fabienne double les dimensions. L'observateur leur demande combien leur rectangle contient de S_1.

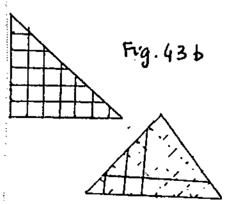


Fig. 43 b

Fabienne en dessine 4 dans le sien et barre les deux du bas (il lui reste un rectangle de 4 sur 12. Lobservateur repose la question de trouver un triangle de même aire que S_1, elle tracent toutes les deux la diagonale de leur rectangle et obtiennent les figures suivantes :

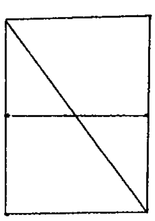


Fig. 44a.

dessin de Stéphanie

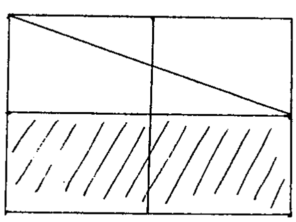


Fig. 44 b.

dessin de Fabienne

[4] c'est déjà Michaël, considéré comme un bon élève par la maîtresse, qui avait demandé de la ficelle pour la surface à bords arrondis

Après le premier essai de Michaël et Malika qui les amène à utiliser des procédures périmétriques, l'observateur leur demande de dessiner un rectangle qui ait une aire double de celle de S_1. Malika dessine sous S_1 un autre rectangle identique et reproduit le rectangle obtenu sur la feuille blanche (elle a un rectangle de 6 sur 8. Pendant ce temps, Michaël dessine un quadrillage en cm^2 de largeur 4 qu'il prolonge progressivement jusqu'à 4x12 (il explique qu'il a voulu faire 48 carreaux). L'observateur reprend alors la première question sous la forme "fabriquer un triangle de même aire que S_1". Malika trace une diagonale de son rectangle. Michaël veut prendre des demi carreaux en les coupant suivant la diagonale, ça ne marche pas : le triangle obtenu ne fait que 16 carreaux. Il veut agrandir son rectangle en ajoutant une rangée de carreaux en dessous. L'observateur ne le laisse pas faire et lui demande de ne pas changer son rectangle. Il décide alors de partir du milieu du grand côté du rectangle et de joindre aux angles opposés. En fait, il n'a pas pris le milieu, mais s'aperçoit que cela fait quand même la moitié et, sur question de l'observateur, admet qu'on peut choisir le sommet n'importe où sur le sommet opposé.

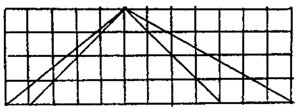


Fig. 45a

figure de Michaël

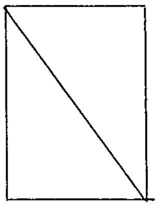


Fig. 45b

figure de Malika

1.5. Conclusion

La comparaison du rectangle et du parallélogramme montre que les élèves ont plusieurs conceptions de la notion d'aire ; certaines de ces conceptions ont d'ailleurs été mises en place à différents moments de l'apprentissage :

- l'aire se conserve par découpage et recollement
- l'aire s'obtient en dénombrant des carreaux
- l'aire est un nombre qui se calcule
- l'aire dépend des dimensions de la surface
- des surfaces de formes différentes peuvent avoir la même aire
- on peut déformer une surface et conserver son aire
- il y a des cm^2 de formes diverses, en particulier des parallélogrammes.

Mais la mise en place d'une conception nouvelle ne s'est pas toujours faite en tenant compte des conceptions anciennes, ce qui fait que les élèves ne maîtrisent pas toujours les domaines de validité des affirmations qu'ils produisent et que les diverses conceptions peuvent être concurrentes au lieu de se compléter. Ainsi la mise en place de la conception de l'aire comme un nombre qu'on peut calculer apparaît-elle comme un obstacle au développement de l'aire comme une propriété conservée par découpage et recollement : au lieu d'utiliser le découpage et recollement pour ramener les surfaces à d'autres dont on sait calculer les aires, les élèves préfèrent inventer des formules qui leur permettent de travailler tout de suite dans le cadre numérique.

Cette diversité des conceptions en place chez le même élève fait que le découpage et recollement ou le comptage de carreaux ne peuvent suffire à emporter la conviction, même si ce sont des procédures qui ne sont presque jamais remises en question.

Les conceptions archaïques qui attachent l'aire à la forme de la surface et aux longueurs des côtés sont encore présentes et se trahissent dans les confusions de vocabulaire au niveau des unités (cm et cm^2) et de diverses formulations : par exemple Delphine dit "en diagonale, c'est pas la même aire que tout droit" et Manuel "quand on le redresse ... l'aire arriverait au moins là" et surtout dans la difficulté à admettre que S_1 et S_2 puissent avoir la même aire avec des côtés de longueurs différentes.

Ces conceptions sont favorisées par l'approche dynamique du problème qui fait considérer le parallélogramme comme un rectangle un peu déformé. Il y a plusieurs manières de déformer le rectangle en parallélogramme en ne changeant pas trop "sa taille" en particulier : l'articulation du parallélogramme autour des sommets qui conserve les longueurs des quatre côtés mais non l'aire, le glissement d'un côté sur son support qui conserve l'aire mais les longueurs de deux côtés seulement et la rotation autour d'un sommet qui conserve à la fois longueurs et aire en même temps que la forme rectangle. Notre interprétation est que beaucoup d'élèves ont tendance à amalgamer ces trois transformations et à considérer qu'elles conservent à la fois les longueurs et les aires. Il faut remarquer que cet amalgame ne se produit que pour des petites déformations où la perception ne permet pas de rejeter tout de suite les propositions erronées. D'ailleurs quand la déformation est assez importante pour qu'il devienne évident que certaines propriétés ne sont plus conservées, il n'est plus évident non plus que les propriétés conservées le soient (voir par exemple la réaction de Nathalie quand elle dessine un parallélogramme très penché en conservant l'écart des côtés horizontaux)

L'incidence sur la conservation des aires et des longueurs de transformations de figures par déformation continue est un point qui n'avait pas été abordé dans l'apprentissage et qui semble important pour déstabiliser des conceptions spontanées erronées des élèves à ce sujet et amorcer une autonomie des différentes notions amalgamées. Nous faisons d'ailleurs l'hypothèse que cette conception de l'aire comme une propriété qui se conserve par déformation continue d'une figure (en gardant fixes les longueurs des côtés), renforce l'utilisation par les élèves des formules "produit des dimensions" pour le parallélogramme, formules qui sont particulièrement tenaces puisque nous avons pu constater qu'elles étaient toujours utilisées par une forte proportion des élèves-instituteurs.

Les réponses aux dernières questions confirment ce que la comparaison de S_1 et S_2 nous avait permis de voir. L'additivité des aires par juxtaposition de surfaces est facilement utilisée par les élèves. Ceux-ci sont pratiquement tous capables d'utiliser les différents points de vue rencontrés à propos de la notion d'aire, quand on le leur suggère, mais ces points de vue ne sont pas également disponibles chez tous les élèves.

A ce propos, on voit apparaître des différences individuelles importantes : certains, comme Michaël, Sami, Frédéric ou François ne mobilisent spontanément que le point de vue numérique, d'autres comme Alain se réfèrent essentiellement au pavage, d'autres comme Fabienne ou Olivier s'intéressent d'abord au point de vue géométrique et remarquent les relations entre S_2 et S_4 tout de suite.

La prise en compte des dimensions des surfaces peut être rattachée à un point de vue numérique ou à un point de vue géométrique.

Les cas extrêmes peuvent permettre une dissociation des dimensions et de l'aire quand la perception agit dans le sens favorable comme dans le cas du parallélogramme articulé très aplati ou au contraire amener à les lier quand la perception agit dans le sens défavorable comme dans le cas de parallélogrammes très aplatis mais de hauteur constante.

Certains élèves sont encore assez sensibles à la forme de la surface. On peut se demander si cette prise en compte de la forme n'est pas surtout le fait des élèves qui mobilisent plus facilement un point de vue géométrique : ainsi Fabienne a du mal à admettre que la médiane partage le triangle en deux moitiés de même aire, alors que Véronique qui a surtout mobilisé un point de vue numérique n'éprouve pas le besoin de le justifier : le fait qu'on ait la moitié du côté lui paraît convaincant.

Le point de vue géométrique inclut pour les élèves un aspect dynamique qui n'avait pas du tout été pris en compte dans l'apprentissage : en déformant légèrement une surface tout en gardant sa "forme géométrique" (parallélogramme par exemple), on ne change rien : aire, dimensions... C'est peut-être cet aspect dynamique qui fait croire à beaucoup d'élèves (même plus âgés) que l'aire du parallélogramme s'obtient en faisant le produit des dimensions, c'est peut-être aussi lui qui fait dire à beaucoup (y compris des professeurs de CAP agricole en stage) que si on fabrique des rectangles de même périmètre, ils auront la même aire ! Ici, un certain point de vue géométrique vient renforcer des convictions issues d'une approche numérique.

2. Résultats des tests écrits

En juin 1983, nous avons proposé aux élèves certains des questionnaires utilisés par J. Rogalski (Rogalski, 1983). Il s'agit d'une variante du questionnaire SN, mais sans la phase 3 qui donne des exemples de pavage (textes en annexe). Les élèves ont passé ces épreuves en deux temps : il y a 22 réponses pour chaque question, mais 20 élèves seulement ont passé les deux épreuves. Pour les questions qui concernent le pavage, nous donnons aussi les résultats du CM1.

2.1. Nombre de petites figures dans la grande.

Les figures utilisées sont des carrés, parallélogrammes, triangles. équilatéraux ; les rapports sont 2 et 3. Dans le tableau, nous donnons les résultats pour chaque figure avec en indice le rapport correspondant.

Réponses correctes	carré 2	parallé. 2	triang. 2	carré 3	parallé. 3	triang. 3
CM1 27 élèves	26	25	21	24	23	20
CM2 22 élèves	22	22 *2*	18	22	18	17

Pour chaque tableau, les nombres en italique dans les cases indiquent le nombre d'élèves qui, parmi ceux de la case correspondante, ont donné une réponse correcte accompagnée d'un pavage par des surfaces de même aire que la petite surface donnée mais non superposables.

Ainsi, deux élèves parmi les 22 qui ont donné une réponse correcte pour paral. 2 ont dessiné

au lieu de

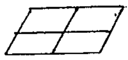


Fig. 46

Remarquons d'ailleurs que les parallélogrammes dessinés ont presque la même forme que le petit parallélogramme de départ.

- pour les carrés, toutes les réponses sont justes avec les deux rapports,
- pour le parallégramme, elles sont justes pour le rapport 2, pour le rapport 3, il y a 1 non réponse et 3 erreurs (2 réponses 6, 1 réponse 8)
- pour le triangle équilatéral, il y a des erreurs dès le rapport 2 (4 réponses 3) ; pour le rapport 3, un des élèves précédents répond correctement, les 3 autres se trompent et répondent 3 (1 élève) ou 6 (2 élèves) ; deux élèves qui avaient répondu correctement pour le rapport 2, répondent 8 pour le rapport 3.

Pour ces 6 questions, 14 élèves n'ont fait aucune erreur ; 4 élèves ont fait 1 erreur ou 1 absence de réponse (2 pour tr.3, 2 pour par.3) ; 3 élèves ont fait 2 erreurs (2 pour les deux triangles, 1 pour tr.2 et par.3), 1 élève a fait 3 erreurs (tr.2, tr.3 et par.3)

Les élèves qui font des erreurs n'ont pas dessiné le pavage dans les questions correspondantes.

Remarquons cependant que 3 élèves n'ont dessiné aucun pavage et n'ont fait aucune erreur. Quatre élèves les ont tous dessinés. La plupart des élèves n'en ont dessiné que quelques-uns ou les ont effacés.

2.2. Nombre de pots de peinture.

Les figures sont les mêmes que précédemment, avec en plus des triangles quelconques. On indique le nombre de pots de peinture nécessaires pour peindre la petite figure et on demande combien il en faut pour la grande.

Réponses correctes	carré 2	carré 3	paral. 2	paral. 3	tr.eq. 2	tr. eq. 3	tr.qq 2	tr.qq 3
CM1 26 élèves	18	14	16	14	19	15	16	14
CM2 22 élèves	19	21	18	19	22	21	16 *2*	16 *4*

Pour chaque tableau, les nombres en italique dans les cases indiquent le nombre d'élèves qui, parmi ceux de la case correspondante, ont donné une réponse correcte accompagnée d'un pavage par des surfaces de même aire que la petite surface donnée mais non superposables.

Cette fois, le nombre de pots de peinture nécessaire pour peindre la petite figure n'est pas 1 (sauf dans le cas du triangle équilatéral), ce qui fait que la réponse ne coïncide pas avec le résultat du pavage.

Pour les carrés, on a 3 erreurs pour le rapport 2 (2 réponses 10, 1 réponse 16) et 1 erreur pour le rapport 3 (réponse 15 avec pavage dessiné : 15=9+6 ?)

Pour les parallélogrammes, 4 erreurs pour le rapport 2 (1 réponse 4 et une réponse 3+1/2 qui résultent du pavage sans tenir compte du nombre de pots nécessaires pour peindre la petite figure, 1 non réponse, 1 réponse 24) ; 3 erreurs pour le rapport 3 (1 réponse 9 issue du pavage comme pour le rapport 2, 1 réponse 27 avec pavage dessiné : erreur de table ?, 1 réponse 54 : l'élève qui avait répondu 24 pour le rapport 2)

Pour les triangles équilatéraux, aucune erreur pour le rapport 2, 1 seule pour le rapport 3 (réponse 27). Il semble bien que le nombre de pots nécessaire pour peindre la petite figure ait une importance.

Pour les triangles quelconques, 6 erreurs pour le rapport 2 (4 réponses 4, 1 réponse 6 et 1 réponse 16), et 6 erreurs pour le rapport 3 (3 réponses 9, 1 réponse 14, 1 réponse 15, 1 réponse 27). Remarquons que les réponses 4 pour le rapport 2 et 9 pour le rapport 3 sont sans doute des réponses au pavage puisque 3 élèves font cette erreur pour les 2 questions.

Sur les 20 élèves qui ont répondu à toutes les questions concernant les pots de peinture, 12 ne font aucune erreur, 2 font 1 erreur, 3 font 2 erreurs, 1 fait 3 erreurs, 1 fait 4 erreurs, 1 fait 6 erreurs.

2.3. Question posée en termes de cm²

La même question était posée à propos de l'aire en cm². Le carré était remplacé par un rectangle. Cette question n'a pas été posée aux élèves de CM1.

Réponses correctes	rect. 2	paral. 2	paral. 3	tr. eq. 2	tr. eq. 3	tr. qq 2	tr. qq 3
CM2 22 élèves	20	21	19	18	18	15 *2*	15 *4*

Pour chaque tableau, les nombres en italique dans les cases indiquent le nombre d'élèves qui, parmi ceux de la case correspondante, ont donné une réponse correcte accompagnée d'un pavage par des surfaces de même aire que la petite surface donnée mais non superposables.

* Pour le rectangle, 2 erreurs (1 réponse 10 et 1 réponse 40)

* Pour les parallélogrammes, 1 erreur pour le rapport 2 (réponse 3), 3 erreurs pour le rapport 3 (1 réponse 3, 1 réponse 9, 1 réponse 55)

* Pour les triangles équilatéraux, 4 erreurs dans le cas du rapport 2 (1 réponse 8, 1 réponse 2, 1 réponse 4+1/4+1/5, 1 réponse illisible), 3 erreurs dans le cas du rapport 3 (1 réponse 10, 1 réponse 8, 1 réponse 3).

* Pour le triangle quelconque, dans le cas du rapport 2, 5 réponses "4" (réponse au pavage) 1 réponse 8 1/4, 1 non réponse ; dans le cas du rapport 3, 4 réponses "9" (réponse au pavage), 1 réponse "21", 1 non réponse.

Certains élèves ont répondu correctement en produisant des pavages avec des surfaces qui n'étaient pas superposables à la surface donnée. Nous donnons ci-dessous des exemples de pavages des triangles quelconques par des surfaces de même aire mais non superposables :

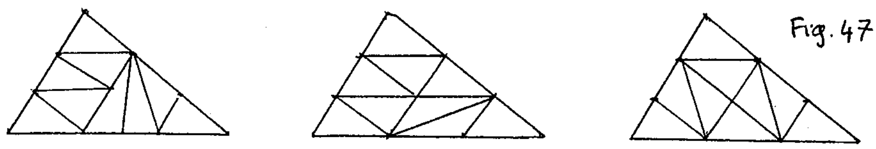


Fig. 47

On ne peut pas supposer dans ces productions que les élèves savaient que les triangles avaient la même aire, sauf peut-être dans le deuxième cas où on a un seul parallélogramme coupé en deux par la mauvaise diagonale

On voit que le pavage est utilisé correctement par une grande majorité des élèves. Un certain nombre d'élèves ont des réponses fausses dans le cas des pots de peinture et des cm² avec un bon usage du pavage, parce qu'ils ne tiennent pas compte de l'information concernant la petite figure.

2.4. Questions sur papier quadrillé

- *aire du rectangle* : 19 réponses justes sur 22, 1 non réponse, 1 réponse 1/2, 1 réponse 1+1/2
- aire du triangle : 19 réponses justes sur 22, 1 non réponse, 1 réponse 3+1/2, 1 réponse 5
- *aire du parallélogramme* : 19 réponses justes sur 22, 1 non réponse, 1 réponse 1/2, 1 réponse 4
- *parallélogramme d'aire double,* pour le dessin :

* 12 réponses correctes sur 22 parmi lesquels 3 expriment correctement l'aire en cm², 6 donnent la réponse 24 (carreau pris comme unité), un élève répond 3, deux ne répondent pas.

* 10 élèves font des dessins faux dont

- trois élèves font une erreur de parallélisme : l'un répond 24, un autre ne répond pas, le troisième répond 26 cm² (il avait trouvé 13 cm² pour le parallélogramme donné)
- un a une réponse juste pour l'aire (base trop grande, hauteur double)
- un dessine un parallélogramme juste et un rectangle de 1cm sur 5 cm et répond 5 cm²
- un élève dessine le même parallélogramme
- un dessine un parallélogramme 3 fois plus grand et répond 27 cm²
- un élève dessine un rectangle 4 fois plus grand
- un élève dessine un carré 3 fois plus grand et répond 9 cm²

- un élève dessine un parallélogramme une fois et demie plus grand et ne donne pas l'aire
- *triangle rectangle d'aire 1/2 cm²*
19 réponses correctes sur 22, 1 non réponse , 1 réponse 2 cm², 1 réponse 1 cm²

2.5. Autres questions

-*rectangle de même aire qu'un parallélogramme donné*
20 réponses correctes, 2 non réponse
- *carré d'aire 1 cm²*
22 réponses correctes
- *rectangle quadrillé*
20 réponses correctes, 2 ont trouvé 78 (au lieu de 77)
- *rectangle dont il manque un morceau*
17 réponses correctes dont 11 complètent le quadrillage, 1 marque des petits points dans les carreaux, y compris les carreaux absents
1 réponse 45 (erreur de calcul : les réponses à toutes les autres questions sont justes)
1 réponse 55 (erreur de calcul : quadrillage dessiné et dimensions marquées 13 cm et 5 cm)
1 réponse 55 (morceau déchiré non compté : bord fermé et évaluation des morceaux de carreaux)
1 réponse 77 (question précédente, quadrillage non complété)
1 réponse 12 (quadrillage complété, donne le nombre de carreaux manquants)

Conclusion

Il y avait au total 31 réponses à donner. Sur les 20 élèves qui ont eu à répondre à toutes les questions, 15 ont un total ≥ 26.
Restent 5 élèves :
François a 21 réponses justes sur les 24 premières questions mais se trompe sur tout ce qui concerne les cm²
Franck a 22 réponses justes (erreurs sur les triangles et les questions sur quadrillage)
Frédéric a 20 réponses correctes (erreurs de calcul et calcul des aires en mesurant les dimensions des surfaces, ce qui amène plusieurs fois des réponses approximatives)
Olivier a 20 réponses correctes (6 erreurs dans les questions sur les triangles, en particulier ne tient pas compte de l'information sur la petite figure)
Albert a 14 réponses correctes (divers types d'erreurs).

Les réponses que J. Rogalski obtient à ces questions sont très différentes pour le carré (maîtrisé dès le CM1) et pour le triangle : "il faut une longue évolution pour que les représentations de pavage du triangle soient mobilisables (fin de 5ème). C'est seulement en fin de 4ème que ces représentations sont disponibles pour les 3/4 des élèves." Pour le pavage spontané (question 1), elle trouve 48% (resp. 39%) de réponses correctes pour le triangle équilatéral avec le rapport 2 (resp. rapport 3), toutes classes confondues (de 9 à 14 ans). Nous avons à cette question des réponses comparables à celles des élèves de 4ème (13-14 ans) ; on peut également noter que les résultats corrects sont du même ordre qu'il s'agisse de carrés, de triangles ou de parallélogrammes, qu'il s'agisse du rapport 2 ou du rapport 3. Le "taux de passage" d'une réponse correcte au pavage à une réponse correcte à la peinture (réussite peinture + pavage / réussite pavage) varie de 85 % à 100% au CM2 et de 58% à 90% au CM1 : ces taux sont comparables à ceux obtenus par J. Rogalski deux ans plus tard.

On peut penser que le travail fait dans les séquences didactiques a rendu disponible le pavage de surfaces variées, ce qui fait que les élèves sont capables, deux mois après l'apprentissage, de répondre à un certain nombre de questions classiques concernant les aires.

On a pu constater au cours des entretiens que le découpage - recollement fonctionne pour comparer des surfaces, même s'il entre parfois en compétition avec d'autres conceptions issues d'autres points de vue, notamment le produit des dimensions et la déformation continue du bord de la surface (voir la conclusion des entretiens au paragraphe 1.5.).

CONCLUSION :
RETOUR SUR L'INGENIERIE DIDACTIQUE[1]

1. Bilan de l'expérience

1.1. Les acquis

Nous avons vu, aussi bien au cours des entretiens par deux que lors des tests écrits, que le découpage et recollement et le pavage, y compris l'utilisation de pavés non carrés dans le cas des triangles par exemple, sont mobilisables chez tous les élèves de la classe : ils peuvent l'utiliser si on y fait appel. Le dessin d'une petite figure à côté d'une grande suffit à mobiliser le pavage, ce qui, d'après les résultats de J. Rogalski ne semble pas général chez les élèves de cet âge. Il reste que ces deux outils ne sont pas suffisamment disponibles pour que les élèves y fassent appel d'eux-mêmes pour rejeter une réponse qui relève de la perception ou d'un calcul erroné.

1.2. Les difficultés qui résistent

Les élèves ont fait certains progrès du point de vue de l'indépendance de l'aire par rapport à la forme, du point de vue de la différenciation aire-périmètre mais nous avons vu que les conceptions erronées peuvent réapparaître jusqu'à la fin de nos séquences dans des situations plus complexes ou quand il s'agit de figures géométriques usuelles.

Il semble que dans ce dernier cas on ait davantage de points de vue qui entrent en compétition, ce qui amène les élèves à produire des réponses erronées. Ils attachent notamment davantage d'importance à la forme de la surface quand elle est régulière, qu'ils peuvent facilement la reconnaître, voire la nommer. Ils sont aussi tentés dans ce cas d'étendre les formules connues pour le rectangle parce qu'ils peuvent donner un sens aux "dimensions de la figure". Nous l'avons vu pour le parallélogramme et le triangle. Nous avions aussi prévu pour les entretiens un trapèze que nous n'avons pas eu le temps d'utiliser. Il est probable que, si nous l'avions fourni dès le début, nous aurions observé à son propos le même genre de procédures que pour le parallélogramme.

La conception de l'aire comme un nombre obtenu par un calcul à partir d'une formule apparaît très forte et semble éluder toute autre considération chez certains élèves malgré l'importance accordée au début de l'apprentissage à l'aire sans mesure par un travail dans le cadre géométrique. Remarquons que c'est surtout le cas au CM2 où les calculs d'aire ont pris une grande place en fin d'année scolaire et où le travail sans mesure a été plus bref qu'au CM1.

Toutefois, il semble que certaines de ces difficultés aient été surmontées au cours même des entretiens si l'on en juge par les résultats obtenus un peu plus tard lors des tests écrits.

1.3. Les difficultés non prévues

Il est apparu au cours des entretiens, à la fin des séquences réalisées, que les élèves prennent en compte dans leurs décisions les effets de diverses déformations continues, surtout à propos de surfaces usuelles. Ainsi, un parallélogramme est vu comme un rectangle déformé, et pour les élèves, les longueurs des côtés ne varient pas dans la transformation, l'aire ne varie pas non plus - qu'il s'agisse d'une articulation autour des sommets (longueurs des côtés conservées) ou d'un glissement d'un côté sur son support (aire conservée). Il semble que ce point de vue de "déformation continue" intervienne fortement dans les conceptions des élèves concernant les surfaces. D'ailleurs, n'est-ce pas aussi ce point de vue qui faisait réclamer de la ficelle à un élève de CM2 pour "transformer en rectangle" une surface aux bords arrondis ? Pour les surfaces usuelles, c'est un moyen de se ramener au cas connu du rectangle et de conforter des formules erronées tentantes.

Cela nous conduit à distinguer dans le cadre géométrique de départ deux points de vue : le *statique* où est privilégié l'aspect descriptif et le *dynamique* où sont privilégiés les effets de déformations sur les surfaces. Cela amène à considérer des familles de surfaces et à se demander comment varie l'aire au sein d'une telle famille. Il

[1] Nous reprenons ici en grande partie la conclusion de l'article publié avec R. Douady (1989)

reste à préciser ce que nous appelons "déformation", par exemple, nous rattachons plutôt le découpage-recollement à l'aspect statique parce que, s'il peut être vu comme un moyen de transformer une surface en une surface de même aire, la surface obtenue est perçue comme différente de la surface de départ puisqu'on passe par un intermédiaire manifestement différent et qui n'a sûrement pas la même aire. Au point de vue dynamique, nous rattachons ce que nous avons appelé une déformation continue de la surface A, qu'on pourrait modéliser en disant que B est une déformation continue de A si on a une application h continue de $[0,1]xA \longrightarrow R^2$ telle que $h(\{0\}xA) = A$ et $B = h(\{1\}xA)$. Dans un certain domaine, B n'est pas alors considérée comme différente de A pour ce qui concerne les mesures tout au moins : A et B sont vues dans une même famille qui contient tous les intermédiaires entre A et B.

1.4. Nouvelles hypothèses didactiques

Les observations faites nous amènent à ajouter des hypothèses pour la construction de nouvelles séquences didactiques. Nous avions prévu du travail dans le cadre géométrique sans prendre en compte le point de vue dynamique de la déformation.
Nous faisons maintenant l'hypothèse qu'une interaction entre les points de vue statique et dynamique est nécessaire dans la conceptualisation de la grandeur aire et dans sa dissociation de la longueur.

Par ailleurs, le découpage-recollement et la déformation amènent à des conclusions contradictoires. Le comptage de carreaux sur papier quadrillé emporte la conviction et permet de trancher. Il permet de plus d'associer un nombre (ou au moins un encadrement) à la surface sans recourir à une formule et donne ainsi un moyen de contrôler les formules.

Nous avions choisi de travailler uniquement sur papier blanc dans la première phase, pour donner un sens à la notion d'aire indépendamment de la mesure. Nous considérons toujours ce point de vue comme essentiel, mais nous prévoyons maintenant de renforcer le jeu de cadres papier blanc - papier quadrillé au début du processus d'apprentissage pour établir que, pour deux surfaces dessinées sur papier quadrillé, avoir des aires égales a le même sens, qu'on se réfère au comptage de carreaux, au déplacement ou au découpage - recollement et récolter dans les deux cadres des propriétés établies dans l'un des deux.

Un des objectifs est, en fin de processus, d'utiliser efficacement le quadrillage et ses raffinements successifs afin d'encadrer de plus en plus précisément une surface par des surfaces dont on sait mesurer les aires. Nous faisons l'hypothèse que trois points importants interviennent pour cela :

- la maîtrise du passage du point de vue "papier blanc" au point de vue "papier quadrillé" et réciproquement
- la dialectique statique - dynamique
- la dissociation aire - longueur.

2. Retour sur l'ingéniérie didactique

L'analyse du déroulement effectif des séquences nous amène à réorganiser l'ingénierie didactique. Nous allons proposer la recherche de problèmes qui donnent lieu au déroulement de différentes dialectiques mobilisant différents sens de l'aire et dont l'enchaînement devrait permettre l'élaboration du concept d'aire dans son double aspect outil et objet.

2.1. Jeu de cadres : papier blanc, papier quadrillé

Le travail sur papier quadrillé a pour but de mobiliser une conception de l'aire mesurée par le nombre de carreaux : deux surfaces S_1 et S_2 ont la même aire quand elles sont constituées du même nombre de carreaux, qu'elles soient superposables ou qu'elles ne le soient pas. Si S_1 contient moins de carreaux que S_2, l'aire de S_1 est plus petite que l'aire de S_2.

Le travail sur papier blanc a pour but de mobiliser une autre conception de l'aire, indépendante des nombres : deux surfaces S_1 et S_2 ont même aire

- si on peut trouver un déplacement (de l'espace) qui amène S_1 sur S_2 ; dans ce cas elles sont superposables
- si on peut découper l'une en un nombre fini de morceaux et les recoller sans chevauchement de façon à obtenir une surface superposable à l'autre.

Si un déplacement amène S_1 sur une partie de S_2, alors l'aire de S_1 est plus petite que l'aire de S_2.

Il est alors nécessaire de proposer une situation dont l'enjeu est de montrer que deux surfaces qui ont la même aire au sens du papier blanc l'ont aussi sur papier quadrillé :

- Etant donnée une surface S dessinée sur papier blanc, les surfaces obtenues en reproduisant S dans des positions quelconques sur un papier quadrillé contiennent le même nombre de carreaux (en particulier même si le bord ne suit pas partout les lignes du quadrillage)
- Etant donnée une surface S dessinée sur papier quadrillé, toute surface obtenue à partir de S par découpage et recollement sans chevauchement contient le même nombre de carreaux que S.

Ces deux critères nous garantissent la conservation du nombre de carreaux, qu'on connaisse ce nombre ou non. Ils fournissent les moyens de déterminer le nombre de carreaux contenus dans une surface en la remplaçant au besoin par une autre en contenant autant et pour laquelle le calcul est plus commode.

Evidemment, ces critères sont admis avec les élèves, éventuellement avec vérification dans quelques cas faciles. Il s'agit d'admettre l'équivalence des deux points de départ envisagés dans le premier chapitre. Nous avons vu à ce moment là que la démonstration de l'équivalence des notions d'aire obtenues à partir de l'un ou l'autre des points de départ n'est pas chose facile.

L'expression "avoir même aire" n'avait de sens au départ que pour des surfaces dessinées sur papier quadrillé et dont les bords suivent les lignes du quadrillage. Par un jeu de cadres papier blanc - papier quadrillé, on étend le champ des surfaces pour lesquelles l'expression "avoir même aire" a un sens.

Remarque 1

On ne peut faire l'économie du travail sur papier blanc. Pour les élèves privés des procédures sur papier blanc, les comparaisons d'aires de surfaces dessinées sur papier quadrillé conduisent à un comptage du nombre de carreaux en essayant de rassembler des morceaux de façon parfois très approximative, même dans le cas où les surfaces sont superposables. Le comptage peut ainsi amener des réponses contradictoires au sein de la classe. Les moyens de contrôle relèvent de procédures sur papier blanc.

Remarque 2

Ce jeu de cadres papier blanc - papier quadrillé se situerait dans notre progression au début de l'apprentissage, au CM1 par exemple. On pourrait proposer les situations suivantes :

Situations proposées pour cette phase.

- Une *première situation* a pour objectif d'introduire le mot "aire" en référence au nombre de carreaux, de comparer les surfaces qui suivent les lignes du quadrillage (avec éventuellement des demi-carreaux) : construire une surface de forme différente mais contenant le même nombre de carreaux qu'une surface dessinée sur le quadrillage. Bilan : deux surfaces ont la même aire si elles contiennent le même nombre de carreaux. Une surface a une aire plus grande qu'une autre si elle contient plus de carreaux.

- La *deuxième situation* porte sur un des maillons du jeu de cadres : l'invariance du nombre de carreaux d'une surface lors d'un déplacement.

matériel : chaque élève reçoit une feuille sur laquelle le maître a dessiné un rectangle et des segments ayant pour longueur une des dimensions du rectangle, en diverses positions – suivant les lignes du quadrillage ou en oblique – il reçoit aussi du papier calque.

consigne : construire sur la feuille des rectangles dont l'un des côtés est l'un des segments dessinés et de même aire que le rectangle donné. A chaque segment correspond un rectangle.

Le travail est individuel.

Bilan : Si on veut conserver l'aire et la longueur d'un côté, il faut conserver la longueur de l'autre côté. En déplaçant un rectangle de n'importe quelle façon, par exemple en le faisant tourner autour d'un point ou en le faisant glisser le long d'une droite, on obtient un rectangle superposable. En particulier, on peut affirmer que les dimensions et le nombre de carreaux à l'intérieur - donc l'aire - sont conservés, sans avoir besoin de connaître les valeurs numériques.

- La *troisième situation* est une reprise de la première avec des surfaces comportant des lignes obliques joignant un noeud du quadrillage à un autre. Les élèves sont amenés à voir des triangles rectangles comme des demi-rectangles et à faire des déplacements de triangles rectangles pour faciliter le comptage de carreaux.

- La *quatrième situation* a pour but de formuler les conditions pour qu'un "découpage-recollement" conserve l'aire, c'est-à-dire le nombre de carreaux d'une surface dessinée sur papier quadrillé.

On donne aux élèves plusieurs exemplaires d'une surface dessinée sur papier quadrillé ; on leur demande d'en garder une intacte et de découper les autres en 5 ou 6 morceaux de formes simples en suivant les lignes du quadrillage, puis de recoller les morceaux de façon à fabriquer deux surfaces différentes de la surface donnée dont l'une ait une aire égale et l'autre une aire plus petite. On demande ensuite de reproduire les surfaces sur papier blanc. Le bilan permet d'énoncer les conditions de recollement qui conservent le nombre de carreaux. On est assuré d'avoir conservé le nombre de carreaux en se basant sur le fait qu'on n'a pas changé les morceaux : si on n'a pas fait chevaucher en recollant, les deux surfaces sont formées des mêmes morceaux. Le nombre de carreaux n'a pas changé dans les morceaux, il n'a pas changé dans la surface totale.

Cinquième situation : Jusqu'à présent les élèves ont travaillé sur papier quadrillé, ils vont maintenant travailler sur papier blanc. Par équipes, à partir de rectangles superposables qu'ils doivent découper en quelques morceaux simples, on leur demande de fabriquer des surfaces de formes différentes en recollant tous les morceaux sans chevauchement et de comparer les surfaces obtenues. On décide que les surfaces obtenues ont même aire puisque le recollement vérifie les conditions déterminées précédemment sur papier quadrillé.

C'est la première situation que nous avions utilisée, mais nous pouvons maintenant employer le mot "aire" et ainsi donner un sens plus précis à l'expression "place occupée" dont nous avions pu voir toute l'ambiguïté.

Sixième situation : Enfin on propose aux élèves de découper une surface dessinée sur papier quadrillé et avec des lignes du découpage qui, cette fois, ne suivent pas le quadrillage ; on demande aux élèves de fabriquer avec les morceaux, d'autres surfaces comportant le même nombre de carreaux. Le découpage-recollement est cette fois le moyen de répondre à la question : on n'a pas besoin de compter les carreaux de la nouvelle surface, la réversibilité du découpage assure sa conservation.

Remarquons que dans une classe où nous avions proposé ce travail avant la phase sur papier blanc, les élèves ont essayé de compter les carreaux des nouvelles surfaces, en évaluant des morceaux de carreaux.

L'ensemble de ces six situations-problèmes est peut-être un peu lourd. Il n'est sans doute pas nécessaire qu'elles soient toutes traitées avec la même classe, pourvu que toutes les questions aient été soulevées. Par exemple, la sixième situation peut seulement être évoquée au cours du bilan de la cinquième. L'ensemble de ces situations ne devrait pas utiliser plus de 2 séances en classe.

2.2. Confrontation longueur - aire

Le sens de l'aire dont on dispose permet-il de résoudre des problèmes impliquant à la fois aire et longueur, en particulier :

- deux surfaces qui ont même aire ont-elles même périmètre ?
- deux surfaces qui ont même périmètre ont-elles même aire ?
- peut-on modifier une surface de façon à diminuer l'aire et augmenter le périmètre ? diminuer le périmètre et augmenter l'aire ?

A ce moment de l'apprentissage, on sait mesurer les longueurs, on ne sait pas mesurer les aires mais on dispose de procédures qualitatives pour les comparer. Ces questions ont pour but de déstabiliser une conception de l'aire liée à la forme, et de préparer le recours pertinent aux nombres pour traiter les problèmes d'aire.

Elles avaient été prévues dans la première analyse où nous avions envisagé les problèmes suivants :

1. commander de la ficelle pour border les surfaces de même aire fabriquées par équipe à partir de rectangles superposables ; comparer ensuite les périmètres de ces surfaces. On peut ajouter cette consigne à la cinquième situation prévue au paragraphe précédent.
2. à partir d'une surface donnée, en fabriquer une autre d'aire plus petite et de périmètre plus grand
3. à partir d'un rectangle, en fabriquer un autre de même aire et de périmètre plus grand (et éventuellement de même aire et de périmètre plus petit).
4. après l'introduction de la mesure des aires et des formules pour le rectangle, recherche de rectangles de périmètre donné et calcul de leur aire.

Les premiers problèmes permettent une différenciation aire-périmètre dans un contexte découpage-recollement avec des surfaces de forme "quelconque", c'est-à-dire en fait irrégulière. Nous avions aussi prévu de dissocier aire et périmètre à l'intérieur de la forme rectangle, par le découpage-recollement et par la mesure.

Nous avons vu que des difficultés subsistaient, en particulier parce que, dans le cas de figures usuelles (rectangle, parallélogramme), les élèves recourent plus facilement à d'autres points de vue comme celui de la déformation continue.

Les séquences prévues initialement pour différencier aire et longueur nous semblent devoir être conservées, mais elles seront complétées, et c'est l'objet du paragraphe suivant, par la prise en compte d'un point de vue dynamique.

2.3. Dialectique statique - dynamique

Nous avons constaté au cours des entretiens que, pour comparer des aires de surfaces planes, les élèves recourent à des déformations continues des surfaces données et qu'ils ont tendance à amalgamer la conservation des aires et celle des longueurs des côtés dans de telles déformations. Nous faisons l'hypothèse qu'un des problèmes est, pour les élèves, de dissocier ces transformations de la rotation autour d'un sommet qui, elle, conserve longueurs et aires. Nous proposons donc d'étudier séparément l'effet des transformations qu'ils envisagent sur les aires et sur les longueurs (côtés et diagonales) des rectangles, en pensant que la dissociation de ces transformations particulières pourrait avoir des effets de façon plus générale sur l'usage que les élèves font de telles déformations.

a) Glissement d'un côté sur son support

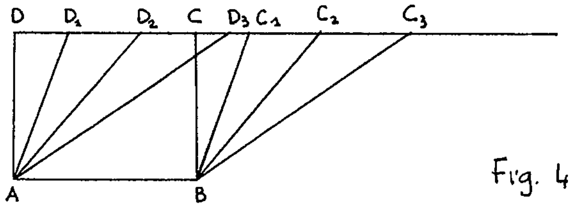


Fig. 48

On déplace CD sur son support (qui est la droite parallèle à AB portant CD). Le rectangle ABCD se transforme en parallélogramme. Comment varient les longueurs des côtés, de chaque diagonale, le périmètre, l'aire du parallélogramme ?

b) Pivotement des côtés autour des sommets

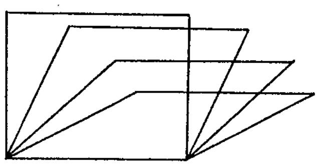


Fig. 49

On a un parallélogramme articulé : les côtés sont des barres rigides (de longueur fixe) qu'on peut faire pivoter autour des sommets. Comment varient les longueurs des côtés, des diagonales, le périmètre, l'aire ?

On attire l'attention sur les diagonales pour que les élèves constatent que toutes les longueurs remarquables du parallélogramme ne sont pas déterminées par celles des côtés, et donc que celles-ci ne suffisent pas à caractériser le parallélogramme. Nous ne proposons pas la hauteur maintenant : elle interviendra quand elle aura été reconnue comme pertinente pour la mesure de l'aire.

Les transformations continues ci-dessus se situent dans le cadre géométrique, mais avec un point de vue dynamique qui, nous l'avons vu, incite les élèves à considérer que les caractéristiques de la figure sont conservées (en particulier aires et longueurs des côtés dans le cas (a) du glissement comme dans le cas (b) du pivotement) puisqu'ils envisagent qu'il s'agit de la même figure qu'on déforme : "on penche le rectangle", "on redresse le parallélogramme". Les élèves pour lesquels un parallélogramme n'est qu'un rectangle penché et qui proposent de "redresser" le parallélogramme pour obtenir un rectangle de même aire, sont d'autant plus convaincus de leur démarche que le parallélogramme se présente à eux comme un rectangle peu perturbé (côtés peu penchés). En effet, c'est dans le cas où on s'écarte peu de la situation de départ qu'ils considèrent ces déformations, ce qui leur garantit une illusion de stabilité.

Pour dépasser ce point de vue, il est nécessaire de dissocier les états de départ et d'arrivée tout en les considérant comme deux états d'une déformation qu'on peut accuser vers des cas limites de façon à en grossir les effets : parallélogramme très allongé dans le cas (a), très aplati dans le cas (b).

La perception oblige à douter mais non à renoncer immédiatement aux convictions erronées. Elle peut même remettre en cause des convictions justes (cas (a) avec parallélogramme très penché)

Dans le cas (b) en poussant la transformation, la perception à elle seule oblige à remettre en question la conservation de l'aire puisqu'à la limite le parallélogramme aplati a une aire nulle. Cependant la variation de l'aire est perçue dans un premier temps de manière discontinue : d'abord elle ne change pas, ensuite elle devient très petite. Puis, plusieurs étapes intermédiaires étant dessinées, on se convainc plus ou moins que l'aire diminue régulièrement, devient nulle à la limite. Remarquons que nous retrouvons là des observations analogues à celles de Vinh Bang et Lunzer (1965) (voir chapitre 2 paragraphe 1.1.).

Dans le cas (a), on constate que les côtés deviennent de plus en plus longs, mais du coup on se met à douter de la conservation de l'aire.

Les deux transformations sont bien différenciées mais les conservations, correctes ou non, qui paraissaient évidentes pour les petites déformations ne le sont plus. Des preuves deviennent nécessaires.

Dans les deux cas, on peut recourir au découpage et au recollement pour avoir une preuve :

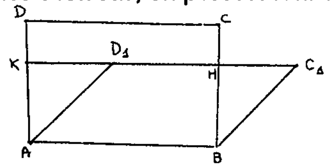


Fig. 50

Le parallélogramme ABC_1D_1 a même aire que le rectangle ABHK et donc une aire plus petite que le rectangle ABCD. On remarque de plus que si les longueurs des côtés sont conservées, celles des diagonales, elles, ne le sont pas.

Dans le cas a) le découpage - recollement permet de convaincre de la conservation de l'aire, du moins si CD ne s'est pas trop déplacé :

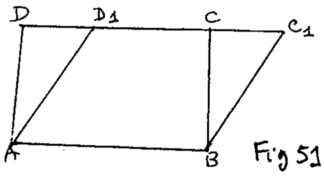


Fig 51

aire de ADD_1 = aire de BCC_1 donc aire de ABCD = aire de ABC_1D_1

L'aire est conservée mais la longueur des côtés obliques augmente et donc aussi le périmètre.

Nous avons déjà dit pourquoi nous considérons que le découpage-recollement est un point de vue "statique" face à celui dela déformaton continue.

Dans le cas où D_1 est extérieur au segment DC, il est difficile de considérer le parallélogramme comme obtenu par découpage et recollement à partir du rectangle, si on veut comparer les aires de ABCD et ABC_1D_1,on a besoin de recourir à l'additivité des aires[2] :

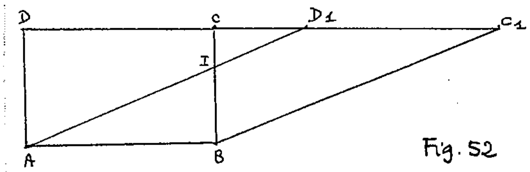


Fig. 52

* On a par exemple :
aire de ABC_1D = aire de ABCD + aire de BCC_1 = aire de ABC_1D_1+ aire de ADD_1 et aire de ADD_1 = aire de BCC_1 donc aire de ABC_1D_1= aire de ABCD.
* On pouvait aussi, en essayant de comparer directement ABCD et ABC_1D_1 voir d'une part que : aire de ABCD = aire de ABI + aire de AICD et
aire de ABC_1D_1 = aire de ABI + aire de BID_1C_1 ,
d'autre part que aire de AICD = aire de ADD_1- aire de ICD_1 et
aire de BID_1C_1 = aire de BCC_1 - aire de ICD_1
or, aire de ADD_1 = aire de BCC_1 ...

Le démarrage de la deuxième procédure peut paraître plus facile puisqu'il correspond à l'habitude qu'ont les élèves de découper une surface en morceaux. Mais on est ensuite amené, comme dans le premier cas à insérer les surfaces qu'on veut comparer (AICD et BIC_1D_1) dans des surfaces plus grandes (ADD_1et BCC_1), ce qui ne fait pas partie des habitudes. Dans ces conditions, le recours au trapèze ABC_1D est plus économique ; on peut l'envisager même quand D_1 est entre C et D. De toute façon, on doit s'intéresser aux triangles BCC_1 et ADD_1.

Toutefois, pour se rendre compte de l'égalité de leurs aires, on a besoin de les considérer comme translatés l'un de l'autre et donc d'avoir une vision dynamique de la figure mais en focalisant cette fois son intérêt sur les deux triangles et non plus sur la déformation du rectangle en parallélogramme.

Apparaît alors un nouvel objet d'étude qui est une autre procédure pour comparer : plonger les deux surfaces à comparer dans une troisième et se ramener à la comparaison des compléments. Cette procédure est difficile pour les élèves de l'école élémentaire et elle nécessite apprentissage. Notons que ce recours aux compléments sera nécessaire dans d'autres situations de mesure (par exemple comparaison de volumes pleins). La situation rencontrée ici offre une occasion de l'aborder.

[2] On pourrait aussi comparer un paralléloramme à un autre pour montrer que toutes les figures intermédiaires sont d'aire égale, et utiliser plusieurs découpage-recollement pour passer du rectangle au parallélogramme final.

Quant aux variations de longueur des côtés AD et BC, si elles sont peu perceptibles quand D_1 est voisin de D, elles deviennent manifestes quand D_1 s'éloigne de D. Il en est de même pour la diagonale AC. En revanche BD diminue quand D_1 se rapproche de C, passe par un minimum quand D_1 est en C et augmente ensuite.

Le point de vue dynamique devrait permettre de pointer les sources de difficulté, de faciliter les dissociations nécessaires : a) glissement, b) articulation. Le point de vue statique est plus adapté pour établir des preuves.

Ce faisant, le cadre géométrique s'enrichit d'un théorème : invariance de l'aire par "glissement". Ce théorème justifie la formule de l'aire du parallélogramme : aire = base x hauteur.

Mais un nouveau problème s'impose pratiquement ici : *l'aire dépend-elle du choix de la base?* Cela paraît le cas d'après les conditions de production que nous avons proposées (qu'il s'agisse de découper et recoller un triangle ou de déformer le parallélogramme par glissement d'un côté).

La réponse à ce problème amène au problème suivant:
On déforme un parallélogramme ABCD en rectangle de deux manières :
1) AB est fixe, CD glisse
2) AD est fixe, BC glisse
Les aires des rectangles ABEF et ADGH sont-elles égales ?

La réponse ne peut s'obtenir facilement qu'en disant qu'ils ont tous deux la même aire que le parallélogramme : on se ramène dans les deux cas au parallélogramme par glissement de triangles.

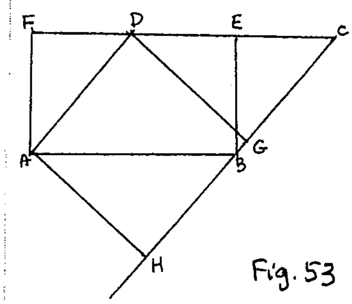


Fig. 53

Pour traiter ce problème, on a besoin de faire jouer un rôle symétrique aux côtés non parallèles du parallélogramme, ce qui n'est pas évident quand le parallélogramme a un côté horizontal. Le problème ci-dessous peut préparer cette situation.
On déforme un rectangle ABCD en parallélogramme de deux manières:
1) AB est fixe, CD glisse
2) AD est fixe, BC glisse
Comparer les aires des parallélogrammes ABEF et ADGH .
On obtient aussi les deux parallélo-grammes à partir du même rectangle par glissement de triangles mais cette fois les glissements se font tous les deux dans des directions privilégiées.

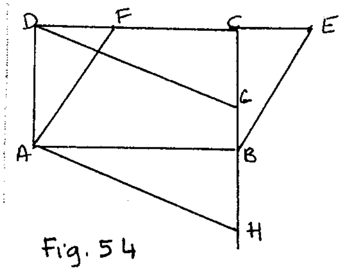


Fig. 54

L'étude des problèmes de déformation ou de découpage et recollement font partie de la construction du sens de la formule usuelle S = b x h. Mais ils ne peuvent pas être tous traités à l'école élémentaire. La déformation en parallélogramme articulé peut être traitée en CM jusqu'au cas limite d'aplatissement. En revanche, le glissement d'un côté sur son support peut être abordé seulement dans le cas où il s'agit d'une autre manière de voir le découpage et recollement d'un triangle entièrement situé dans le parallélogramme. Ces études suffisent déjà à dissocier les effets de ces deux déformations. C'est ce que nous avons observé lors des entretiens. Les autres cas et notamment le changement de base pourraient éventuellement être abordés en CM2 mais aussi différés en 6ème si le temps à consacrer aux aires n'est pas suffisant à l'école élémentaire.

Sans l'étude des problèmes de changement de base, on s'appuie implicitement sur le fait qu'une surface a une aire bien déterminée et que des procédés différents de calcul doivent aboutir au même résultat. Or, J. Rogalski a observé que ce n'est pas un acquis pour tous les élèves de 5ème dans le cas du triangle quelconque. La possibilité d'admettre l'unicité de la mesure quel que soit le moyen de calcul, peut justifier qu'on introduise les formules (parallélogramme, triangle) à l'école primaire, vu l'usage social qui en est fait.

Même si on n'a pas les moyens de justifier l'indépendance du résultat du calcul par rapport à la base choisie, il nous semble qu'il est nécessaire de l'énoncer, d'autant plus qu'elle n'est pas évidente par un calcul à partir de mesures de longueurs effectuées à la règle graduée. Toutefois, on voit le décalage qu'il y a entre la formule usuelle présentée dans toute sa généralité comme si c'était simple, et le travail qu'il faudrait faire pour espérer asseoir sa validité. On ne peut pas s'étonner des difficultés et des dérapages, par ailleurs couramment observés, chez des élèves de collège, voire de lycée (nombreux encore sont ceux pour lesquels l'aire d'un parallélogramme s'obtient en multipliant les longueurs de deux cotés adjacents).

Remarque

Cette situation, proposée au CM2, a pour objectif de dissocier variation d'aire et variation de longueur des côtés d'une figure dans une déformation continue. Il n'est sans doute pas nécessaire d'obtenir toutes les justifications envisagées ci-dessus pour parvenir à ce résultat. Par exemple, le cas où D_1 est à l'extérieur de DC peut ne pas intervenir. Nous avons vu cependant que certains élèves de ce niveau l'envisagent d'eux-mêmes. A d'autres niveaux (4ème, 3ème), on pourrait aussi exploiter davantage la variation de longueur des diagonales.

2.4. Jeu de cadres surfaces - aires - nombres

C'est sur ces jeux de cadres qu'était basé notre premier processus d'apprentissage. Nous les conservons et en résumons ci-dessous les enjeux, pour présenter complètement le processus que nous envisageons maintenant.

Nous les utilisons avec le double objectif d'étendre la mesure des aires et de donner un sens au produit de nombres non entiers. Les situations correspondantes font donc partie à la fois des apprentissages concernant les aires et de ceux concernant les nombres décimaux (nous les retrouverons dans la deuxième partie).

On se situe à un moment de l'apprentissage (fin de CM1 ou CM2) où :

- dans le cadre géométrique, on sait comparer certaines surfaces par déplacement ou par découpage-recollement.
- dans le cadre numérique, on dispose des nombres entiers et de leurs opérations, on a commencé à étendre le domaine des nombres et on dispose de quelques nombres fractionnaires ou décimaux mais on n'a pas encore toutes les opérations sur ces nouveaux nombres.
- on sait associer un nombre à certaines surfaces par le comptage de carreaux sur papier quadrillé ; on a admis que le nombre de carreaux était invariant par déplacement de la surface et par découpage et recollement convenable.

L'extension de l'application mesure entre surfaces et nombres va permettre

1. d'étendre l'ensemble des surfaces dont on sait comparer les aires par pavage.
2. d'étendre la multiplication aux nombres fractionnaires et en particulier aux nombres décimaux.

Inversement, l'extension du champ des surfaces dont on sait comparer les aires par découpage-recollement et l'extension des opérations sur les nombres permettent d'étendre l'application-mesure entre surfaces et nombres.

a) pavage

On a un premier moyen pour comparer davantage de surfaces : le pavage. On peut ainsi associer un nombre aux surfaces qu'on sait paver et comparer les nombres pour comparer les surfaces, à condition d'avoir utilisé des éléments de même aire (éventuellement de formes différentes) pour paver les surfaces à comparer. On constitue de la sorte des familles de surfaces comparables, mais il se peut qu'on ne sache pas comparer des surfaces appartenant à des familles différentes. Au cours du pavage, on peut rencontrer les situations suivantes :

- à une même surface, on a pu associer des nombres différents si elle a été pavée avec des éléments d'aires différentes.

- on a pavé des surfaces avec des surfaces élémentaires d'aires diverses. On ne peut ramener la comparaison des aires à celle des nombres par le pavage que si on a utilisé des éléments de même aire pour paver. On sera dans ce cas si on trouve une surface qui pave les différentes surfaces élémentaires utilisées.

Ces situations contribuent à dissocier l'aire d'une surface du nombre qui la mesure et à mettre l'accent sur le choix nécessaire d'une unité pour construire une application mesure, c'est pourquoi il nous paraît important de les prendre en compte dans l'apprentissage.

A partir d'une activité géométrique, le pavage, et de ce qu'on sait sur les nombres, on étend les connaissances géométriques (davantage de surfaces comparables du point de vue de l'aire) et la relation entre surfaces et nombres (élaboration d'une notion d'application mesure).

Une unité d'aire étant choisie, le pavage permet d'associer un nombre entier à certaines surfaces. Si on dispose d'autres nombres (petites fractions), on va pouvoir associer un nombre à davantage de surfaces en considérant des subdivisions d'un élément de pavage d'aire 1. Mais il reste des surfaces auxquelles on ne sait pas associer de nombre.

b) extension de la multiplication

Dans le jeu de cadres aires - surfaces - nombres, on va aussi récupérer de l'information nouvelle dans le cadre numérique : on peut donner du sens au produit des fractions et des décimaux en s'appuyant sur les aires de rectangles.

Supposons qu'on soit à un moment de l'apprentissage où

- une unité de longueur (resp. d'aire) étant choisie, on sait utiliser des fractions pour désigner des longueurs (resp. des aires, par mesure directe)
- pour des unités de longueur et d'aire adaptées, on sait que, pour un rectangle de dimensions entières, la mesure de l'aire est le produit des mesures des dimensions.
- on cherche à évaluer l'aire d'un rectangle de dimensions fractionnaires.

Par exemple (3+4/5) et (2+2/3)

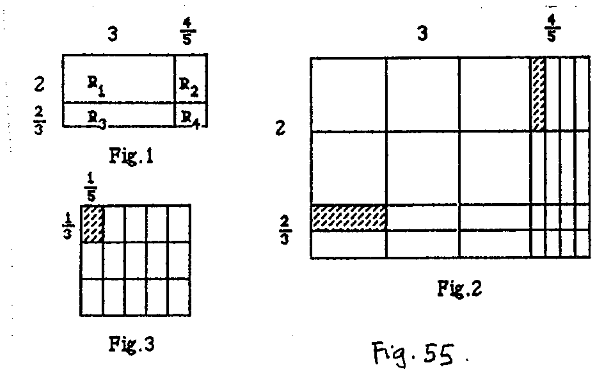


Fig. 55.

Le rectangle R1 de dimensions (3,2) a une aire qui mesure 6 car 2x3 = 6 : il contient 6 carrés unité (Fig 1).

Le rectangle de dimensions (1/5, 1) a une aire qui mesure 1/5 car il se reporte 5 fois dans le carré unité, on en a 4x2 = 8 dans R2 (Fig 2).

Le rectangle de dimensions (1/3, 1) a une aire qui mesure 1/3 car il se reporte 3 fois dans le carré unité, on en a 3x2 = 6 dans R3 (Fig 2).

Le rectangle R4 de dimensions (4/5, 2/3) contient 8 petits rectangles de dimensions (1/5, 1/3) ; chacun de ces petits rectangles se reporte 15 fois dans le carré unité, et a donc une aire qui mesure 1/15 (Fig 3). La mesure de l'aire du rectangle R4 est donc 8/15. Ce résultat a été trouvé à partir des dimensions 4/5 et 2/3, du pavage et des règles d'écriture des fractions. On convient alors que (4/5)x(2/3) = 8/15.

On va ainsi donner comme sens au produit de deux nombres fractionnaires la mesure de l'aire d'un rectangle de dimensions ces deux nombres.

Le rectangle de dimensions (3+4/5, 2+2/3) a une aire qui mesure

6 + (8x1/5) + (6x1/3) + (8x1/15) = 9 + 3/5 + 8/15.

Nous aurons donc (3+4/5)x(2+2/3) = (3x2) + (3x2/3) + (2x4/5) + (4/5x2/3) = 9 + 3/5 + 8/15 et aussi 4/5 x 2 = 8/5 et 3 x 2/3 = 6/3.

Dans les deux derniers cas, ce sens de la multiplication coïncide avec celui de l'addition répétée qu'on avait pu rencontrer auparavant.

D'autres situations permettront de recoller les différents sens de la multiplication qu'on peut rencontrer.

Dans toute la suite du travail sur les aires, le jeu de cadres surfaces - aires - nombres se poursuit, en particulier dans toutes les situations qui concernent les mesures :

- élaboration des formules de calcul d'aire des surfaces usuelles
- proportionnalité de la mesure de l'aire du rectangle à la mesure de chacune des dimensions
- bidimensionalité de l'aire : si on agrandit une surface dans un rapport k, son aire est multipliée par k^2.

Pour traiter chacun de ces problèmes on s'appuie, par l'intermédiaire de divers découpages de surfaces, de pavages en même temps que d'additions et multiplications de nombres, sur l'interaction entre le cadre géométrique et le cadre numérique, l'aire étant l'invariant qui permet de relier les deux cadres.

Conclusion

Notre objectif était de construire la notion d'aire et une application mesure entre surfaces et nombres, de façon qu'elles prennent sens pour les élèves. Notre analyse a priori nous amenait à faire des choix didactiques basés sur des jeux de cadres surfaces-aires-nombres, avec une différenciation de ces trois pôles. Plus précisément, certaines séquences ont eu pour objet de rendre concevable la comparaison d'aires sans recours à la mesure. D'autres ont eu pour objet la comparaison et le calcul d'aires en recourant à la mesure dans le cas de surfaces pavables avec des éléments "étrangers" (non superposables et ne provenant pas d'une subdivision de l'un d'eux) et aussi dans le cas de surfaces non pavables avec un élément choisi à l'avance. Ce travail a permis aux élèves d'étendre le champ des surfaces qu'ils savaient mesurer avec une unité donnée, à des surfaces non pavables avec cette unité. En particulier, un acquis de leur apprentissage est qu'il est possible d'exprimer en cm^2 l'aire d'un triangle, d'un parallélogramme ou d'une autre surface, que le cm^2 est l'aire d'une surface qui peut prendre des formes très diverses.

Autrement dit, une des conséquences de l'apprentissage est la prise de distance par rapport à la conception de l'aire liée à la forme. Toutefois, cette évolution n'est pas nécessairement un résultat qui intervient tout de suite après l'apprentissage. A ce moment là, au CM1, pour comparer des aires de surfaces usuelles, le découpage et recollement convenable n'a été un outil opératoire que pour la moitié des élèves environ. De plus, dans les deux classes, pour traiter ces questions certains amalgament encore aire et périmètre.

Il semble par ailleurs que, face à une situation de comparaison d'aires comme celle qui leur a été proposée en entretien, les élèves se placent prioritairement soit dans le cadre géométrique, soit dans le cadre numérique, sans faire interagir les deux. De plus, la conception de l'aire comme un nombre paraît, chez certains élèves devenir dominante dès qu'elle a été introduite. Ils ramènent les problèmes posés à des problèmes numériques en recourant abusivement à des formules de calcul à partir des longueurs des côtés.

Par ailleurs, des élèves font intervenir fortement un point de vue "déformation" de surfaces usuelles (ici des parallélogrammes) en surfaces plus familières qu'ils savent traiter (des rectangles), soit pour produire une réponse, soit pour justifier un calcul. La déformation dans le cas traité pouvait conserver l'aire (glissement d'un côté du parallélogramme sur son support) ou ne pas la conserver (articulation de deux côtés autour des sommets). Elle produisait dans les deux cas une déclaration de conservation de l'aire.

Il semble, d'après les résultats aux tests écrits de fin d'année, que les élèves concernés ont fait évoluer leur point de vue de façon déterminante lors des entretiens en binôme, et ce de façon d'autant plus marquée que leurs conceptions les conduisaient à des affirmations contradictoires. Il faut remarquer cependant que, dans les tests écrits, les pavés avaient la même forme que les surfaces à paver.

Ainsi, l'expérience nous a appris que les jeux de cadres prévus étaient insuffisants et qu'il était important d'y ajouter d'autres dialectiques, notamment entre papier blanc et papier quadrillé, entre points de vue "statique" et "dynamique".

Les situations à proposer aux élèves restent à expérimenter et à mettre au point. Nous avions l'intention de le faire l'année suivante dans d'autres classes, plus particulièrement en 6ème. Diverses circonstances nous ont fait rencontrer des conditions expérimentales particulières qui nous ont amenée à changer notre objet d'étude comme on le verra dans la deuxième partie. On y trouvera néanmoins quelques prolongements de cette recherche sur les aires dans le chapitre 3B.

Références bibliographiques de la première partie.

A.P.M.E.P. (1982) *Grandeur. Mesure.* Brochure n°46 Mots VI

A.P.M. ou A.P.M.E.P. *Bulletin* nombreux numéros de 1958 à 1988.

N. BALACHEFF (1988) : *Processus de preuve chez des élèves de collège.* Thèse de doctorat d'état, Université de Grenoble I

S. BANACH (1923) : Sur le problème de la mesure. *Fundamenta Mathematicae 4,* p.7-33 repris dans l'édition des œuvres complètes de Stephan Banach, PWN Editions scientifiques de Pologne, Warszawa, 1967.

S. BANACH et A. TARSKI (1924) : Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae 6,* p.244-277 repris dans l'édition des œuvres complètes de Stephan Banach, opus cité.

Y. CHEVALLARD (1985) *La transposition didactique.* La pensée sauvage Grenoble.

DEHN M. (1900) : Ueber raumgleiche Polyeder. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math-Phys. Kl.* p. 345-354.

DEHN M. (1902) : Ueber den Rauminhalt, *Math. Ann.* 55 p. 465-478.

R. DOUADY (1984) : *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.* Thèse de doctorat d'état, Université Paris VII

R. DOUADY (1987) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2 p. 5-31. La pensée sauvage Grenoble.

R. DOUADY M.J. PERRIN-GLORIAN (1983) *Mesure des longueurs et des aires.* Brochure n° 48 IREM Université Paris 7.

R. DOUADY et M.J. PERRIN-GLORIAN (1984-1985) Aires de surfaces planes 1ère partie et 2ème partie *"Petit x"* n° 6, p.5-33 et *"Petit x"* n° 8, p. 5-30 IREM de Grenoble.

R. DOUADY et M.J. PERRIN-GLORIAN (1987) : Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane *Cahiers de didactique des mathématiques n° 37* IREM Université Paris 7.

R. DOUADY et M.J. PERRIN-GLORIAN (1989) : Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane *Educational Studies in Mathematics* Vol.20. n°4, p. 387-424

M.EMERY : *Le paradoxe de Hausdorff-Banach- Tarski,* fragment d'un cours de L.E. Dubins, note dactylographiée.

J. HADAMARD (1928) *Leçons de géométrie élémentaire I géométrie plane.* Armand Colin, Paris.

F. HAUSDORFF (1914) Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen *Mathemetische Annalen,* 75 p. 428-433.

F. HAUSDORFF (1914) *Grundzüge der Mengenlehre,* Leipzig, 1914.

H. LEBESGUE (1931-1935) Sur la mesure des grandeurs in *l'Enseignement Mathématique.* Blanchard, Paris réed. 1975

J. PIAGET, B. INHELDER et A. SZEMINSKA (1948): La géométrie spontanée de l'enfant. P.U.F. Paris.

A. REVUZ (1959) Théorie de l'intégration *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* n°196, 198, 199.

A. REVUZ (1974) Les points essentiels d'une théorie élémentaire de la mesure dans *Recherches pédagogiques n°64* Ed. INRP SEVPEN

J. ROGALSKI (1983) L'acquisition des notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur,surface). *Recherches en Didactique des mathématiques* n° 3.3, p. 343-396, La Pensée Sauvage, Grenoble.

VINH BANG et LUNZER E. (1965), Conservations spatiales *Etudes d'épistémologie génétique vol 19* Paris PUF.

* * *

Bibliographie complémentaire sur les aires et mesures.

A. BESSOT et M. EBERHARD (1984) : "Une approche didactique des problèmes de la mesure" *Recherches en didactique des mathématiques* n°4.3

BKOUCHE R. et al. (1982) *La rigueur et le calcul* Ed. Cedic.

BOLTIANSKI (1978) : Hilbert's third problem, traduit par R.S. Silverman, Ed. V.H. Winston, Washington.

J. DHOMBRES (1975) *Nombre, mesure et continu ; épistémologie et histoire.* Ed. Cédic et IREM de Nantes

ERMEL cycle élémentaire tome 1 p 98 à 107

ERMEL Cycle Moyen tome 2 p 169 à 237 (voir aussi le chapitre sur les décimaux p 8 à 53)

A. HARLE (1984) L'arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire français au début du 20ème siècle *thèse de 3ème cycle Université Paris 7*

M. KASTENBAUM (1987) : Procédés graphique utilisés pour l'enseignement de la mesure de la surface à l'école élémentaire *Bulletin de psychologie.* Numéro spécial Images 1987.

J. PIAGET et B. INHELDER (1948) : *La représentation de l'espace.* Paris, PUF.

A. REVUZ (1970) Article "Intégration et mesure" dans l'Encyclopaedia Universalis.

O. TOEPLITZ (1963). *The calculus. A genetic approach (traduit de l'allemend par L. Lange).* The University of Chicago Press.

G. VERGNAUD (1981) : *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Ed. P. Lang, Berne.

TABLE DES MATIERES DE LA PREMIERE PARTIE

* * *

Les annexes 2, 3, 4 qui contiennent des extraits des programmes de l'école élémentaire de 1887 à 1986, des extraits des programmes du premier cycle de 1902 à 1986 et des extraits des manuels de l'école élémentaire des années 1970 ne figurent pas dans cette version en format réduit mais sont disponibles auprès de l'auteur.

LE PARADOXE

DE HAUSDORFF-BANACH-TARSKI

(Fragment d'un cours de L.E. Dubins

rédigé par M. Emery)

Il s'énonce de la manière suivante (les définitions précises seront données plus loin) : <<Si X et Y sont deux parties de $\mathbb{R}^3$ bornées et d'intérieur non vide — par exemple une pomme et la lune — il est possible de découper X en un nombre fini de morceaux et de réarranger ceux-ci pour obtenir Y.>>

L'essentiel du paradoxe est contenu dans le lemme suivant, qui en constitue la partie géométrique.

LEMME. Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ (d'équation $x^2+y^2+z^2=1$). Il existe deux rotations a et b dans SO_3, d'angles respectifs 180° et 120°, et une partition (A,B,C,D) de S telles que D est dénombrable, et que

$$C = bB = b^2A \quad ; \quad A = a(B\cup C) \quad .$$

Autrement dit, l'ensemble A est à la fois le tiers et la moitié de S-D.

Démonstration. On pose

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} ,$$

et on appelle G le groupe engendré par a et b, qui est constitué de l'identité e, de a, et des rotations de la forme

$$(1) \qquad r = a^{\varepsilon_1} b^{n_1} a b^{n_2} a \dots a b^{n_{k-1}} a b^{n_k} a^{\varepsilon_2} \quad ,$$

où $k \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ et $n_i \in \{1,2\}$. On remarque que tout élément de $G-\{e,a\}$ admet une seule écriture du type (1). (Ceci revient en effet à vérifier qu'un produit $b^{n_1}ab^{n_2}a \dots ab^{n_k}a$ ($k\in\mathbb{N}^*$, $n_i\in\{1,2\}$) n'est jamais égal à a ou à e ; or on vérifie facilement par récurrence qu'un tel produit est de la forme

$$\frac{1}{2^k}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3\sqrt{3} \\ i_1 & p_4 & i_2\sqrt{3} \\ i_3\sqrt{3} & p_5\sqrt{3} & i_4 \end{pmatrix}$$

où les p_j sont des entiers pairs et les i_j des entiers impairs.) Le groupe G est donc le groupe des mots réduits formés à l'aide des lettres a et b, les seules règles de réduction étant $a^2 = b^3 = e$.

On peut maintenant définir une partition (G_1,G_2,G_3) de G selon la règle suivante : pour $n\geq 0$, on met dans G_1 les mots $(b^2a)^n$, dans G_2 les mots $a(b^2a)^n$ et dans G_3 les mots $ba(b^2a)^n$; les autres mots sont mis dans G_1 (resp. G_2, G_3) selon qu'ils commencent (à gauche) par a (resp. b^1, b^2). On vérifie sans peine les égalités $G_3 = bG_2 = b^2G_1$, $G_1 = a(G_2\cup G_3)$.

Il ne reste qu'à faire opérer G sur S. L'ensemble

$$D = \{ x\in S : \exists r\in G-\{e\} \quad rx=x \}$$

est formé des intersections avec S des axes des rotations $r\in G-\{e\}$; c'est un ensemble dénombrable, stable par G. Pour $x\in S-D$, l'orbite de x sous G est en bijection avec G par $r \longleftrightarrow rx$. On choisit un représentant de chacune des orbites contenues dans S-D ; grâce à l'axiome du choix, ceci peut se faire de manière à obtenir un ensemble E. On pose alors $A = G_1E$, $B = G_2E$, $C = G_3E$; compte tenu des propriétés de G_1, G_2, G_3, on vérifie sans difficulté, orbite par orbite, que A, B, C forment une partition de S-D et satisfont à

$$C = bB = b^2A \quad ; \quad A = a(B\cup C) \quad . \quad ∎$$

Le reste de la démonstration du paradoxe est consacré à des manipulations d'ensembles.

La notation $X \equiv Y$ signifiant que les parties X et Y de $\mathbb{R}^3$ se correspondent par un déplacement, on dira que deux parties X et Y de $\mathbb{R}^3$ sont équivalentes par découpage fini (et on écrira $X \underset{f}{\equiv} Y$) si l'on a $X_1 \equiv Y_1$, $X_2 \equiv Y_2$, ..., $X_n \equiv Y_n$ pour une partition $(X_1, \dots, X_n)$ de X et une partition $(Y_1, \dots, Y_n)$ de Y. Lorsque c'est le cas, il existe une bijection f de X sur Y ayant même restriction à chaque X_i qu'un déplacement f_i de $\mathbb{R}^3$;

une telle bijection sera dite associée à l'équivalence entre X et Y.

L'énoncé exact du paradoxe est le suivant : <u>Deux parties bornées d'interieur non vide de</u> $\mathbb{R}^3$ <u>sont toujours équivalentes par découpage fini</u>.

Les propriétés de l'équivalence par découpage fini qui seront utilisées dans la suite sont

a) une propriété d'union disjointe : si les unions $X \cup X'$ et $Y \cup Y'$ sont disjointes, et si $X \underset{f}{\equiv} Y$ et $X' \underset{f}{\equiv} Y'$, alors $X \cup X' \underset{f}{\equiv} Y \cup Y'$;

b) la transitivité, qui en fait une relation d'équivalence : si $X \underset{f}{\equiv} Y$ et $Y \underset{f}{\equiv} Z$, il existe des partitions finies P_X et P_Z de Y qui correspondent respectivement à des partitions de X et Z ; si P est alors une partition finie de Y plus fine que P_X et P_Z, les éléments de P convenablement déplacés permettent de reconstituer aussi bien X que Z, d'où $X \underset{f}{\equiv} Z$;

c) enfin, une propriété analogue au théorème de Cantor-Bernstein: si, pour une partie X' de X et une partie Y' de Y, on a $X \underset{f}{\equiv} Y'$ et $X' \underset{f}{\equiv} Y$, alors $X \underset{f}{\equiv} Y$. Soient en effet $f : X \longrightarrow Y'$ une bijection associée à l'équivalence entre X et Y' et $g : X' \longrightarrow Y$ une bijection associée à l'équivalence entre X' et Y. La démonstration classique du théorème de Cantor-Bernstein fournit l'existence d'une partie X" de X' telle que

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X - X'' \\ g(x) & \text{si } x \in X'' \end{cases}$$

soit une bijection de X sur Y (par exemple $X'' = X - \bigcup_{n \geq 0} (g^{-1} \circ f)^n (X - X')$).
La restriction de f à chaque élément d'une certaine partition finie P de X est la trace d'un déplacement ; il en va de même pour g et une partition finie Q de X'. Les partitions P et Q induisent respectivement des partitions traces P' et Q' sur $X - X''$ et X". La réunion $P' \cup Q'$ est une partition finie de X sur chaque élément de laquelle la restriction de h coincide avec un déplacement, d'où l'équivalence entre X et Y.

Reprenons maintenant la démonstration du paradoxe où nous l'avions laissée, c'est à dire à la sphère unité découpée en quatre morceaux A, B, C

et D, ce dernier étant dénombrable, tels que $A \equiv B \equiv C$ et $A \equiv B \cup C$. Donnons-nous deux autres sphères de rayon un, S' et S", disjointes. La translation qui envoie S sur S' (resp. S") transforme A, B, C et D en A', B', C' et D' (resp. A",B", C" et D"). Les neuf ensembles A, A', A", B, B', B", C, C' et C" se correspondent par déplacement ; de $A \equiv B \cup C$, on peut donc déduire

$$A \underset{f}{\equiv} A' \cup A'' \qquad B \underset{f}{\equiv} B' \cup B'' \qquad C \underset{f}{\equiv} C' \cup C'' \quad ,$$

et, par réunions disjointes, $(S - D) \underset{f}{\equiv} (S' - D') \cup (S'' - D'')$.

Ceci constitue le résultat de Hausdorff : A des ensembles dénombrables près, la sphère S équivaut par découpage fini à $S' \cup S''$. La suite est due à Banach et Tarski : Elimination des ensembles dénombrables, puis généralisation à des parties quelconques.

Pour éliminer l'ensemble D, choisissons z tel que z et $-z$ soient dans $S - D$. Parmi les rotations d'axe Oz, celles qui vérifient la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in D \ \forall y \in D \qquad r^n x \neq y$$

forment un ensemble non vide, car de complémentaire dénombrable. Soit donc r possédant cette propriété ; les ensembles D, rD, ..., $r^n D$, ... sont deux-à-deux disjoints. En notant U leur union, on a $rU = U - D$, d'où $U \equiv U - D$.
On en déduit $U \cup (S - U) \underset{f}{\equiv} (U - D) \cup (S - U)$, c'est-à-dire $S \underset{f}{\equiv} (S - D)$. De même, on montre que $S' \underset{f}{\equiv} (S' - D')$ et $S'' \underset{f}{\equiv} (S'' - D'')$, ce qui permet de transformer le résultat de Hausdorff en $S \underset{f}{\equiv} S' \cup S''$.

Il existe donc des partitions $(S_1, \ldots, S_{m+n})$, $(S'_1, \ldots, S'_m)$ et $(S''_1, \ldots, S''_n)$ de S, S' et S" telles que $S_1 = S'_1$, ..., $S_m = S'_m$, $S_{m+1} = S''_1$, ..., $S_{m+n} = S''_n$. En remplaçant les S_i par $\bigcup_{0<t\leq 1} tS_i$ et les S'_i et S''_i par des ensembles analogues, on en déduit

$$T - \{O\} \underset{f}{\equiv} (T' - \{O'\}) \cup (T'' - \{O''\}) \quad ,$$

où T, T' et T" sont les boules fermées de frontières S, S' et S", et O, O' et O" leurs centres respectifs.

Il est facile d'en déduire $T \underset{f}{\equiv} T' \cup T''$; il suffit pour cela de vérifier que $T - \{O\} \underset{f}{\equiv} T$, ou encore, puisqu'on a évidemment pour $x \in S$ $T - \{O\} \underset{f}{\equiv} T - \{x\}$, que $T - \{x\} \underset{f}{\equiv} T$ pour un x de S. Mais ceci résulte de l'équivalence $S - \{x\} \underset{f}{\equiv} S$ (vraie — voir plus haut — car l'ensemble $\{x\}$ est dénombrable) à laquelle il suffit de rajouter l'ensemble $T - S$.

Nous savons donc qu'une boule unité équivaut à deux boules unité. Il est facile d'en déduire par récurrence que, <u>pour</u> $n \geq 1$, <u>une réunion disjointe de</u> n <u>boules unité équivaut</u>, <u>par découpage fini</u>, <u>à une boule unité</u>.

Jusqu'ici, la propriété de Cantor-Bernstein n'a pas été utilisée. Elle va servir à passer des boules au cas des ensembles quelconques.

Soit X une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ qui contient une boule fermée X' de rayon $r > 0$. Il est possible de découper X en un nombre fini, soit n, de morceaux qui sont chacun inclus dans une boule de rayon r. Donnons-nous par ailleurs une réunion Z de n boules fermées disjointes de rayon r. Par définition de n, X est équivalente par découpage fini à une partie Z' de Z ; d'autre part, le travail fait sur les boules de rayon un se généralise par homothétie aux boules de rayon r, d'où $X' \underset{f}{\equiv} Z$. Grâce à la propriété de Cantor-Bernstein, on a alors $X \underset{f}{\equiv} Z$, donc $X \underset{f}{\equiv} X'$.

Si maintenant X et Y sont deux parties bornées d'intérieur non vide de l'espace $\mathbb{R}^3$, elles contiennent respectivement des boules X' et Y' de même rayon $r > 0$, et, de $X \underset{f}{\equiv} X'$ et $Y \underset{f}{\equiv} Y'$, on déduit $X \underset{f}{\equiv} Y$: Le paradoxe est établi dans toute sa généralité.

REMARQUES

Pour $n = 1$ ou 2, le même paradoxe n'a pas lieu dans $\mathbb{R}^n$. Banach a en effet démontré qu'il existe alors une mesure simplement additive, définie sur toutes les parties de $\mathbb{R}^n$, invariante par les déplacements de $\mathbb{R}^n$ et qui coïncide, sur les boréliens, avec la mesure de Lebesgue (cette construction utilise la commutativité du groupe SO_n, en défaut pour $n \geq 3$).

Le paradoxe n'a donc pas lieu dans $\mathbb{R}^2$. Mais si l'on remplace, dans la définition de $X \equiv Y$, le groupe des déplacements par celui des transformations affines directes qui préservent la mesure de Lebesgue, il a lieu en dimension 2.

On n'a pas cherché ici la construction la plus économique possible. Raphael Robinson a montré $S \equiv S' \cup S''$ en découpant S' et S'' en trois morceaux chacune.

En dimension 1, disons que $A \gtrsim B$ s'il existe une bijection 1-lipschitzienne de A sur B, et que $A \underset{f}{\gtrsim} B$ s'il existe des partitions $(A_1, \dots, A_n)$ et $(B_1, \dots, B_n)$ de A et B telles que, pour tout i, $A_i \gtrsim B_i$. Il est faux que $[0,1] \underset{f}{\equiv} [0,10]$, mais vrai que $[0,1] \underset{f}{\gtrsim} [0,10]$.

REFERENCES

F. Hausdorff. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig (1914).

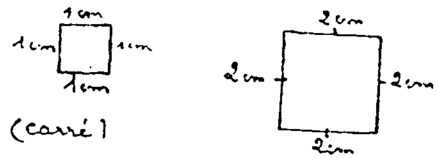
S. Banach et A. Tarski. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. Fund. Math. 6 (1924) 244-277.

S. Banach. Sur le problème de mesure. Fund. Math. 4 (1923) 7-33.

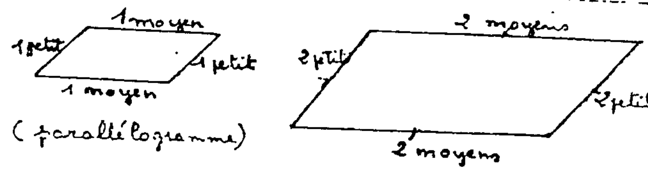
J. von Neumann. Zur allgemeinen Theorie des Masses. Fund. Math. 13 (1929) 143-173.

209

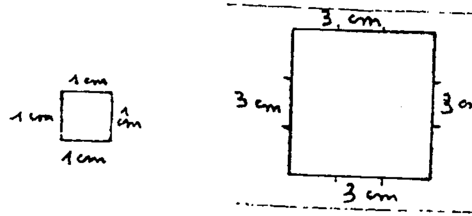
Combien de petites figures dans la grande ?
(entoure la bonne réponse)



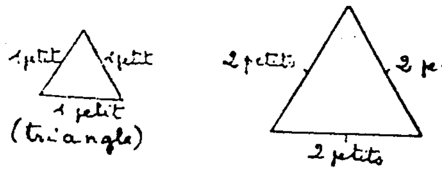
petits carrés : 2 | 3 | 4 | 5



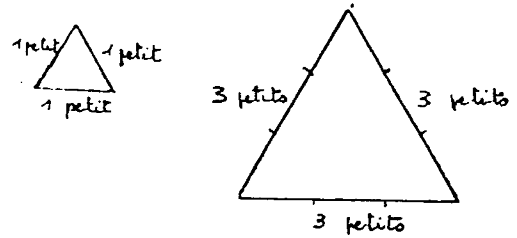
petits parallélogrammes : 3 | 4 | 6 | 8



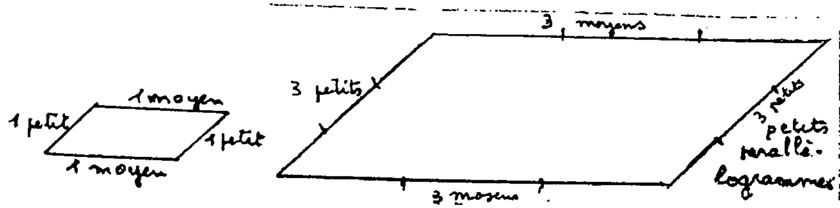
petits carrés : 4 | 6 | 8 | 9



petits triangles : 2 | 3 | 4 | 6



petits triangles : 3 | 6 | 7 | 8 | 9

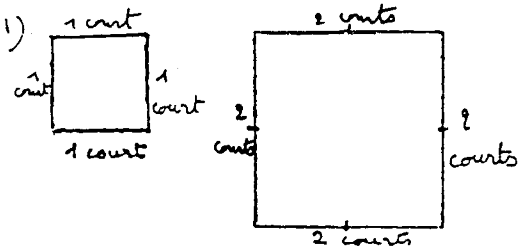


petits parallélogrammes : 4 | 6 | 7 | 8 | 9

210

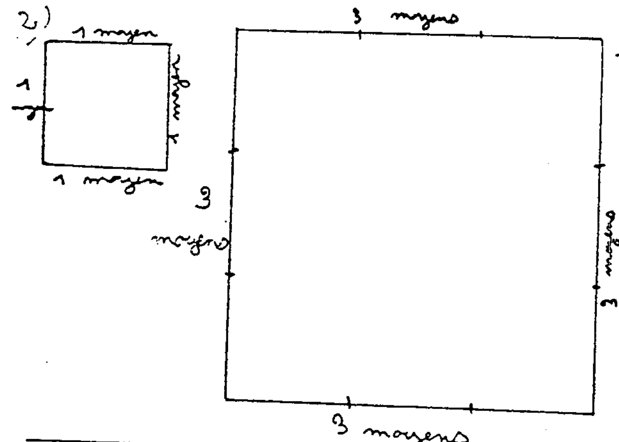
Poser les opérations effectuées.

1)



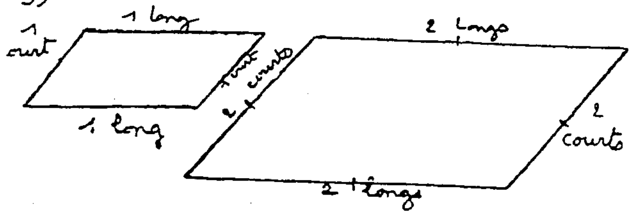
Pour peindre le petit carré, il faut 5 pots de peinture rouge. Combien de pots pour le grand ?

2)

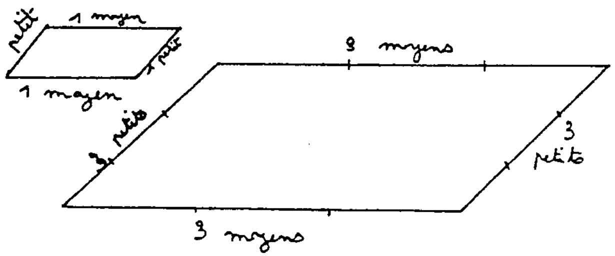


Pour peindre le petit carré, il faut 6 pots de peinture verte. Combien de pots pour le grand ?

3)



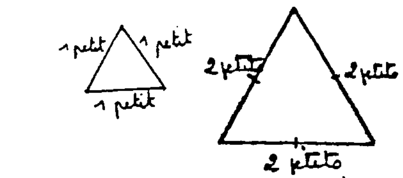
Pour peindre le petit parallélogramme, il faut 5 pots de peinture jaune. Combien de pots pour le grand ?



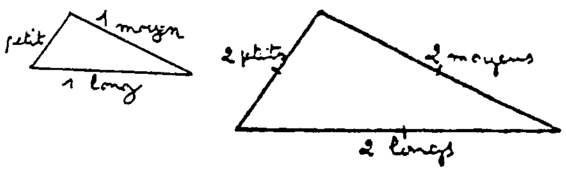
Pour peindre le petit parallélogramme, il faut 4 pots de peinture bleue. Combien de pots pour le grand

211

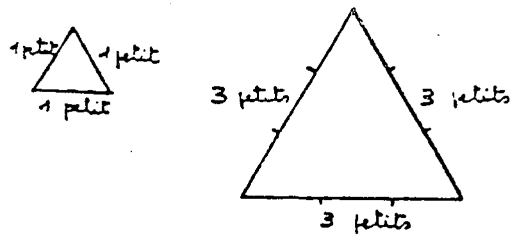
Poser les opérations effectuées



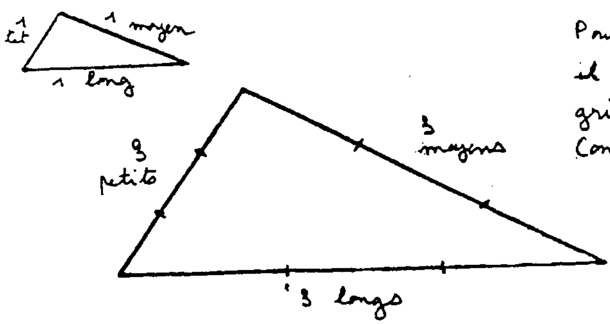
Pour peindre le petit triangle, il faut 1 pot de peinture blanche.
Combien de pots pour le grand ?



Pour peindre le petit triangle, il faut 2 pots de peinture marron.
Combien de pots pour le grand ?



Pour peindre le petit triangle, il faut 1 pot de peinture orange.
Combien de pots pour le grand ?

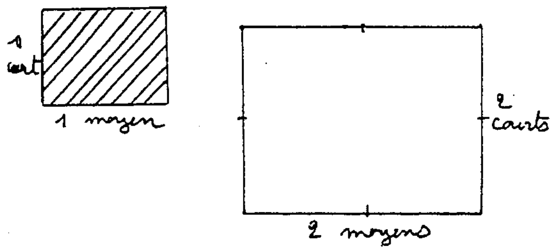


Pour peindre le petit triangle, il faut 2 pots de peinture grise.
Combien de pots pour le grand ?

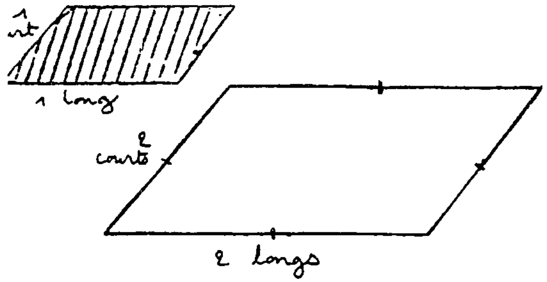
212

Poser les opérations effectuées

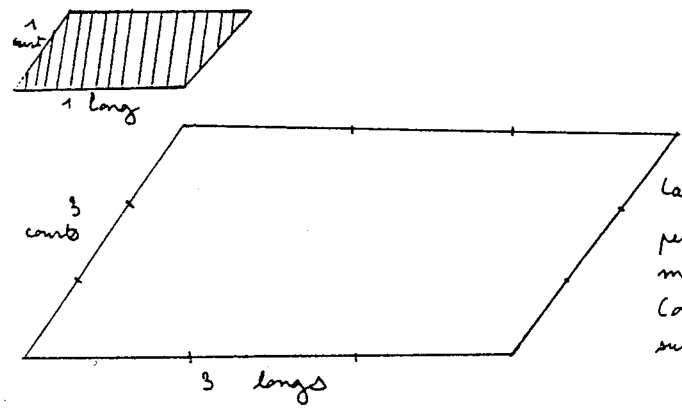
La surface des petites figures est hachurée et voici leur mesure



La surface du petit rectangle mesure 5 cm².
Combien mesure la surface du grand ?



La surface du petit parallélogramme mesure 5 cm².
Combien mesure la surface du grand ?

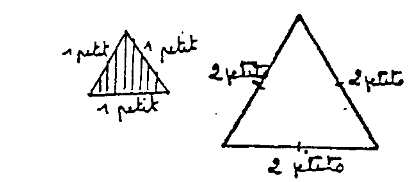


La surface du petit parallélogramme mesure 5 cm².
Combien mesure la surface du grand ?

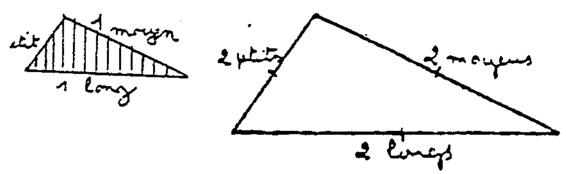
213

Poser les opérations effectuées -

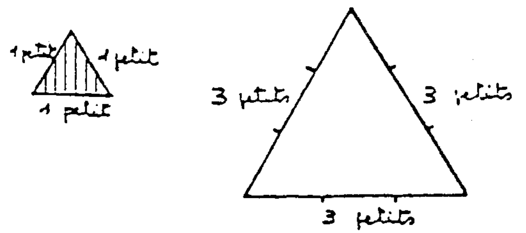
La surface des petites figures est hachurée et voici leur mesure



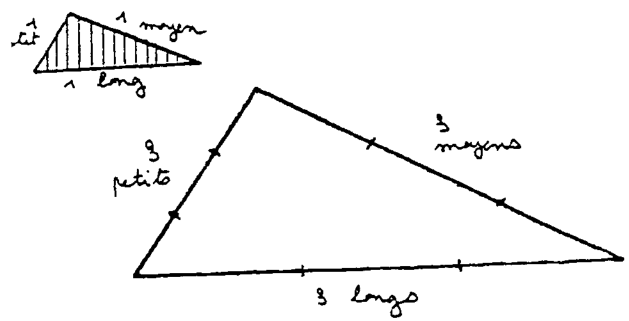
La surface du petit triangle mesure $1 cm^2$
Combien mesure la surface du grand ?



La surface du petit triangle mesure $2 cm^2$
Combien mesure la surface du grand ?

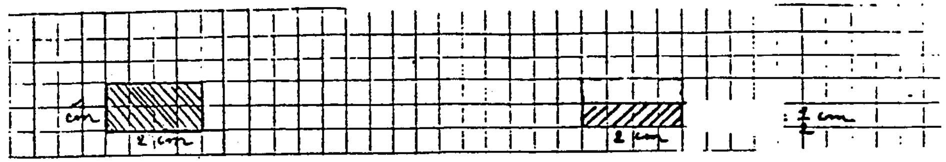


La surface du petit triangle mesure $1 cm^2$.
Combien mesure la surface du grand ?



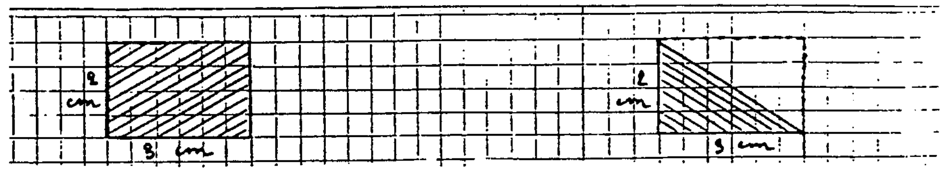
La surface du petit triangle mesure $2 cm^2$.
Combien mesure la surface du grand ?

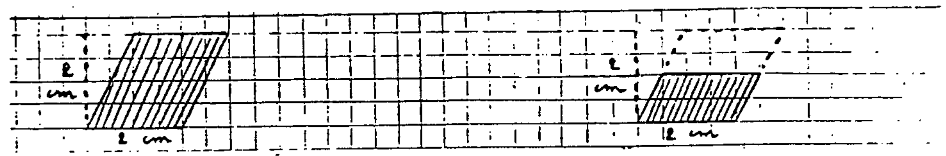
214

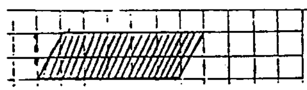


L'aire de ce rectangle est $2 cm^2$

Combien mesure la surface de ce rectangle ?

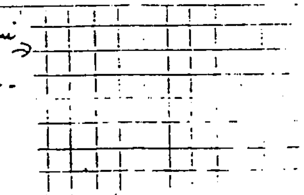


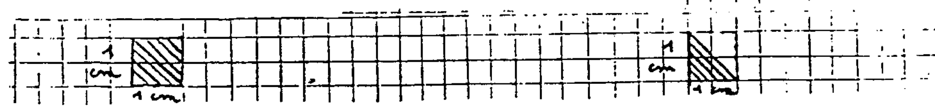




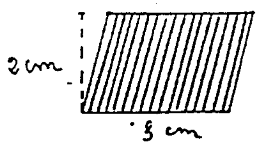
Voici un parallélogramme.

Dessine ici une surface qui ait une aire deux fois plus grande que ce parallélogramme.

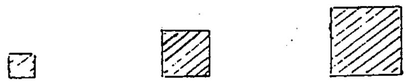




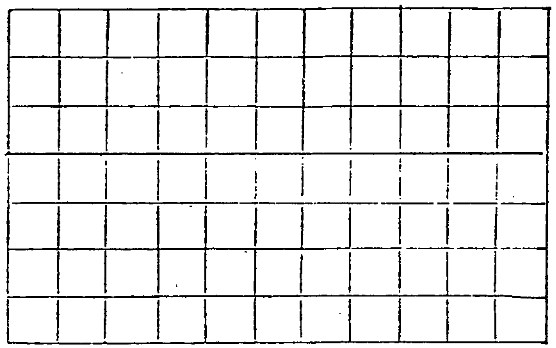
215



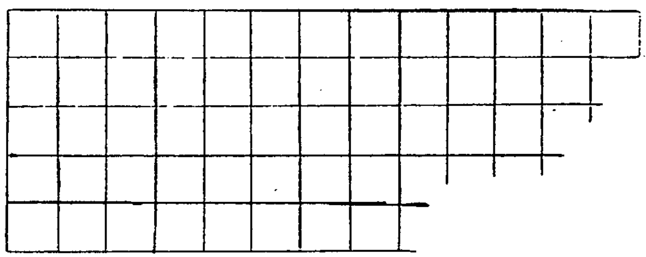
Dessine un rectangle
de même aire



Quel est le carré qui a une aire de 1 cm^2 ?



Combien de
carreaux dans
le rectangle ?



On a déchiré un morceau. Combien de carreaux
y avait-il dans le rectangle, lorsqu'il était entier ?

DEUXIEME PARTIE

QUESTIONS DIDACTIQUES SOULEVEES PAR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES DANS DES CLASSES COMPOSEES PRINCIPALEMENT D'ELEVES EN DIFFICULTE.

INTRODUCTION

1. L'échec scolaire, lien avec l'origine sociale

La question de l'échec scolaire est actuellement l'objet de nombreux débats, aussi bien dans les media que dans l'institution scolaire elle-même (d'ailleurs souvent mise en cause) ou dans d'autres institutions qui gravitent autour de l'école (associations de parents d'élèves, syndicats d'enseignants...). La notion d'échec scolaire recouvre en fait différentes réalités : on peut dans un premier temps distinguer

- le niveau social et institutionnel où l'échec se traduit par des redoublements, des "orientations" autoritaires vers des filières peu prestigieuses, du retard scolaire... Beaucoup de discours sur l'échec scolaire se placent à ce niveau et prennent les éléments cités comme indices de l'échec
- le niveau de la classe où l'échec d'un élève se traduit par des mauvaises notes, par le fait qu'il n'a pas acquis les apprentissages attendus, qu'il ne comprend pas, ne "suit" pas. A ce niveau, les degrés sont très divers, on peut par exemple distinguer l'échec dans une discipline ou l'échec général, et à l'intérieur d'une discipline l'échec ponctuel sur une question ou l'échec durable. C'est au niveau de la classe que s'élaborent les verdicts d'échec de la part des professeurs et le sentiment d'échec des élèves, lesquels vont éventuellement transformer un échec ponctuel en échec durable qui finira peut-être par avoir des conséquences visibles au niveau institutionnel (redoublement, orientation...). Ce niveau est d'un accès difficile pour quiconque est à l'extérieur de la classe, mais il est au centre du problème.

Intéressons-nous d'abord à l'échec repéré au niveau institutionnel. De tout temps il y a eu des élèves qui réussissaient à l'école et d'autres qui échouaient, mais cela n'avait pas la même signification quand la réussite de la scolarité était peu liée au devenir social des individus. La démocratisation de l'enseignement qui s'est produite dans les années 60, c'est-à-dire l'accès en 6ème de la quasi-totalité d'une classe d'âge a changé la signification de la réussite à l'école. Elle a rendu, pour ceux qui les subissent, encore moins supportables les inégalités liées à l'origine sociale. En effet, d'une part le devenir professionnel est de plus en plus conditionné par la poursuite d'études longues, d'autre part, tant que l'accès au secondaire était explicitement lié à l'origine sociale, il ne mettait pas en question les individus.

Autrefois, mis à part quelques éléments très brillants, les enfants des classes populaires n'accédaient pas à l'enseignement secondaire, l'enseignement primaire assurait la totalité de leur formation générale. Les enfants des milieux populaires n'échouaient donc pas dans l'enseignement secondaire puisque, dans leur grande majorité, ils n'y accédaient pas. La démocratisation de l'enseignement passait par la possibilité pour tous d'accéder aux études secondaires, voire supérieures.

Actuellement, cela semble chose faite : la voie normale est de passer de CM2 en 6ème et de suivre les études du collège. Les autres orientations se font sur la base de l'échec et en principe selon les mérites, ou l'absence de mérite des élèves. Or la relation entre origine sociale et réussite des élèves au baccalauréat est restée très forte et les filières longues et "nobles" de l'enseignement secondaire se démocratisent peu (voir le "rapport Prost" sur les lycées). Ainsi, dans les sections C, les élèves d'origine modeste sont encore plus rares que dans les autres sections générales, y compris les sections A. Pourtant les études scientifiques peuvent paraître a priori moins discriminantes de l'origine sociale que les études littéraires où l'usage d'un "beau langage" et l'accès aux valeurs de la culture dominante sont plus importants. La possibilité pour tous d'accéder aux études secondaires n'a pas suffi pour que tous en tirent profit.

Beaucoup de recherches se sont préoccupées d'étudier la liaison entre origine sociale des élèves et réussite scolaire. Nous avons fait en 1986 une revue bibliographique d'un certain nombre de travaux généraux concernant cette question qui a donné lieu à la rédaction du cahier de didactique des mathématiques de l'IREM de Paris 7 n° 36 que nous joignons en annexe 1.

Les premiers travaux sont surtout statistiques et descriptifs. Très vite, d'autres travaux ont fait leur apparition : par delà le constat, le problème essentiel est de trouver des explications et en particulier d'identifier des variables intermédiaires à travers lesquelles l'origine sociale intervient dans la réussite scolaire des enfants.

Les variables repérées du côté de l'enfant ou de la famille sont d'ordre psychologique ou sociologique : les variations d'intelligence, qu'elles soient d'origine génétique ou acquises, les niveaux d'aspiration différents, les styles de vie ou pratiques éducatives familiales, le déficit linguistique ou le handicap socioculturel. Le repérage de cette dernière variable, à laquelle on s'intéresse depuis longtemps a donné lieu à d'importants programmes dits de compensation, en particulier dans les années 60 aux Etats-Unis - sans grand succès d'ailleurs.

Après une mise en question globale de l'école au début des années 70, les chercheurs ont essayé de déterminer des variables intermédiaires du côté de l'école : ils se sont ainsi intéressés au rôle des attentes des maîtres et des relations maîtres - élèves en même temps qu'à l'origine sociale des maîtres et à leurs comportements sociaux.

Plus récemment, des chercheurs ont tenté de cerner les pratiques concrètes des maîtres, au niveau institutionnel dans l'orientation ou dans l'attribution de notes trimestrielles, ou au niveau de la vie quotidienne de la classe, ceci dans l'espoir de préciser comment s'élabore au niveau de la classe l'échec qui apparaîtra ensuite au niveau institutionnel.

Certains étudient aussi le rapport au savoir des élèves selon l'origine sociale en remarquant que les enfants des familles populaires ont appris à faire plus qu'à dire, ce qui donne un rapport au savoir peu adéquat au travail scolaire, il faudrait donc pour l'école "construire ce rapport au savoir qu'elle présuppose actuellement comme aptitude naturelle de certains enfants à l'abstraction" (Charlot, 1987).

Mais toutes ces recherches restent le plus souvent à un niveau général et jusqu'à une époque très récente ne prennent pas en compte le contenu à enseigner.

2. Eléments de réflexion pour une approche didactique

Les études de psychologie et de sociologie dont nous avons parlé nous amènent des indices de première importance mais sont probablement insuffisantes pour cerner les mécanismes qui conduisent certains élèves à l'échec : on ne peut comprendre, à notre avis, comment des élèves passent à côté de certains apprentissages sans mettre au cœur de l'analyse les contenus eux-mêmes.

D'un autre côté, on a pu penser qu'en changeant les contenus à enseigner, on allait diminuer l'influence de l'origine sociale des élèves, en particulier au moment des changements de programme qui ont marqué ce qu'on a appelé la réforme des "mathématiques modernes" : en utilisant un langage formel entièrement construit, on pensait atténuer les différences dues à la maîtrise de la langue naturelle. En réalité on a assisté à un dérapage formel de l'enseignement des mathématiques avec une perte de sens des contenus enseignés et on a pu constater que les enfants des milieux populaires étaient encore moins prêts que les autres à entrer dans le jeu du formalisme. Il semble clair maintenant qu'une action sur les contenus ne saurait suffire pour tenter de remédier à l'échec scolaire.

Il faut donc bien entrer au cœur de la relation didactique qui fait intervenir maître, élèves et contenu pour analyser comment les interactions entre maître et élèves qui se nouent (ou non) dans les classes, à propos d'un savoir précis, peuvent engendrer l'échec de certains élèves. C'est ce que font actuellement, aussi bien en français qu'en mathématiques, les recherches de didactique qui se développent, en s'appuyant de façon fondamentale sur l'analyse de la matière à enseigner et aussi sur les conditions que doivent vérifier les situations d'enseignement pour permettre l'apprentissage des élèves. Ainsi, une étude des contenus et des conditions didactiques de leur appropriation par des élèves en situation de classe est pour nous indispensable et préalable à une étude différentielle faisant intervenir le milieu social des élèves. Cependant nous faisons l'hypothèse que l'apprentissage est fortement conditionné par le rapport que l'enseignant et les élèves ont au savoir en jeu, à l'idée qu'ils se font de l'apprentissage de ce savoir, du rôle de l'école. Tous ces éléments interviennent de façon déterminante dans ce que les didacticiens appellent *le contrat didactique* qui s'instaure dans la classe à propos de l'acquisition d'un savoir (voir chapitre 1).

Par ailleurs, en didactique des mathématiques, très peu de recherches se sont jusqu'à présent intéressées à l'origine sociale des élèves. Des travaux ont été faits concernant l'échec électif en mathématiques, notamment à Bordeaux, sous la direction de G. Brousseau. Nous ne prendrons pas ce point de vue car il nous semble avoir peu de rapport avec l'origine sociale des élèves. De plus, au niveau de l'école primaire, la population des élèves en échec électif en mathématiques est peu nombreuse, même si certaines difficultés qui se révèlent ensuite ont leur origine à l'école élémentaire. Nous nous intéressons aux difficultés des élèves en mathématiques, et particulièrement à celles des élèves de milieu social défavorisé. Le rapport au savoir mathématique et au contenu précis en jeu dans la relation didactique nous paraît en effet un des moyens d'influence de l'origine sociale des élèves sur l'apprentissage.

Plusieurs entrées convergentes sont possibles pour comprendre comment le rapport au savoir peut agir, au sein du contrat didactique, comme variable intermédiaire entre l'origine sociale des élèves et la réussite scolaire, ainsi peut-on

- déterminer quels sont les rapports des élèves aux savoirs en jeu, à l'école, aux apprentissages, quelles sont les variations en fonction du milieu social d'origine.
- à partir de l'analyse de certains processus d'apprentissage déjà expérimentés et analysés d'un point de vue didactique, déterminer quelles sont les hypothèses sous-jacentes des chercheurs qui ont élaboré ces processus et quels rapports aux savoirs, à l'école et à l'apprentissage ils présupposent.
- étudier comment évoluent les représentations des élèves, leur rapport au savoir en jeu au cours d'une séquence didactique, d'un processus d'enseignement.

Une des questions qui nous occupe est celle de l'identification et de la spécificité éventuelle des difficultés que rencontrent les élèves de milieu populaire dans l'apprentissage de notions mathématiques. En particulier, la présentation des contenus et l'organisation de l'enseignement, les commentaires dits ou non dits du professeur ou des autres élèves, peuvent avoir un effet différent selon les représentations qu'ont les élèves et celles-ci peuvent avoir un rapport avec l'origine sociale des élèves. La question sera ensuite de trouver sur quoi agir et de quelle manière pour que les élèves modifient leur rapport au savoir de façon efficace par rapport à l'acquisition de ce savoir.

Nous nous intéressons plus particulièrement au niveau de l'école élémentaire et des premières années de collège, au moment où se forgent des représentations sur l'activité mathématique qui peuvent avoir des conséquences sur les apprentissages futurs. Il peut sembler étonnant de s'intéresser, au niveau de l'école élémentaire, à l'échec en mathématiques des élèves des classes populaires alors qu'il est la plupart du temps associé à un échec en français, souvent plus lourd et qui semble conditionner le reste. Cela semble d'ailleurs justifier les études générales et il est certes probablement vrai que les facteurs généraux, qu'ils soient matériels ou qu'ils concernent le rapport à l'école, à la culture scolaire pèsent beaucoup. Pourtant les enfants "décrochent" à propos de contenus précis, le malentendu s'installe et empêche la construction d'apprentissages ultérieurs. Par ailleurs, si un niveau minimum de maniement de la langue française est nécessaire à l'apprentissage des mathématiques, il nous semble que la plupart des élèves en disposent[1] et qu'on peut donc s'intéresser aux difficultés spécifiques aux mathématiques de ces élèves. On peut d'ailleurs penser qu'une amélioration des performances en mathématiques est plus accessible et peut avoir une influence positive sur le rapport à l'école de ces élèves et sur leur travail dans les autres matières.

Comme nous l'avons déjà expliqué dans l'introduction générale, notre problématique de départ a évolué et nous préciserons les différentes étapes de cette évolution tout au long de notre travail, en particulier au cours des chapitres 1 et 4. Un des buts de cette thèse était d'affiner cette problématique et de formuler de nouvelles hypothèses, ce sera un des objets du chapitre 7 qui nous sert de conclusion.

3. Questions de méthode

Comment avons-nous abordé le problème ?

Notre projet de départ, et c'est en cela qu'il s'agit d'un travail de didactique et non de psychologie ou de sociologie, n'est pas seulement d'observer les élèves et les séquences d'enseignement pour appréhender le rapport au savoir des élèves. Nous partons d'hypothèses sur les conceptions et représentations efficaces des contenus abordés et nous proposons aux enseignants des situations qui nous paraissent susceptibles de permettre aux élèves de construire un rapport au savoir adéquat et des représentations performantes. Nous utilisons des séquences didactiques déjà expérimentées dans d'autres contextes. Des travaux de didactique des mathématiques ont permis de formuler des hypothèses sur les conditions de construction des savoirs mathématiques.

Notre projet, dans la première phase du travail, est de proposer aux enseignants des classes observées des processus d'enseignement conformes aux hypothèses retenues et d'observer leur réalisation en classe, l'éventuel décalage entre la réalisation et ce qui était prévu, les points de résistance des élèves et des enseignants. Nous essayons d'expliciter les hypothèses que nous retenons ainsi que nos propres conceptions

[1] Nous nous sommes intéressée à des classes "normales" de CM et de 6ème et non à des classes de perfectionnement ou de SES où ces hypothèses ne sont peut-être pas toujours vérifiées.

sur l'apprentissage des mathématiques dans le chapitre 1 où nous décrivons notre cadre théorique de référence au départ avant de préciser un peu la problématique et la méthodologie de la première phase de notre travail. Ce chapitre a été rédigé après l'expérimentation en classe et avant la réalisation de la deuxième phase du travail. Nous ne l'avons pas profondément modifié depuis.

Les contenus abordés dans l'expérimentation sont des contenus déjà étudiés par des chercheurs en didactique des mathématiques. Nous avons étudié l'enseignement de la notion d'aire dans la première partie. Le chapitre 2 est consacré aux nombres décimaux et rationnels. Nous y relatons des études complémentaires sur ces notions, permettant de préciser des difficultés rencontrées par les élèves, particulièrement dans des classes où la majorité des élèves est en retard scolaire. Nous y menons en particulier des comparaisons entre les classes observées et d'autres classes.

Un certain nombre de difficultés sont apparues dans la réalisation des séquences didactiques, du côté des élèves et du côté des enseignants. Le compte-rendu de l'expérimentation est l'objet du chapitre 3 où nous essayons d'expliciter les difficultés rencontrées et de pointer certains phénomènes qui sont abordés autrement dans la suite du travail.

Dans le même temps, nous avons également utilisé toutes les occasions qui nous étaient données pour compléter l'étude du problème qui nous intéressait : cours aux élèves instituteurs dans le cadre du DEUG 1er degré, stages de formation continue de professeurs de collège à l'IREM. Des observations, informelles dans un premier temps, nous ont aidée à élargir et préciser notre problématique. Le chapitre 4 marque un tournant dans la problématique et dans la méthodologie. Nous y décrivons une étude de cas destinée à nous aider à préciser le diagnostic concernant les difficultés des élèves et nous y précisons ce que nous avons emprunté au cadre théorique des représentations sociales pour construire quelques nouveaux moyens d'investigation et en interpréter les résultats. Nous avons alors utilisé d'autres méthodes de recherche : entretiens avec des enseignants et des élèves, questionnaires écrits.

Les chapitres 5 et 6 en donnent les résultats : quelques éclairages complémentaires sur les représentations des maîtres et des élèves à propos des mathématiques et de leur apprentissage.

Comme nous l'avons déjà signalé, il s'agit ici d'un travail exploratoire sur la question. Il s'est avéré que la problématique de départ avait besoin d'être revue et précisée ainsi que les moyens d'accès. L'objet de ce travail était donc d'affiner la problématique de départ plus que d'y apporter des réponses. Le chapitre 7 reviendra sur le cadre théorique, la problématique et la méthodologie et proposera des éléments de réflexion pour une nouvelle expérimentation.

Plan de la deuxième partie :

CHAPITRE 1

CADRE THEORIQUE ET PROBLEMATIQUE DE DEPART.

Notre travail se situe dans le cadre de la didactique des mathématiques, c'est à dire de l'étude des processus de transmission et d'acquisition des mathématiques en situation scolaire.

Dans ce chapitre, nous décrivons notre cadre théorique de référence dans les deux premiers paragraphes, avant d'examiner dans le paragraphe 3 diverses organisations de l'enseignement liées à différents choix de présentation des contenus et d'essayer de dégager les hypothèses implicites qu'elles supposent. Nous tentons ensuite de déterminer pour lesquelles de ces hypothèses la vérification peut être liée à l'origine sociale des élèves. Nous proposons dans le paragraphe 4 un schéma d'analyse des erreurs des élèves permettant d'éclairer ce qui nous intéresse. Nous précisons enfin dans le paragraphe 5 la problématique de départ d'une expérimentation faite dans des classes où la majorité des élèves était issue de milieu social défavorisé et nous essayons d'analyser les difficultés rencontrées à la lumière de la réflexion précédente.

1. Hypothèses générales sur l'apprentissage.

1.1. Les travaux de Piaget

Comme dans la plupart des travaux de recherche en didactique des mathématiques en France, nous nous plaçons dans l'hypothèse constructiviste de l'apprentissage et nous retenons essentiellement des travaux de Piaget :

- le rôle de l'action dans la construction des connaissances : le sujet forme ses connaissances dans une interaction constante avec les objets ("objet" étant pris dans un sens très large incluant les objets mathématiques, l'action pouvant alors être comprise comme la résolution de problèmes).

- le processus d'adaptation par assimilation et accommodation et la théorie de l'équilibration majorante : *"pour autant qu'une résistance met en échec le processus d'assimilation, l'accommodation cherche à compenser le déséquilibre et l'abstraction réfléchissante restructure les processus d'assimilation qui vont réaliser une forme supérieure d'équilibre, palier par palier"* (J.M. Dolle *"Pour comprendre Jean Piaget"*)

Nous retenons ces hypothèses non seulement pour la construction des structures opératoires mais pour la construction de la plupart des connaissances mathématiques : des expériences, des questions provoquent un déséquilibre dans le système de pensée de l'élève qui l'amène à réorganiser ses connaissances de façon à retrouver un équilibre à un niveau supérieur.

1.2. Les travaux de Vygotsky et de Bruner

Nous en avons pris connaissance après la partie expérimentale de notre travail, mais ils nous paraissent éclairer beaucoup certaines questions que nous posent nos observations. Des travaux de Vygotsky (1985), nous retenons le rapport dialectique entre apprentissage et développement : l'apprentissage suit le développement et se fait avec lui à mesure que certaines fonctions arrivent à maturation, mais en même temps, il peut le devancer, le faisant progresser et suscitant de nouvelles formations, et ceci particulièrement dans le cas de l'acquisition des concepts scientifiques.

Le rôle du langage et donc de la formalisation dans le développement des concepts nous paraît également important à considérer pour étudier la construction des concepts mathématiques dans la tranche d'âge qui nous intéresse (9 à 12 ans). En effet, la formalisation aide à la généralisation et le langage favorise le rapport dialectique entre le développement des concepts scientifiques et des concepts quotidiens, "les premiers faisant germer les seconds par le haut et les seconds faisant germer les premiers par le bas". La mise en place d'un "langage intérieur" nous paraît particulièrement importante pour le développement de la pensée scientifique et la communication entre pairs, par les explicitations qu'elle provoque, est peut-être un moyen de perfectionner le langage intérieur.

Nous retenons également l'importance de la collaboration entre enfant et adulte, ce qui donne toute sa place au rôle du maître dans l'apprentissage ; la question cruciale est alors, à notre avis, celle de la forme optimale de cette collaboration qui peut varier suivant la connaissance en jeu, les représentations du maître et des élèves ; nous reviendrons sur cette question.

Un autre point des travaux de Vygotsky qui nous paraît des plus intéressants pour notre étude est la notion de zone de proche développement qui correspond à ce que l'enfant ne peut pas faire tout seul mais peut faire avec aide : d'après Vygotsky, la zone de proche développement a une signification plus directe pour la dynamique du développement intellectuel et la réussite que le niveau présent de développement puisque ce qui est dans la zone de proche développement à un stade d'âge donné sera dans la zone de développement actuel au stade suivant ; l'apprentissage le plus valable pendant l'enfance est donc celui qui anticipe sur le développement et le fait progresser. Les questions qui se posent alors sont de savoir si le passage de la zone de proche développement à la zone de développement actuel se fait spontanément ou sinon, que faire pour l'accélérer, et de plus, comment accroître la zone de proche développement ?

Du travail de J. S. Bruner (1983), nous retenons l'importance du langage dans le développement cognitif de l'enfant, en particulier dans la mise en place et le développement de la représentation symbolique ; cette hypothèse pourrait expliquer des différences individuelles en relation avec le milieu familial et donc social : l'activité du sujet n'a pas les mêmes effets si les possibilités de représentation symbolique sont inégales ; ainsi le développement cognitif s'accomplirait de façon plus ou moins rapide et complète suivant que les techniques transmises — en particulier le langage — seraient plus ou moins riches et efficaces ; l'inégalité des techniques transmises est liée au milieu social. Un autre élément qui entre dans notre problématique est le rôle tutoral de l'adulte dans la relation de collaboration enfant - adulte qui permet à l'enfant d'accroître sa zone de développement actuel en favorisant des incursions dans sa zone de développement proximal avec, pour l'enfant, une sécurité suffisante. Notons que la question s'étend à la collaboration entre élèves dans le travail en groupes, au moins à partir d'un certain âge.

1.3. La notion d'obstacle

Pour être enseigné, le savoir tel qu'il existe dans la communauté scientifique d'une époque donnée (et éventuellement d'une société donnée) subit un processus de transformation qu'on désigne sous le nom de transposition didactique (Chevallard, 1985). En particulier, on procède à un certain découpage des connaissances à enseigner, découpage qu'on retrouve en particulier dans le libellé des programmes, dans les manuels scolaires...

Ce découpage traduit certaines conceptions au sujet de l'apprentissage. Traditionnellement, il correspond à une idée de connaissances cumulatives : on traite un sujet, puis un autre et on empile les connaissances. Même s'il y a certaines reprises, au début de l'année scolaire, au début d'un nouveau chapitre, elles sont faites pour réactiver des connaissances anciennes sur lesquelles on a envie de s'appuyer, souvent dans les mêmes termes, on ne remet pas en question des connaissances antérieures supposées acquises de façon définitive.

De nombreux travaux de didactique des mathématiques ont remis en question cet aspect cumulatif de l'apprentissage. Certaines connaissances spontanées qui se réfèrent à l'expérience sensible ou même des connaissances scolairement acquises peuvent s'opposer à la mise en place de certains concepts. Bachelard a mis en avant cette idée d'obstacle épistémologique dans le développement de la connaissance scientifique en physique.

Dans un article paru en 1983 dans la revue *"Recherches en didactique des mathématiques"*, Guy Brousseau met en évidence la notion d'obstacle en didactique. Pour lui, un obstacle se manifeste par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard : *"elles sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une connaissance ancienne qui a réussi dans tout un domaine d'actions"* (Brousseau 1983). *"La connaissance obstacle a son domaine de validité et d'efficacité et aussi un domaine où elle est a priori pertinente et où elle se révèle fausse, inefficace, source d'erreurs."* (ibidem). Ainsi les connaissances sur les entiers, en particulier au niveau de l'ordre peuvent faire obstacle à la mise en place de connaissances nouvelles sur les décimaux et les rationnels (par exemple : tout entier a un successeur; entre deux entiers consécutifs il n'y a rien ; le produit de deux nombres entiers est supérieur à chacun d'eux).

Ces obstacles peuvent avoir plusieurs origines. Ils peuvent en particulier être d'origine didactique : ainsi l'enseignement des décimaux comme entiers naturels avec changement d'unité peut faire obstacle très longtemps à une bonne compréhension des décimaux, des rationnels et des réels. Nous reviendrons par la suite sur cet exemple.

Citons encore G. Brousseau (1983) à propos du franchissement d'un obstacle : *"L'obstacle est constitué comme une connaissance (...) Il va résister au rejet, il tentera de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit suivant un processus d'accommodation bien connu. Le franchissement d'un obstacle exige un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance, c'est-à-dire des interactions répétées, dialectiques de l'élève avec l'objet de sa connaissance".*

Cette notion d'obstacle, en particulier l'idée que l'apprentissage antérieur des élèves peut faire obstacle à la mise en place des connaissances nouvelles est un des points d'appui de notre analyse des difficultés des élèves. Nous y reviendrons au moment de l'analyse des erreurs des élèves, en particulier dans le cas des décimaux où nous verrons quelles adaptations sont faites.

1.4. Le cloisonnement des connaissances et la notion de champ conceptuel

Par ailleurs, le découpage du savoir joint à cette idée d'accumulation de connaissances, amène à un certain cloisonnement entre les disciplines et même à l'intérieur d'une discipline, les mathématiques pour ce qui nous concerne, entre certains sujets, en particulier entre ce qui relève du domaine géométrique et ce qui relève du domaine numérique.

Pourtant un concept intervient dans une variété de situations et, dans une situation donnée, plusieurs concepts sont en jeu. Ainsi G. Vergnaud propose de prendre en compte les relations entre différents concepts et le long terme du développement psychogénétique pour découper les contenus de connaissance en objets d'étude ; il définit la notion de "champ conceptuel" comme *"un espace de problèmes ou de situations problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion"* (Vergnaud 1981). Il indique par exemple qu'*"il serait aberrant de conduire des études séparées sur l'acquisition des concepts de multiplication et de division, de fraction, de rapport et de nombres rationnel, de fonction linéaire et n-linéaire, d'analyse dimensionnelle et d'espace vectoriel, puisque dès les premiers problèmes de type multiplicatif qu'il rencontre (proportions, surfaces, volumes), l'enfant est confronté à des relations qui relèvent de l'ensemble de ces concepts"* (Vergnaud 1981).

Si un découpage trop fin de l'objet d'étude n'est pas raisonnable pour le didacticien, il ne l'est peut-être pas non plus du point de vue de l'enseignement parce qu'un concept prend aussi son sens dans les relations qu'il entretient avec d'autres concepts et nous considérons, avec beaucoup d'autres chercheurs en didactique des mathématiques qu'un découpage trop fin du savoir amène à la perte de sens des savoirs enseignés. Il amène de plus à se priver d'interactions qui peuvent être fructueuses entre divers domaines mathématiques (voir plus loin la notion de jeux de cadres).

Nous verrons de plus que dans le cas d'enseignement à des élèves faibles, les enseignants ont tendance à découper et à parcelliser davantage leur enseignement, pensant éviter des difficultés aux élèves qui "ne s'y retrouvent pas" dans des situations complexes. Mais donne-t-on alors à ces élèves l'occasion de construire le sens des notions qu'on veut qu'ils apprennent ?

1.5. Le rôle des interactions sociales

Le rôle des conflits cognitifs pour accélérer le développement cognitif des enfants a été étudié depuis longtemps, en particulier en prolongement des travaux de Piaget et depuis une dizaine d'années, une équipe genevoise de recherche en psychologie sociale génétique s'est plus particulièrement intéressée aux interactions sociales et en particulier aux interactions entre pairs pour provoquer ces conflits cognitifs (Doise, Mugny, Perret-Clermont, Schubauer-Léoni, Brun, Conne, Saada...). Leurs travaux ont d'abord porté sur des apprentissages non spécifiquement scolaires, de l'ordre du développement opératoire, et ils ont montré en reprenant des expériences de Piaget que les conflits cognitifs entre pairs pouvaient accélérer l'accès à la conservation des quantités pour des enfants "non-conservants". Leur hypothèse est que les sollicitations de schèmes opposés qui suscitent des contradictions internes du sujet "prennent une signification privilégiée lors des interactions de nature sociale" (Schubauer-Leoni, Perret-Clermont, 1980). Ceci explique pourquoi des contradictions sont prises en compte par les enfants dans ce contexte alors qu'elles ne le sont pas lorsqu'ils sont seuls (cf Hasemann, 1988). Les travaux de certains membres de cette équipe se sont étendus au domaine scolaire et peuvent se rattacher à l'étude du "contrat didactique" (Schubauer-Leoni, Conne).

Ce rôle des conflits cognitifs entre pairs nous paraît important pour l'utilisation du travail en groupes dans les classes à condition que les élèves collaborent réellement au sein des groupes et que chacun s'investisse dans la tâche. Ainsi une des questions qui nous occupe est la détermination de conditions dans la constitution des groupes et la nature du problème pour que tous les élèves travaillent et apprennent dans un travail en groupes.

2. Des travaux de recherche en didactique des mathématiques

La recherche en didactique des mathématiques s'est beaucoup occupée de l'enseignement au niveau de l'école obligatoire et particulièrement de l'école primaire. Nous avons déjà abordé certains travaux de nature assez générale, nous allons maintenant essayer de pointer les résultats et les questions qui sont au départ et au centre de notre problématique.

2.1. Prise de sens des concepts.

Un premier élément important concernant l'apprentissage est *la prise de sens des concepts* pour les élèves. Du travail de G. Brousseau, on retiendra à ce sujet ce qui concerne la contextualisation et décontextualisation du savoir et ce qu'il appelle "la dévolution du problème". C'est aussi le premier souci de R. Douady dans ce qu'elle appelle la Dialectique outil-objet ; le jeu de cadres contribue aussi à favoriser la prise de sens des concepts mais c'est surtout un moteur dans l'activité de recherche et la construction de connaissances nouvelles.

2.1.1.Contextualisation décontextualisation du savoir.

Le savoir à transmettre est un savoir décontextualisé, dépersonnalisé. Cependant G. Brousseau considère que pour que ce savoir prenne sens pour les élèves, il est nécessaire qu'ils se l'approprient à travers des situations où il est recontextualisé. Mais inversement, quand l'élève a répondu aux problèmes posés, il ne sait pas qu'il a produit une connaissance utilisable dans d'autres occasions. Pour transformer ses réponses en savoir, il a besoin de dépersonnaliser et décontextualiser à nouveau le savoir produit pour lui reconnaître un caractère universel, utilisable.

Souvent dans l'enseignement, on a tendance à court-circuiter ce processus et à enseigner directement la connaissance comme objet culturel que l'élève s'approprie comme il peut (ou ne s'approprie pas).

G. Brousseau distingue plusieurs types de situations qui ont des fonctions différentes dans la construction des connaissances : les situations d'action, de formulation et de validation correspondent à plusieurs phases dans la prise de sens de concepts contextualisés. Les situations d'institutionnalisation correspondent à la phase de décontextualisation du savoir : c'est le moment où le maître donne un statut social à ce qui était jusque là la connaissance de quelques-uns ou de la classe.

2.1.2. Choix des problèmes

L'hypothèse que l'apprentissage est une modification de la connaissance que l'élève doit faire lui-même et que l'enseignant doit provoquer amène à énoncer certaines conditions sur les problèmes qui peuvent produire un apprentissage nouveau chez les élèves. R. Douady et G. Brousseau s'accordent pour dire qu'il faut que la réponse initiale que l'élève peut faire à la question posée ne soit pas celle qu'on veut lui enseigner, elle doit permettre de démarrer le problème, de lui donner du sens. G. Brousseau précise : *"la réponse initiale doit seulement permettre à l'élève de mettre en œuvre une stratégie de base à l'aide de ses connaissances anciennes ; mais très vite, cette stratégie doit se révéler insuffisante ou inefficace pour que l'élève soit obligé de faire des accommodations, c'est-à-dire des modifications de son système de connaissance pour répondre à la situation proposée."*

2.1.3. Dévolution du problème

Pour que l'élève construise un savoir, il faut, d'après G. Brousseau, qu'il produise ses connaissances, les fasse fonctionner ou les modifie comme réponses aux exigences du milieu et non au désir du maître. Pour cela, il faut que l'élève accepte que la résolution du problème soit de sa responsabilité, qu'il accepte de prendre en charge ce que G. Brousseau appelle une situation "a-didactique", c'est-à-dire une situation dépouillée de ses intentions didactiques : l'élève a fait sienne la question posée et cherche à la résoudre sous sa propre responsabilité, sans essayer de deviner les intentions du maître ou de chercher à lui faire plaisir.

2.1.4. Dialectique outil-objet

On peut distinguer pour les concepts mathématiques un aspect outil et un aspect objet. L'aspect outil est celui auquel on s'intéresse quand on utilise le concept pour résoudre des problèmes. L'aspect objet est celui qui permet de considérer le concept comme un objet culturel ayant sa place dans l'édifice des connaissances d'une époque, en relation avec d'autres concepts. L'hypothèse didactique de R. Douady est que, pour prendre un sens pour les élèves, les concepts mathématiques doivent être enseignés à travers des situations où ils interviennent d'abord comme outil implicite avant d'être explicités et de prendre le statut d'objet, réutilisable dans d'autres situations. Elle décompose ainsi l'apprentissage d'un concept en plusieurs phases, qu'elle appelle "dialectique outil-objet".

- *phase a "ancien"* : des concepts déjà connus sont mis en œuvre comme outils explicites pour résoudre partiellement le problème.
- *phase b "recherche : nouveau implicite"* : le concept nouveau intervient comme outil implicite pour résoudre le problème.
- *phase c "explicitation et institutionnalisation locale"* : on explicite l'outil nouveau dans le cadre de la situation
- *phase d "institutionnalisation : statut d'objet"* qui correspond à la décontextualisation, au cours : le professeur donne les définitions, les propriétés, le concept prend un statut d'objet reconnu aussi à l'extérieur de la classe.
- *phase e "familiarisation-réinvestissement"* : exercices d'entraînement, puis utilisation du concept dans d'autres contextes.
- *phase f* qui est une phase a d'un nouveau cycle : le concept nouveau joue maintenant le rôle d'ancien et peut être utilisé comme outil explicite.

2.1.5. Jeux de cadres

Certains problèmes mathématiques peuvent être traduits dans plusieurs cadres ou domaines des mathématiques (algébrique, géométrique, numérique, graphique). S'appuyant sur le principe piagétien de l'équilibration majorante, R. Douady voit dans le jeu de cadres un moyen d'organiser dans l'enseignement ces déséquilibres - rééquilibrations. Son hypothèse est que la traduction d'un problème dans plusieurs cadres joue un rôle dans la production de connaissances nouvelles lors de la phase de recherche. Quand un problème se traduit par exemple à la fois dans le cadre géométrique et dans le cadre numérique et que les connaissances insuffisantes des élèves font que la correspondance entre les cadres est imparfaite, cette imperfection va être source de déséquilibre pour les élèves et provoquer des accommodations pour obtenir une rééquilibration. R. Douady donne à cadre un sens un peu plus large que celui de domaine des mathématiques : *"Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et à ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée."* (Douady 1987)

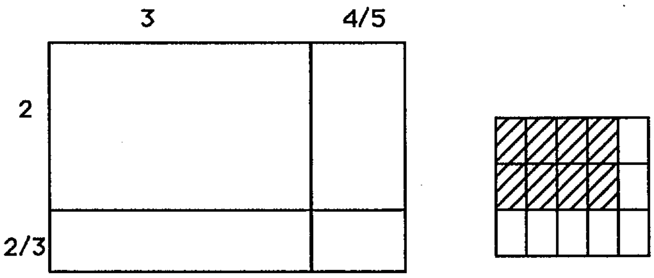
Le jeu de cadres, organisé par l'enseignant, consiste à provoquer des changements de cadres dans l'activité des élèves par le choix de problèmes appropriés : le problème est posé dans un cadre où on ne dispose pas des outils nécessaires à sa résolution et le changement de cadre fait progresser dans la résolution. *"Les jeux de cadres sont des changements de cadres proposés à l'initiative de l'enseignant à l'occasion de problèmes bien choisis par lui, à des fins d'apprentissage pour les élèves. ... Le problème est formulé dans un certain cadre où les élèves ne savent pas résoudre complètement le problème. Leurs connaissances et habitudes les amènent à traduire tout ou partie du problème dans un autre cadre. Ils mettent alors en œuvre des correspondances entre objets et relations de cadres différents. Mais les correspondances entre les cadres sont imparfaites, soit pour des raisons mathématiques, soit à cause des connaissances insuffisantes des élèves. Cette situation est source de déséquilibre."* (Douady 1984). L'amélioration des correspondances entre cadres va être un facteur de rééquilibration, ainsi les élèves vont donner du sens à des notions dans un cadre à cause de ce qu'ils savent dans un autre cadre. Reprenons un exemple que nous utilisons à plusieurs reprises (nous l'avons déjà présenté dans la partie sur les aires).

On peut donner du sens au produit des fractions et des décimaux en s'appuyant sur les aires de rectangles. Supposons qu'on soit à un moment de l'apprentissage où

- une unité de longueur (resp. d'aire) étant choisie, on sait utiliser des fractions pour désigner des longueurs (resp. des aires, par mesure directe)
- pour des unités de longueur et d'aire adaptées, on sait que, pour un rectangle de dimensions entières, la mesure de l'aire est le produit des mesures des dimensions.

On va alors donner comme sens au produit de deux nombres fractionnaires la mesure de l'aire d'un rectangle de dimensions ces deux nombres.

Par exemple (3+4/5)x(2+2/3)



Le rectangle de dimensions (1/5, 1) a une aire de 1/5 car il se reporte 5 fois dans le carré unité, le rectangle de dimensions (1/3, 1) a une aire de 1/3 car il se reporte 3 fois dans le carré unité ; le rectangle de dimensions (4/5, 2/3) contient 8 petits rectangles de dimensions (1/5, 1/3) ; chacun de ces petits rectangles se reporte 15 fois dans le carré unité, et a donc une aire de 1/15. Le rectangle de dimensions (3+4/5, 2+2/3) a donc une aire de 6+(8x1/5)+(6x1/3)+(8x1/15) = 9 + 3/5 + 8/15. On dira que 4/5 x 2/3 = 8/15, que 4/5 x 2 = 8/5 et que 3 x 2/3 = 6/3. Dans les deux derniers cas ce sens de la multiplication coïncide avec celui de l'addition répétée qu'on avait pu rencontrer auparavant.

Pour la phase de recherche, R. Douady ajoute donc une condition dans le choix des problèmes : qu'ils puissent se traduire dans plusieurs cadres et permettent des jeux de cadres.

En ce qui nous concerne, nous rapprochons les notions d'obstacle didactique et de jeu de cadres parce que le jeu de cadres nous semble être un des moyens utilisables pour aider les élèves à remettre en question des connaissances anciennes de façon qu'elles ne fassent pas obstacle à la mise en place de connaissances nouvelles par une extension hâtive de leur champ d'application.

Remarquons cependant que les jeux de cadres ne se font pas toujours dans n'importe quel sens. Prenons par exemple les deux problèmes suivants :

- Peut-on trouver un rectangle qui ait un demi-périmètre de 20 cm et une aire de 50 cm^2 ?
- Peut-on trouver deux nombres dont la somme est 20 et le produit 50 ?

L'un des problèmes est posé dans le cadre géométrique, l'autre est sa traduction dans le cadre numérique. Mais le jeu de cadres ne peut se produire avec les élèves actuels que dans le premier cas : l'élève a l'habitude de traduire des problèmes géométriques en termes de nombres, il n'a pas l'habitude de traduire les problèmes numériques dans le cadre géométrique.

2.2. Institutionnalisation et réinvestissement

Un autre point important dans l'apprentissage est *l'institutionnalisation* et le *réinvestissement* des connaissances.

G. Brousseau (1987a) définit l'institutionnalisation comme *"la prise en compte "officielle" par l'élève de la connaissance et, par le maître, de l'apprentissage de l'élève".*

Cette phase a toujours été considérée comme importante dans l'apprentissage traditionnel. On peut même dire que les situations classiques d'apprentissage sont des situations d'institutionnalisation sans prise en charge par le maître de la création du sens. Dans la mise en place de méthodes pédagogiques nouvelles, on s'est attaché à la création du sens qui n'était pas prise en compte dans l'apprentissage classique, mais en négligeant le rôle de l'institutionnalisation. Son importance a été reconnue depuis et les didacticiens actuels s'accordent pour dire que le réinvestissement des connaissances nécessite à la fois la création du sens et l'institutionnalisation du savoir.

Dans le réinvestissement des connaissances, on peut distinguer plusieurs niveaux :

- connaissances mobilisables : l'élève peut les utiliser si on y fait appel,
- connaissances disponibles : l'élève peut y faire appel de lui-même. Elles peuvent encore être disponibles dans un contexte voisin du contexte d'apprentissage ou dans un contexte plus général ou totalement différent,
- connaissances faisant partie d'un bagage culturel : on sait que ça existe, qu'on l'a rencontré, ce n'est pas mobilisable immédiatement mais on sait où chercher pour trouver cette connaissance.

Pour les jeunes élèves ce sont essentiellement les deux premiers niveaux qui sont concernés et une des questions qui se posent aux didacticiens pour tous les élèves est de savoir comment les faire passer du niveau mobilisable au niveau disponible, y compris dans des contextes très différents du contexte d'apprentissage.

Pour les élèves en difficulté, le problème du réinvestissement est souvent un point clé. Nous verrons dans nos observations que dans les situations de recherche qui ne nécessitent la mise en œuvre que de connaissances bien connues des élèves, ils se comportent de façon analogue aux élèves moyens et ont des productions assez voisines, tout semble en place pour la prise de sens du concept nouveau, mais il semble que pour eux, il n'y ait pas de capitalisation des connaissances, que les connaissances nouvelles s'intègrent difficilement aux connaissances anciennes et que le réinvestissement soit ainsi très difficile.

2.3. Le contrat didactique

Cette notion de didactique trouve en partie son origine dans les notions de contrat social de J. J. Rousseau et de contrat pédagogique de J. Fillioux.

G. Brousseau le définit comme ce qui est spécifique du contenu, de la connaissance mathématique visée dans *"la relation qui détermine - explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement - ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre."* (Brousseau 1987b). Dans le contrat didactique est ménagée une place pour l'élève et une place pour le maître : chacun a une part de responsabilité dans la progression des connaissances. Comme le remarque Chevallard (1983), de l'entrée dans le contrat didactique procède un savoir qui ne peut être mis en texte puisque *les clauses du contrat ne sont jamais énoncées, qu'elles sont "partout tacitement admises et reconnues"* (terminologie empruntée au contrat social de Rousseau) *et aussi qu'elles "sont universellement violées"* ! En effet, le contrat didactique n'est pas une réalité statique mais en continuelle évolution : en se modifiant, il fait évoluer les significations des contenus et des formes de l'échange didactique. Le maître est amené à violer le contrat didactique, à provoquer des ruptures, vers le haut pour faire avancer la connaisssance, ou vers le bas pour faire des rappels par exemple. C'est pour lui un moyen de gérer le "temps didactique". Le contrat didactique évolue donc en même temps que les connaissances des élèves. En général, l'élève a tendance à freiner cette évolution qui le met en situation de déséquilibre, mais inversement, il a envie que la connaissance progresse et veille à ce que le maître fasse évoluer le contrat didactique. Pour que l'élève apprenne, il est nécessaire qu'il entre dans le contrat didactique et en suive toutes les évolutions.

Le fait de considérer l'enseignement comme la dévolution à l'élève d'une situation a-didactique convenable et l'apprentissage comme l'adaptation de l'élève à cette situation amène dans le contrat didactique certains paradoxes que G. Brousseau a repérés, en particulier pour le maître celui de ne pas dire à l'élève ce qu'on veut lui enseigner. Cela nécessite aussi que l'élève entre dans ce type de contrat.

Le contrat didactique en vigueur dans une classe à un moment donné dépend de la connaissance en jeu mais il dépend aussi fortement des représentations des élèves et des enseignants sur cette connaissance et sur la manière de se l'approprier. Les maîtres ne peuvent pas mettre en place et gérer un contrat didactique qui soit en désaccord avec leurs convictions profondes. Les élèves ne peuvent sans doute pas non plus entrer aussi facilement dans n'importe quel type de contrat didactique. G. Brousseau (1981, p. 101) remarque d'ailleurs que *"certains enfants vivent mal les changements de mode d'action du maître comme l'absence de sécurité, de valorisation immédiate, la dépendance par rapport à l'action ou à l'opinion d'autrui etc..."* Le milieu social d'origine peut avoir une influence sur la facilité d'entrée des élèves dans tel ou tel contrat didactique et dans l'adhésion à son évolution.

3. Hypothèses implicites ou explicites sous-jacentes à diverses conceptions de l'enseignement

Nous allons maintenant examiner, en les simplifiant et donc en les caricatirant quelque peu, différents schémas d'enseignement et essayer d'expliciter des hypothèses d'apprentissage sous-jacentes et des attitudes attendues de la part de l'élève ou de la part du professeur. Nous pensons que ces hypothèses pourraient être inégalement vérifiées suivant les élèves et que le milieu social d'origine pourrait avoir une influence sur la vérification ou non de ces hypothèses.

3.1. Le schéma traditionnel

Le schéma traditionnel de l'enseignement des mathématiques repose sur une conception cumulative de l'apprentissage : on empile les connaissances les unes à la suite des autres et on apprend de façon définitive, un savoir acquis ne sera pas remis en cause et s'il réapparaît à un moment ultérieur dans l'apprentissage, c'est pour une révision qui permette d'enseigner des savoirs nouveaux en s'appuyant sur les connaissances anciennes.

On enseigne directement les savoirs décontextualisés qui sont ensuite appliqués dans des problèmes. L'accent est mis sur l'aspect objet des concepts et sur les algorithmes. Le maître détient le savoir et il le transmet à l'élève qui apprend. Tout au plus donne-t-il quelques exemples pour aider celui-ci à se forger quelques images mentales. La recontextualisation se fait après coup dans la résolution de problèmes d'application. L'hypothèse sous-jacente est que l'élève apprend en écoutant (ou en lisant) une exposition du texte du savoir et en la faisant fonctionner après coup.

A l'école élémentaire et dans les petites classes du secondaire, cela s'accompagne de la résolution par le maître de problèmes type : on demandera à l'élève d'adapter les solutions dans des problèmes voisins avec l'idée que l'apprentissage se fait par imitation.

Le maître est le détenteur de la connaissance, il la révèle aux élèves et il évalue leurs progrès. L'élève doit avoir envie d'apprendre, il doit savoir écouter, observer, se souvenir, reconnaître.

3.2. Les méthodes actives

Les conceptions traditionnelles de l'apprentissage ont été depuis longtemps remises en cause et les méthodes actives valorisées à la suite des travaux des psychologues. Par exemple, dans la mouvance des travaux de Diénès et de l'explicitation de son "processus psychodynamique", un courant pédagogique se développe, fondé sur l'idée que l'élève va abstraire un concept mathématique à partir d'actions, d'un grand nombre d'expériences dans des contextes différents : les aspects particuliers vont s'estomper et il restera la structure qui est l'objet de l'apprentissage. Le concept mathématique est révélé à l'élève non plus directement par le maître mais par des expériences bien choisies et variées. N. Picard exprime bien ce courant dans ses réflexions à propos d'un nouveau programme de mathématiques pour le primaire (bulletin A.P.M.E.P. n° 251 janvier 1966).

Cela s'accompagne souvent d'une pédagogie "non-directive" basée sur la "redécouverte" : il ne faut pas imposer le savoir à l'élève qui doit le redécouvrir dans des situations appropriées. Le professeur a un rôle d'animateur.

En même temps, on se préoccupe de donner des motivations aux élèves et on utilise abondamment les jeux, surtout à l'école élémentaire et dans les classes de 6ème ou 5ème.

3.3. L'épanouissement de l'enfant

Brousseau (1980) a critiqué les méthodes d'enseignement issues de ce courant qui a cependant amené une réflexion riche et les travaux de recherche en didactique qui ont suivi ont gardé l'importance du rôle de l'action ; mais ce courant a aussi donné lieu à une dérive que l'on voit à l'école élémentaire dans certaines classes aujourd'hui où on a retenu surtout l'idée des motivations : il faut partir du vécu de l'élève. On insiste généralement sur l'importance de l'épanouissement de l'enfant au risque de perdre plus ou moins de vue l'objectif d'apprentissage.

L'idée sous-jacente est que, pourvu qu'on le motive, qu'il soit bien à l'école, l'élève va construire des connaissances, et d'ailleurs, à la limite qu'il est plus important pour lui à l'école d'apprendre à réfléchir, d'apprendre à vivre qu'à acquérir des connaissances.

3.4. Les noyaux - thèmes

Dans les années 1975, en même temps qu'ils essaient de diffuser l'utilisation de méthodes actives, les militants de l'Association des professeurs de mathématiques proposent une organisation de l'enseignement sous forme de noyaux et thèmes, plus compatible avec des méthodes pédagogiques faisant une large place à l'activité des élèves, qu'une présentation linéaire des contenus. Dans le numéro 300 du bulletin de l'A.P.M.E.P., F. Pluvinage donne (page 436) les définitions :

"noyau : le champ des aptitudes que l'on suppose acquises par les élèves à un niveau donné, pour être utilisées (à l'exclusion de toutes les autres) à des niveaux ultérieurs.

programme minimum : le champ des activités accomplies par tous les élèves d'un niveau donné et/ou d'une section donnée.

thèmes : les objets d'études et les centres d'intérêt parmi lesquels un choix permet de satisfaire certainement au programme minimum."

Dans le même numéro, page 419, le "groupe école élémentaire" de l'A.P.M.E.P. précise : *"...l'idée de base est la suivante : autour d'un certain nombre de concepts sous-jacents, le maître organise des activités variées qui donnent l'occasion aux enfants de les rencontrer, de les manipuler, de les décrire, de les expliciter, de les reconnaître sous d'autres habillages, de s'en servir pour construire l'outil mathématique.*

Cette pédagogie de type recherche-découverte permet, d'une part de centrer l'élève sur une notion très générale tout en offrant un large choix d'activités, d'autre part de faire fonctionner le concept avant de le dégager et de l'expliciter.

Enfin, ce type de démarche devrait conduire à mettre en évidence, de façon plus ou moins explicite suivant l'âge considéré, des "contenus mathématiques" pour donner aux enfants la possibilité de ressentir "l'outil mathématique" comme un moyen qui facilite la compréhension, la communication et autorise parfois la prévision."

De son côté le "groupe premier cycle" définit trois types d'objectifs pour l'enseignement des mathématiques à ce niveau :

- objectifs mathématiques
- objectifs pluridisciplinaires
- objectifs définis en termes de comportement

et ajoute : *"L'approche de ces objectifs suppose une valorisation des attitudes de recherche permettant à chaque élève de progresser sans le secours constant du discours professoral. Placé en situation active au sein d'un petit groupe de travail, sur des thèmes divers, l'élève développe ses moyens d'expression et de communication."*

3.5. Les méthodes issues des travaux de didactique des mathématiques.

Les travaux qui se sont développés en didactique des mathématiques depuis une quinzaine d'années ont gardé un certain nombre d'idées exprimées par le courant des méthodes actives et des noyaux-thèmes, mais dans l'effort de théorisation qui les caractérise, les auteurs ont été amenés à préciser un certain nombre de conditions sur les activités proposées aux élèves et sur le rôle du maître. Ils ont expérimenté des processus d'enseignement basés sur des hypothèses et une problématique que nous avons décrites dans le paragraphe précédent. Pour réaliser de tels processus, on admet l'existence de problèmes vérifiant toutes les conditions imposées et on admet la possibilité d'instaurer un contrat didactique convenable qui permette la dévolution du bon problème à l'élève : cela suppose d'abord que l'élève accepte d'engager sa responsabilité dans l'apprentissage, ce qui est d'ailleurs valable pour n'importe quelle forme d'enseignement.

Il faut de plus, pour qu'un déséquilibre se produise que l'élève soit capable d'avoir une prévision et de relever une éventuelle contradiction entre l'évènement attendu et l'évènement observé, ce qui suppose un système de référence ; pour la rééquilibration, il faut que l'élève ait un moyen de mettre au point une procédure nouvelle, par un changement de cadre ou autre.

Pour qu'un jeu de cadres puisse fonctionner, il faut qu'on ait une certaine connaissance dans chacun des cadres, ce qui suppose que l'initialisation se fait par un autre moyen, par exemple du type information donnée à l'élève. La question qui se pose est de savoir quel est le seuil minimum de connaissances dans chacun des cadres en dessous duquel le jeu de cadres ne peut plus fonctionner.

Par ailleurs, la mise en place d'un tel enseignement suppose certaines conceptions au sujet de l'apprentissage des mathématiques de la part des élèves et des enseignants :

- du côté des élèves :
  * penser qu'on peut apprendre, en résolvant un problème, quelque chose qui sera réutilisable en d'autres circonstances.
  * penser qu'on peut trouver quelque chose qu'on n'a pas appris explicitement, et qu'on a le droit de le faire.
- du côté du professeur :
  * être persuadé que les enfants peuvent trouver et le leur faire savoir.
  * ne pas craindre que les élèves fassent des propositions non prévues, et donc avoir une formation suffisante sur le contenu.
  * être convaincu de la méthode de travail et accepter le rôle du professeur qu'elle implique : choisir les problèmes adaptés à la connaissance visée et à ses élèves, gérer les différents temps de l'apprentissage et en particulier l'interaction entre les activités de l'élève et le cours, ce qui suppose une certaine conception du temps didactique.

4. Un axe d'analyse des erreurs des élèves.

4.1. Rôle des erreurs dans l'apprentissage.

Actuellement, les modèles pédagogiques qui tendent à se répandre en formation d'enseignants incitent les enseignants à ne plus considérer les erreurs des élèves comme une faute qu'il faut à tout prix éviter. Ils considèrent que les erreurs peuvent être utiles aux élèves, voire nécessaires, dans la mesure où elles leur permettent d'apprendre quelque chose ou au moins de se poser une question nouvelle. Il faut reconnaître cependant que l'erreur n'aura ce caractère productif qu'à certaines conditions : d'abord, seules certaines erreurs peuvent apporter une information aux élèves, principalement les erreurs liées aux conceptions erronées ; il faut ensuite que l'élève ait des moyens de reconnaître son erreur et de l'interpréter à travers certaines références. Fischer (1988b) insiste sur cette mise en garde ; il rapporte par exemple l'expérience de Piaget et Inhelder sur les niveaux de liquide dans des récipients : si on répète l'expérience avec les mêmes enfants, ils ne progressent pas parce qu'ils n'ont pas le cadre de référence qui leur permettrait de tirer parti de leur erreur. Dans le même article, Fischer fait d'ailleurs remarquer que l'information en retour apportée par l'erreur peut souvent être apportée à l'élève sans que l'erreur soit commise, par anticipation de l'action ; ceci explique peut-être pourquoi ce ne sont pas les élèves qui font le plus d'erreurs qui progressent le plus vite dans la connaissance.

Cependant, les erreurs des élèves sont utiles au didacticien et au maître dans la mesure où elles peuvent le renseigner sur les modèles erronés qu'utilisent les élèves (erreurs traduisant des conceptions) et sur le contrat didactique qui se noue dans la classe à propos d'un travail donné.

Notre travail va ainsi nous amener à interpréter les productions et les déclarations des élèves pour dégager leurs conceptions. Un des indices que nous aurons à utiliser sera le repérage et l'interprétation des erreurs des élèves. Nous avons besoin d'élaborer pour cela une grille générale d'analyse qui sera ensuite précisée pour chacune des tâches envisagées. Notre cadre théorique de référence nous amène à grouper les erreurs des élèves en plusieurs grandes catégories :

4.2. Erreurs liées aux conceptions.

Certaines erreurs se réfèrent aux conceptions des élèves. Dans ce cas, elles se présentent rarement de façon isolée et sont presque toujours en relation avec d'autres erreurs :

- *adéquation du modèle mathématique adopté par l'élève à la réalité ou au problème posé :*

En général un problème de mathématique à l'école élémentaire est censé modéliser une situation réelle et il arrive que le modèle utilisé par l'élève ne corresponde pas au problème posé. Par exemple les élèves doivent fabriquer une pièce d'un puzzle de même forme qu'un puzzle donné mais de taille différente, on leur donne une des dimensions de la nouvelle pièce. Sauf pour les rapports 2 et 1/2, la plupart des élèves du cours moyen utilisent un modèle additif : ajouter ou retrancher un même nombre aux dimensions de la pièce initiale (cf Douady Perrin 1986 et ch. 3). Une fois la proportionnalité établie, si on leur demande le rapport entre les aires des deux puzzles, les élèves vont cette fois pencher pour un modèle proportionnel ! Ici, sont en jeu à la fois le concept de proportionnalité et celui d'aire.

Un autre exemple est donné par la situation suivante[1] : on donne aux élèves des reproductions d'un parcours de course de relais de forme polygonale ; les reproductions ne sont pas toutes à la même échelle. Les élèves travaillent par paire émetteur - récepteur : chacun choisit sur sa représentation du parcours un point qui indique l'endroit où doit être prise une photo et envoie un message au récepteur pour lui permettre de placer sur sa propre représentation l'endroit choisi par son partenaire. Si A et B désignent les extrémités du segment sur lequel on a choisi le point M, il arrive que le message indique la longueur AB et la longueur AM ; une erreur fréquente chez le récepteur consiste à reporter la longueur AM sur sa propre représentation même si les deux représentations ne sont pas à la même échelle. Une autre forme de message est la donnée des longueurs AM et MB ; il arrive dans ce cas que le récepteur reporte AM et MB et obtienne 2 points.

Dans ces deux exemples les élèves savent appliquer la proportionnalité si on leur indique explicitement ou par des indices suffisants que c'est de cela que relève le problème. Le concept de proportionnalité n'est pas entièrement construit chez ces élèves mais la difficulté vient plutôt du champ d'application de ce concept, des rapports entre le modèle mathématique et les situations qu'il permet de modéliser.

- *erreur dans le modèle théorique : conceptions fausses.*

Cette fois les erreurs sont dans le modèle théorique lui-même, soit que l'élève ait établi des règles de fonctionnement fausses, soit que le concept interfère avec d'autres ou que les relations avec d'autres concepts soient mal établies, ce qui amène l'élève à utiliser un "théorème en acte" (Vergnaud 1981) faux.

Un exemple est fourni par les règles implicites qu'utilisent parfois les élèves pour la comparaison des décimaux (Grisvard et Léonard, 1981, 1983 et chapitre 2). Ils disent ainsi que 4,12 > 4,5 car 12 > 5 ; ou encore, en calcul mental, 4,3x4,3 = 16,9 ; les élèves traitent séparément la partie entière et la partie décimale. Brousseau (1983) a

[1] voir film "Les décimaux sont dans la course", CNDP 1982.

indiqué comment certains processus d'enseignement peuvent renforcer ce type d'erreur, constituant un véritable obstacle didactique à la mise en place de conceptions correctes sur les décimaux.

Dans d'autres cas, le concept est amalgamé avec d'autres et dans certaines situations relevant d'un des concepts, les élèves font appel à l'autre. C'est ce qui se passe avec l'aire et le périmètre : les élèves savent très bien que "l'aire, c'est l'intérieur et le périmètre, c'est le tour" mais nous avons vu que la complexité de la situation peut les amener à utiliser des procédures périmétriques pour traiter des problèmes d'aire. Nous en avons vu des exemples dans la première partie : ainsi cet élève qui ne sachant pas multiplier les 1/2 décide de les regrouper parce que 2x1/2 = 1 et finit par ajouter au lieu de multiplier, ou cet autre qui réclame de la ficelle pour rectifier le bord d'une surface arrondie pour que ce soit plus facile de compter les petits carreaux sur papier millimétré.

Enfin, il se peut que les relations avec d'autres concepts soient mal établies : nous avons déjà parlé de la similitude et de l'aire. Un autre exemple vu dans la première partie est celui des liens entre les transformations de figures et les dimensions, périmètre et aire de ces figures : ici nous avons à la fois amalgame de plusieurs transformations et absence de relation entre la transformation et les caractéristiques des figures.

- modèle théorique non disponible ou même non mobilisable comme outil, éventuellement implicite

C'est le cas quand les élèves ne peuvent répondre au problème ou utilisent des procédures archaïques, éventuellement correctes alors qu'ils disposent en principe de procédures plus performantes.

Ainsi, dans leur travail à propos des conceptions du cercle chez des élèves du CE2 (8-9 ans), M. Artigue et J. Robinet montrent qu'à la fin de l'apprentissage, le cercle n'est pas disponible pour traiter le problème suivant : sur une feuille, sont placés 2 points A et B distants de 8 cm, on demande de trouver un point M qui soit à 6 cm de A et à 5 cm de B. Sur 34 élèves à qui on a posé la question, seuls 5 élèves utilisent spontanément un compas pour donner une réponse correcte à la question, éventuellement après avoir essayé d'autres méthodes, 6 autres l'utilisent après suggestion de l'observateur.

La différence avec le premier type d'erreur est que l'élève n'utilise pas un modèle erroné : le concept visé n'est pas disponible dans certaines situations et l'élève traite le problème par d'autres méthodes (par approximations pour l'exemple cité) ou ne le traite pas du tout.

- erreur dans la traduction du problème d'un cadre dans un autre, dans les représentations (rapports signifié-signifiant) :

Dans les erreurs de conception, nous ferons une place à part à celles qui se produisent dans un changement de cadres, en particulier dans le passage entre le cadre graphique et le cadre numérique. Nous en donnerons deux exemples qui sont tous deux des représentations graphiques de mouvements :

* Dans une classe de cours moyen[2], les élèves ont effectué des courses de relais et représentent graphiquement la relation temps-distance. La consigne est de représenter sa course et celle de celui qui suit (sauf le dernier qui représente sa course et celle de celui qui précède), afin qu'on puisse recoller les graphiques et avoir une représentation de la course de toute l'équipe. Certains élèves ont produit des graphiques du type de la figure 1 ou même de la figure 2, où t_1 est le temps mis par le premier élève et t_2 le temps mis par le second.

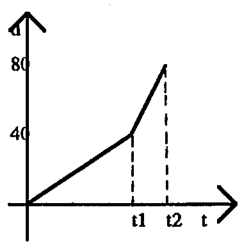


Figure 1

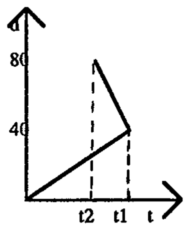
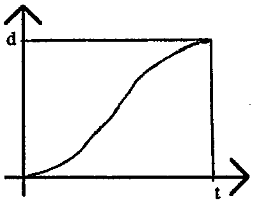


Figure 2

Dans cet exemple, on peut penser que l'essentiel du problème vient de la non maîtrise de la mesure du temps (on l'avait vu dans la difficulté pour les élèves à distinguer le temps indiqué par le chronomètre du temps mis par chaque coureur - dans le cas où on laisse tourner le même chronomètre pour toute l'équipe en relevant seulement les temps de passage de relais) ; cependant la difficulté est aussi dans la représentation et son rapport avec la réalité : les parcours des deux coéquipiers sont bien différents et successifs sur le terrain, alors que le chronomètre peut se remettre au 0 pour donner le temps de chacun ; on peut aussi penser que les distances sont bien perçues comme des intervalles sur le graphique alors que les temps le sont plutôt comme des repères.

2 Il s'agit d'observations antérieures à celles qui sont relatées dans le chapitre 3.

* On donne la représentation du trajet d'une voiture qui n'a pas roulé régulièrement et on demande de comparer sa course à celle d'une autre voiture qui part en même temps et arrive en même temps que la première en roulant régulièrement :



Ce problème a été proposé à des élèves de CM2, de 6ème, de 1ère et à des élèves instituteurs avec des résultats à peu près identiques : les élèves tracent sur le graphique le segment qui correspond à la représentation de la course régulière et déclarent que la première voiture va plus vite que la deuxième quand la courbe est au dessus du segment, moins vite quand la courbe est en dessous et à la même vitesse quand la courbe rencontre le segment.

On peut penser que l'erreur se situe là vraiment dans l'interprétation du graphique et dans son rapport avec la situation physique représentée (vitesses comme pentes de droite et non comme ordonnées). Pour étayer ce point de vue, rapportons la réaction d'un groupe d'élèves instituteurs à qui on avait posé ce problème : tous sauf un donnaient la réponse ci-dessus; le contestataire, pour convaincre ses condisciples a proposé de considérer une troisième voiture qui reste à l'arrêt pendant 10 minutes puis roule régulièrement et arrive en même temps que les deux autres; son argument était le suivant : la représentation de cette dernière course, qu'il a ajoutée sur le graphique (figure 1) est en-dessous des autres et pourtant elle roule plus vite puisqu'elle rattrape les deux autres !

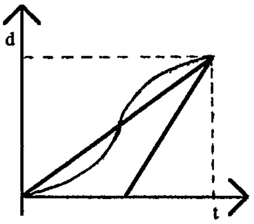


Figure 1

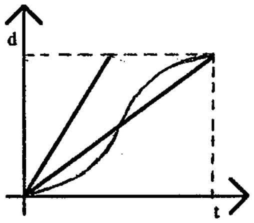


Figure 2

Cette démonstration n'a pas été convaincante pour les autres élèves qui voulaient supprimer la partie horizontale de la représentation de la course de la troisième voiture puisqu'elle ne roule pas pendant ce temps : la représentation était alors au dessus des autres courbes (figure 2).

Les sujets interrogés ne confondent pourtant pas tous la vitesse et la distance parcourue. Une erreur sur le concept même de vitesse peut cependant être à l'origine de ces réponses : il s'agit de la confusion entre la vitesse à un instant donné et la vitesse moyenne depuis le départ jusqu'à cet instant : des explications données par des élèves confirment cette hypothèse. Il est probable que chez beaucoup de sujets interrogés, les deux causes d'erreur étaient présentes.

4.2. Erreurs techniques.

D'autres erreurs sont plutôt d'ordre technique, elles peuvent alors se présenter de façon isolée, mais ce n'est pas toujours le cas :

On peut placer là les erreurs de calcul qui ne sont pas dues à des erreurs de conception, mais à d'autres causes (fatigue, inattention ou autre). Par exemple, nous verrons dans les réponses aux tests sur les décimaux et fractions que la majorité des élèves de 6ème répondent 0,8 + 0,7 = 0,15 même si beaucoup d'entre eux répondent correctement à des questions plus difficiles. Si pour certains élèves, cette erreur correspond bien à une mauvaise conception, pour d'autres on a là une réponse de type automatisme ou même "automathisme" comme dirait Stella Baruk. On peut trouver d'autres exemples de ce type dans un travail de Jean-Paul Fischer (1988a) : des élèves ont des listes d'opérations à traiter en calcul mental, ils doivent reconnaître si le résultat proposé est juste ou faux ; dans une des modalités les opérations sont classées par type, dans l'autre elles sont mélangées ; dans le deuxième cas, les élèves considèrent plus souvent l'égalité 2+3 = 6 comme juste à cause de l'interférence avec 2x3 = 6.

D'autres exemples d'erreurs peuvent être rattachées à ce type : ce sont celles que l'on peut trouver en géométrie dans la manipulation des instruments, par exemple l'équerre est mal placée, la règle n'est pas bien contre le trait... Nous distinguons ces erreurs de celle qui consiste pour un élève à ne pas pouvoir placer l'équerre en position autre qu'avec les côtés de l'angle droit verticaux ou horizontaux : dans ce dernier cas, il s'agirait bien d'un concept non disponible.

4.3. Erreurs liées au contrat didactique.

Enfin, des erreurs se situent plutôt au niveau du contrat didactique : erreurs dans l'interprétation de la consigne et des attentes du maître...

Certaines se réfèrent à un contrat didactique très général qui concerne toutes les activités du cours de mathématiques. Un exemple très connu est celui du problème de "l'âge du capitaine" révélé par une équipe de l'IREM de Grenoble (A.P.M.E.P. n°323) et analysé par Y. Chevallard (1983) : implicitement, les élèves supposent remplies un certain nombre de conditions pour l'énoncé d'un problème parce que la vérification de ces conditions est pour eux de la responsabilité du maître et non de leur propre responsabilité.

D'autres sont liées directement au problème posé, à la connaissance en jeu : le problème traité par les élèves n'est pas le problème que visait le maître, il n'y a pas eu dévolution. Par exemple, à des élèves de CM2 qui avaient travaillé sur la variation d'aire de rectangles de périmètre contant, on a posé à un semaine d'intervalle les deux problèmes suivants :

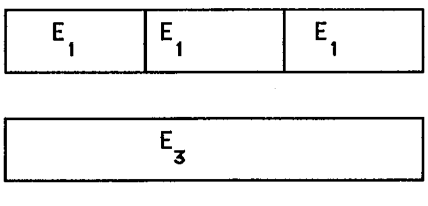
I- Un berger dispose de 50 m de grillage. Il a 80 moutons. Il veut faire un enclos pour que les moutons aient le plus de place possible. Que peut-il faire?

II- Un berger veut faire un enclos pour ses 80 moutons. Il dispose de 50 m de grillage et de 4 piquets. Il veut que chaque mouton dispose de 2 m^2. Peut-il réaliser un tel enclos ?

Le premier problème était volontairement très ouvert pour que les élèves aient toute liberté sur la forme de l'enclos : on voulait voir s'ils penseraient à autre chose que des carrés ou des rectangles. Cela s'est d'ailleurs produit : quelques élèves ont proposé des polygones à plus de 4 côtés, l'un d'eux a même proposé un cercle en disant qu'à son avis les moutons allaient pousser la clôture et que ça ferait un rond - il avait d'abord dessiné un pentagone. Mais trois élèves ont traité le problème pratique, et celui-là seulement : l'un a proposé de tuer quelques moutons, un autre de vendre des moutons et de racheter du grillage avec l'argent et le troisième d'aller couper du bois dans la forêt pour faire des barrières ! Dans le deuxième problème, les 4 piquets et la forme plus classique du problème ont contribué à ramener les élèves dans le contrat didactique des leçons précédentes : ils ont presque tous traité un problème d'aire de rectangles ; notons cependant que l'élève qui voulait couper du bois dans la forêt a cette fois utilisé un mur pour fabriquer un enclos à 5 côtés.

Ces exemples, même s'ils ne sont pas typiques, posent le problème des "problèmes concrets"[3], et montrent que problème traité par l'élève n'est pas toujours celui que voulait le maître. Cela se produit aussi dans un problème directement mathématique : dans une classe de CM2 de ZEP que nous avons observée avec D. Butlen, les élèves avaient à calculer mentalement des produits de 2 nombres à 2 chiffres (il s'agissait pour nous de tester l'usage qu'ils faisaient de la distributivité). Pour aider certains d'entre eux qui faisaient des erreurs dans l'utilisation de la distributivité, on a proposé la représentation des calculs par des tableaux à 4 cases. Cela a produit une régression pour d'autres élèves quand on leur a demandé à nouveau d'effectuer des produits mentalement : la tâche n'était plus de trouver le résultat mais de faire des décompositions.

On peut classer dans cette catégorie certains problèmes non terminés : l'élève utilise une technique correcte mais ne répond pas à la question posée. Un exemple est fourni par N. Milhaud dans sa thèse de 3ème cycle (1980) :



Question : si on prend E_1 comme unité, la mesure du segment S_4 est 21, quelle sera sa mesure si on prend E_3 comme unité ?

Réponse : il faut multiplier 3 par 7 et l'on trouve 21.

Il est possible qu'ici l'élève ne sache pas qu'il a trouvé, qu'il n'ait pas vu ce qu'on lui demande, qu'il ne sache pas ce qu'est une réponse au problème posé : la dévolution du problème n'a pas eu lieu. Nous en trouverons d'autres exemples au chapitre 2 (problèmes des œufs et des âges).

---

[3] voir par exemple le travail de J. Adda.

4.4. Erreurs de logique

Nous avons laissé de côté les erreurs de logique. Nous mettons dans cette catégorie des erreurs purement logiques, du type confusion entre hypothèse et conclusion. Elles apparaissent rarement seules, si c'est le cas, c'est le plus souvent en situation de démonstration, ou au moins de validation. On pourrait les ramener aux catégories 2 et 3 : conceptions fausses ou non disponibles, mais nous leur faisons une place à part dans la mesure où ce ne sont pas des connaissances institutionnalisées et que ce type d'erreur apparaît dans des déclarations à propos d'autres connaissances mathématiques.

Ce classement des erreurs des élèves ne pourra nous être utile que si nous ne perdons pas de vue trois points essentiels :

1) on ne peut pas analyser une erreur en référence à un concept isolé mais à un champ conceptuel : nous avons vu que très souvent les erreurs portent sur des relations entre plusieurs concepts ou que dans certaines situations, il y a interférence entre plusieurs notions ayant à voir avec la situation

2) on ne peut pas analyser une erreur hors de son contexte : il importe de savoir quelle était la connaissance en jeu pour le maître, quel était le problème à traiter pour l'élève, à quel moment de l'apprentissage se situe cette erreur (elle n'a pas la même signification au cours d'une phase de recherche ou au cours d'une phase d'évaluation), quelle est sa fréquence chez le même élève, quelle est sa fréquence dans la classe, est-elle en relation avec d'autres erreurs qui relèveraient des mêmes conceptions.

3) une même erreur relève presque toujours de plusieurs interprétations : dans le problème qui demandait l'utilisation du cercle comme outil, que nous avons rapporté plus haut, 8 enfants pensent avoir répondu au problème en plaçant un point à 6 cm de A et un autre à 5 cm de B : s'agit-il d'une difficulté de compréhension du "et" logique ? de la difficulté de prendre en compte en même temps deux informations concernant le même point ? de l'absence de dévolution du problème ? du désir de fournir une réponse quoi qu'il arrive ? Il est probable que l'erreur relève de plusieurs des interprétations.

5. Problématique et méthodologie.

Notre problématique de départ est assez naïve : nous avions travaillé avec R. Douady pendant les années où elle élaborait sa théorie de dialectique outil-objet et de jeux de cadres, et mené avec elle toutes les observations en classe. Il nous paraissait alors que ce type d'enseignement devait être efficace avec tous les enfants et particulièrement avec des élèves de milieu social défavorisé qui avaient sans doute moins que d'autres l'occasion de créer hors de l'école le sens des notions enseignées à l'école ; un enseignement de qualité, mettant en jeu les notions avec le sens qu'elles ont en mathématiques ou du moins avec une transposition didactique la moins déformante possible paraissait pouvoir amener des atouts essentiels pour ces élèves. Nous avons donc repris, deux années de suite, dans des classes de CM2 et de 6ème où la majorité des élèves étaient issus de milieu social défavorisé, certaines des situations élaborées avec R. Douady, concernant essentiellement la construction du concept de nombre décimal, la proportionnalité et la notion d'aire.

Nous n'avons pas essayé de faire une étude préalable du rapport au savoir des élèves avant l'apprentissage. Nous tentons d'y accéder au cours de l'apprentissage par l'observation de leurs comportements et de leurs procédures dans des résolutions de problèmes en classe, en entretien ou en travail écrit.

Nous avons utilisé plusieurs moyens d'investigation : des tests écrits et des entretiens par deux nous permettent d'approcher les représentations des élèves. Nous abordons l'étude du contrat didactique à travers l'analyse de ces tests et entretiens et de faits observables en classe : la présentation des contenus et l'organisation de l'enseignement ne peuvent être dissociées et sont, avec les interventions du maître et les comportements des élèves et leurs productions, des moyens d'accès au contrat didactique qui se noue dans la classe et aux rapports au savoir en jeu du maître et des élèves.

Choix des contenus

Nous avons travaillé sur des contenus suffisamment fondamentaux pour qu'on ait jugé, à travers tous les programmes, qu'ils devaient faire partie de la formation de base du citoyen, même si la place qui leur était réservée et la manière de les présenter a considérablement varié : les nombres décimaux, la proportionnalité et les aires.

Choix des classes

Une question méthodologique préalable qui se pose est de décider quand un enfant est en difficulté scolaire. On peut distinguer deux situations qui interviennent dans notre travail :

- les enfants en difficulté sur une tâche précise, un contenu précis, même si c'est un objet assez gros (les décimaux par exemple). L'étude de ces difficultés va nous permettre de repérer des représentations erronées ou inefficaces des élèves.

- les enfants en difficulté à l'école ; l'indice que nous retenons pour cela est celui de l'âge des élèves et donc du retard scolaire qu'ils ont accumulé ; il est d'un accès très facile et c'est de plus - beaucoup d'études l'ont montré - un bon élément de prédiction pour la suite de la scolarité, d'autant plus qu'il intervient explicitement au collège dans l'orientation des élèves.

A notre avis, les problèmes d'enseignement ne se posent pas de la même façon dans une classe où les élèves en retard ou en difficulté sont minoritaires et isolés et dans une classe où ils sont nombreux. Dans le deuxième cas en effet, le maître peut difficilement ignorer les élèves en difficulté et il est tenté de baisser les exigences pour maintenir un niveau de réussite supportable pour lui-même et pour les élèves ou de considérer la tâche comme impossible, de se contenter d'occuper les élèves en attendant de pouvoir changer d'école. Les résultats obtenus sur l'étude des difficultés d'élèves isolés ne sont pas nécessairement transposables dans les classes où la majorité des élèves est en difficulté.

Les contraintes

Nous avons choisi de prendre comme terrain d'étude ce deuxième type de classe, dans les conditions réelles et habituelles de la classe : les maîtres sont des maîtres ordinaires, ne bénéficiant d'aucune décharge de service. L'horaire de mathématiques et le rythme des séquences de mathématiques ne sont pas changés. L'observation dans la classe est réduite à une seule personne. Cette contrainte n'est pas d'ordre théorique : elle était imposée par les circonstances. De toute façon, il s'agissait d'un travail exploratoire pour lequel il n'était pas nécessaire de disposer de moyens d'observation très élaborés ; de plus il n'est pas sûr que les maîtres avec lesquels nous travaillions pour la première fois auraient accepté un dispositif expérimental plus lourd. La présence d'un observateur change déjà beaucoup la vie de la classe.

Par ailleurs, si un instituteur ou un professeur accepte de recevoir dans sa classe un animateur de l'IREM, chercheur en didactique, il s'attend en retour à recueillir de l'information utile pour la conduite de sa classe, en particulier des propositions de séquences, ce qui rentre dans notre projet. Cependant, il reste maître de cette classe et de la conduite de l'enseignement. Les situations effectivement proposées aux élèves sont toujours un compromis entre celles que propose l'expérimentateur et celles que le maître a l'habitude de mener. En reprenant la terminologie de Chevallard (1988) et de Chauveau (1982), on ne peut modifier brutalement l'équilibre "écologique" qui existe dans la classe.

Ces conditions amènent des contraintes qui réduisent les observables : assez peu de séquences observées, peu de travaux d'élèves puisque ceux-ci sont collés dans un cahier qui reste en possession de l'élève.

Un certain nombre de difficultés sont apparues dans la mise en place de l'enseignement prévu, du côté des élèves et du côté des enseignants. Nous ne sommes pas en mesure de répondre à la question que nous nous posions initialement, à savoir l'efficacité d'un tel enseignement pour ces élèves, puisque cet enseignement n'a pas vraiment eu lieu mais notre projet est maintenant d'analyser l'expérience, les éléments positifs et les difficultés rencontrées pour essayer de mettre en évidence quelques conditions nécessaires au fonctionnement de jeux de cadres et d'une organisation de l'enseignement comme celle que décrit R. Douady. Ceci devrait nous permettre de déboucher sur de nouvelles hypothèses pour une prise en compte des difficultés des élèves, en particulier ceux qui sont issus de milieu social défavorisé.

CHAPITRE 2

A PROPOS DES NOMBRES DECIMAUX ET RATIONNELS

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'enseignement des nombres décimaux et rationnels et à leur apprentissage par les élèves entre le cours moyen et la classe de quatrième. Notre objectif est de cerner les difficultés rencontrées par les élèves, les représentations mentales qu'ils se construisent en essayant de répondre aux questions suivantes :
- y a-t-il des erreurs et des conceptions erronées spécifiques des élèves en difficulté scolaire (élèves en retard) ou y-a-t-il des régularités dans les erreurs rencontrées ?
- peut-on déceler des différences qui pourraient être dues à l'enseignement entre des classes de même "niveau" de recrutement ou les différences dues au "niveau" sont-elles prépondérantes ?

Au cours de l'année scolaire 83-84, nous avons travaillé avec des instituteurs de CM2 pour préparer des séquences d'enseignement pour leurs élèves à partir d'une ingénierie didactique mise au point avec R. Douady (voir chapitre 3). Quelques séquences ont également eu lieu dans une classe de 6ème. Dans ces trois classes les élèves étaient majoritairement issus de milieu populaire. En fin de premier trimestre et en fin d'année, nous avons proposé des tests à ces élèves et nous avons proposé les mêmes tests à des élèves de la 6ème à la 4ème.

A l'occasion d'un stage de formation de l'IREM, en 84-85, nous avons également mis au point un deuxième questionnaire pour les élèves de 4ème après l'apprentissage des rationnels.

L'analyse des réponses des élèves à ces deux questionnaires nous permet des comparaisons et nous apporte des informations sur les points suivants :
- des conceptions erronées des élèves du CM2 à la 4ème sur fractions et décimaux avant l'apprentissage de 4ème,
- les difficultés pour ces mêmes élèves de se représenter certains problèmes multiplicatifs,
- les performances des élèves de 4ème après apprentissage des rationnels,
- le lien entre enseignement d'une part, conceptions et performances d'autre part.

Nous commencerons par situer notre travail parmi les recherches en didactique qui existaient au moment où nous l'avons entrepris : nous ferons un rapide examen de la place de ces notions en mathématiques, des présentations classiques[1] et des travaux de didactique des mathématiques sur ces questions. Nous exposerons ensuite plus précisément notre démarche avant d'en donner les résultats et de les rapprocher d'éléments complémentaires d'information fournis par les réponses de professeurs de collège à des questionnaires sur l'enseignement des notions en jeu.

1. Cadre du travail

1.1. Les différents points de vue en mathématiques et les présentations classiques.

a) les décimaux

Les décimaux ont surtout un intérêt pratique : on les utilise principalement dans le cadre de la mesure parce qu'ils permettent d'approcher les réels avec une précision arbitraire. Leur intérêt vient de ce que **D** est partout dense dans **R** et que les calculs dans **D** se ramènent à ceux sur les entiers. On les utilise aussi pour désigner ou approcher des rapports ou des coefficients d'applications linéaires. Dans ce cas, ils sont surtout utilisés sous forme de pourcentages.

Les écritures et représentations utilisées sont essentiellement
- l'écriture à virgule
- l'écriture fractionnaire
- la représentation par les points d'une droite
- les représentations en batons, rectangles, disques... pour les pourcentages

[1] Nous nous référons aux manuels parus avant 1985.

Du point de vue mathématique, on peut construire **D** en donnant un inverse à 10 et en clôturant par les opérations d'addition et de multiplication. On peut aussi obtenir **D** comme une partie de **Q** ou de **R**.

Dans les présentations auprès des élèves de l'école élémentaire, on a deux grandes options classiques : on présente les décimaux comme des rationnels particuliers (eux-mêmes obtenus le plus souvent par partage de l'unité), l'écriture à virgule intervenant comme simplification de l'écriture fractionnaire ou on insiste sur la similitude avec les entiers en procédant par changement d'unité, le décimal rend alors compte d'une mesure qui serait entière avec une autre unité, la virgule sert à repérer la place des unités, le décimal est un nombre entier d'autre chose. Depuis 1980, on voit aussi à l'école primaire, une troisième présentation qui revient à donner un inverse à 10 et à rendre possible les divisions par une puissance de 10.

Au collège, on travaille sur les décimaux en les supposant déjà introduits, on fait des révisions.

Dans les programmes anciens de l'école élémentaire, on a d'abord présenté les nombres décimaux comme écriture de fractions particulières ; à partir de 1923, on a considéré qu'il était plus simple d'introduire les nombres décimaux à partir du système métrique en insistant sur la similitude avec les entiers. Ce point de vue est encore dominant dans les classes de l'école élémentaire malgré les instructions différentes qui ont été données depuis 1980.

Très longtemps dans l'enseignement élémentaire, on a confondu le nombre décimal et son écriture à virgule. La distinction entre le nombre et son écriture apparaît dans les programmes de 1970 mais la majorité des adultes et probablement des instituteurs font encore cette confusion. Les écritures fractionnaires des nombres décimaux sont peu utilisées dans l'enseignement traditionnel depuis 1945 et on n'utilise pratiquement pas de représentations. En particulier, la graduation d'une droite n'est pas traitée à l'école élémentaire, et en 6ème elle est rattachée au cours de géométrie, après le travail sur les nombres : on utilise les décimaux supposés connus.

b) les rationnels

Les rationnels interviennent essentiellement dans le cadre algébrique. Leur intérêt est d'avoir une structure de corps, en particulier tous les entiers ont un inverse dans les rationnels. Les équations du premier degré à coefficients entiers ont des solutions rationnelles, les équations du premier degré à coefficients rationnels ont aussi des solutions rationnelles. En physique ou dans la vie sociale, ils peuvent désigner des mesures mais on les utilise surtout pour désigner des rapports ou des coefficients d'applications linéaires. Les écritures ou représentations utilisées en mathématiques ou dans la vie sociale sont principalement :

- les écritures fractionnaires
- les développements décimaux illimités périodiques
- la représentation par les points d'une droite
- la représentation par des aires (parties de rectangles ou de disques)
- la représentation par des pentes de droites joignant une origine à un nœud d'un quadrillage à coordonnées entières.

D'un point de vue mathématique, on peut les voir comme des couples d'entiers modulo une relation d'équivalence, et c'est un moyen de les construire à partir de **Z**. On peut aussi les voir comme le résultat d'une division de deux entiers ou même de deux décimaux. On a alors **Q** comme un sous-ensemble de **R** dont on a supposé (ou démontré) l'existence par ailleurs (par exemple à partir des suites décimales illimitées).

En classe de 4ème, de 1970 à 1988, on a surtout présenté les rationnels du premier point de vue, même si on ajoute souvent quelques motivations à l'aide de partages et de représentations en termes de longueur ou d'aire. Le lien avec la division, quand il est fait, ne l'est souvent qu'en fin de parcours. La résolution des équations du premier degré se traite quand on dispose déjà des nombres rationnels et non en interaction avec leur construction.

A l'école élémentaire, on ne parle pas de nombres rationnels mais on introduit souvent quelques fractions, soit à l'aide de partages et reports d'unités avec des représentations sous forme de longueurs ou d'aires, soit à l'aide des opérateurs, la fraction étant alors un moyen de désigner le composé de deux opérateurs : une multiplication et une division. La première présentation est classique, la seconde est issue du programme de 1970, motivée par le fait qu'on utilise les écritures fractionnaires surtout pour désigner des opérateurs. On ne trouve en général pas de lien entre ces deux points de vue.

Une question qui reste d'ailleurs floue à travers les programmes et manuels est celle du sens à donner au mot fraction : est-ce un couple de deux entiers, un nombre rationnel ? Aucune de ces deux définitions n'est satisfaisante : si la fraction est un couple de 2 entiers qu'on écrit autrement, on ne peut plus dire que la fraction $\frac{1}{2}$ est égale à la fraction $\frac{2}{4}$ et on ne peut plus écrire $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, ce qui devient très rapidement insupportable ! Si la fraction est un nombre, on ne peut plus parler de simplification des fractions. Le point de vue qui nous paraît présenter le moins d'inconvénients est celui qui consiste à dire que la fraction est l'écriture d'un nombre rationnel : on peut simplifier des écritures et on peut mettre le signe = entre des écritures du même nombre ; c'est d'ailleurs cette définition que retient le dictionnaire de l'APMEP (1974) mais elle semble peu répandue dans l'enseignement si l'on se fie aux manuels parus jusqu'en 1983.

1.2. Les travaux en didactique

1.2.1. Diagnostics

Les enseignants connaissent bien les erreurs que font fréquemment les élèves à propos des nombres décimaux et des rationnels. Cependant les élèves ne répondent pas au hasard : leurs erreurs peuvent souvent s'expliquer par des règles de traitement des rationnels et des décimaux qu'ils ont mises en place au cours de l'apprentissage à partir de celles qu'ils connaissaient sur les entiers. Ainsi, ils traitent séparément partie entière et partie décimale et affirment que 4,12 > 4,9 car 12 > 9, qu'entre 3,125 et 3,126 il n'y a rien puisqu'il n'y a rien entre 125 et 126, que 1,4 x 1,4 = 1,16 ou encore que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. Les erreurs des élèves, si elles se répètent, sont pour nous des indices des modèles implicites qu'ils se sont forgés, des "théorèmes en acte" (Vergnaud 1981) qu'ils utilisent.

En ce qui concerne l'ordre, C. Grisvard et F. Léonard (1981, 1983) ont repéré trois règles implicites utilisées par des élèves de 4ème pour comparer des décimaux ayant même partie entière. La plus employée est la règle 1 : le nombre le plus grand est celui dont le nombre entier formé par les chiffres après la virgule est le plus grand. La règle 2 est contradictoire avec celle-là : le nombre qui a le plus grand nombre de décimales est le plus petit. La règle 3 est une amélioration de la règle 1 : elle apparaît quand l'un des nombres a une partie décimale qui commence par 0 et consiste à dire que ce nombre est plus petit que les autres et à appliquer la règle 1 dans les autres cas. Il faut remarquer que l'application de telles règles amène des réponses justes dans un nombre de cas non négligeable (la règle 1 donne des réponses justes dans 91% des cas s'il s'agit de comparer 2 décimaux ayant de 1 à 3 chiffres derrière la virgule : si le nombre de décimales est le même, la règle 1 fournit une réponse correcte). Des élèves qui comparent correctement 2 nombres décimaux semblent employer des règles de ce type quand ils ont à traiter une série de 5 à 10 nombres.

K. Hart (1980, 1981) rend compte d'une vaste étude faite en Angleterre sur les résultats d'élèves de 11 à 16 ans à des tests concernant leur maîtrise de la proportionnalité, des nombres rationnels et décimaux. Elle constate un saut énorme dans les résultats des élèves quand on passe des entiers aux nombres décimaux ou fractionnaires. Une des raisons en est l'utilisation privilégiée par les sujets interrogés des procédures additives : la multiplication est le plus souvent vue comme une addition répétée, conception qui n'a plus de sens dans le cas du produit de 2 fractions ou de 2 décimaux non entiers.

Par ailleurs une étude non publiée de Vergnaud et de son équipe montre que les élèves de 6ème et de 5ème ont beaucoup de mal à placer des données sur une graduation même dans le cas d'une échelle assez simple donnée dans l'énoncé : certains élèves juxtaposent les segments représentant les données alors qu'il faudrait les emboîter.

Ces erreurs et ces modèles erronés sont tenaces et subsistent parfois de longues années après l'apprentissage. Ainsi, en 1977, M. L. Izorche avait constaté que certains élèves de seconde AB se représentaient les décimaux comme une hiérarchie de sous-ensembles D_n contenant les décimaux avec un nombre n fixe de chiffres après la virgule et qu'ils avaient beaucoup de mal de passer d'un D_n à un autre.

De la même façon, les élèves étendent abusivement aux rationnels ou décimaux des résultats vrais sur les entiers : ainsi nombre d'élèves (ou d'adultes) sont persuadés que si on multiplie un nombre a par un nombre b, le résultat est plus grand que a, si on divise a par b, le résultat est plus petit que a. La résistance de ces modèles erronés issus des entiers s'explique parce que les connaissances antérieures, parvenues à un bon niveau de fonctionnement peuvent faire obstacle à la mise en place de connaissances nouvelles. Quand il rencontre une connaissance nouvelle, l'élève dispose déjà de représentations, de modèles dans lesquels il va essayer d'intégrer la connaissance nouvelle de la façon la moins coûteuse possible, il va essayer d'adapter ses modèles anciens de façon à produire des réponses justes mais en remettant en question le moins de choses possible. De plus, l'enseignement peut renforcer cet obstacle en accentuant dans la présentation des décimaux leur similitude de traitement avec les entiers - ce qui se passe pour les présentations classiques à l'école élémentaire qui s'appuyent sur les changements d'unités. C'est ce que G. Brousseau (1983) appelle un obstacle didactique.

Les conceptions élaborées à propos des nombres entiers puis décimaux continuent à interférer dans la construction des nombres réels et les débuts de l'analyse. J. Robinet a interrogé des élèves et étudiants de 1ère S, Term. A1, C, D, E, première année de DEUG ou d'IUT et des élèves instituteurs sur leurs conceptions des nombres. Il apparaît que pour la majorité d'entre eux **R** est vu sous son aspect ensemble de nombres sans référence géométrique. Les différents sous-ensembles ne sont différenciés les uns des autres que par l'écriture, ce qui fait que **R** et **D** sont souvent assimilés comme l'ensemble des nombres à virgule (qu'il ait ou non un nombre fini de décimales). Nous examinerons plus précisément les réponses des élèves instituteurs à la fin de ce chapitre.

1.2.2. Ingénieries didactiques

Une des hypothèses actuelles des chercheurs en didactique des mathématiques, c'est que l'enfant construit ses connaissances nouvelles en s'appuyant sur ses connaissances anciennes mais aussi contre ses connaissances anciennes (voir ch. 1). L'enseignement doit donc donner aux élèves l'occasion de remettre en question leurs modèles de fonctionnement et de les intégrer correctement dans de nouveaux modèles qui seront remis en question à leur tour. Il faut pour cela que les concepts enseignés prennent sens pour les élèves.

Nous avons vu dans le chapitre 1 comment G. Brousseau a mis en évidence dans la construction du savoir pour les élèves le jeu de la contextualisation - décontextualisation et comment R. Douady fait intervenir des jeux de cadres à l'intérieur d'une organisation de l'enseignement qui permet une dialectique entre l'aspect outil et l'aspect objet des concepts. Tous deux se sont intéressés à l'enseignement des rationnels et décimaux à l'école élémentaire et ont produit, avec leurs équipes des ingénieries didactiques visant à la construction par les élèves des nombres décimaux avec leurs opérations et propriétés. On peut trouver la description du processus complet pour l'un dans G. et N. Brousseau (1985) pour l'autre dans Douady et Perrin-Glorian (1986) et des réflexions théoriques sous-jacentes respectivement dans Brousseau (1980, 1981, 1983, 1987) et dans Douady (1980, 1984, 1987).

Dans les deux processus les décimaux interviennent comme des rationnels particuliers permettant une économie de calculs. On les aborde à la fois sous l'aspect mesure et sous l'aspect coefficient d'application linéaire. On développe dans les deux cas une certaine technique sur l'addition des fractions qui ne doit cependant pas être trop perfectionnée afin que les calculs restent assez coûteux pour que les enfants aient envie de les alléger. On relève néanmoins certaines différences assez importantes entre les deux présentations :

Dans la présentation de Brousseau les rationnels sont introduits dans une situation de commensuration de façon à atteindre directement tous les $\frac{a}{b}$ sans privilégier les $\frac{1}{n}$ comme c'est le cas pour Douady et Perrin.

Dans la présentation de Douady, on fait une grande place au jeu de cadres entre le numérique et le géométrique (voire le graphique), en particulier la construction des nombres se fait en interaction avec la graduation d'une demi-droite alors que chez Brousseau cette graduation apparaît plus tard pour passer à l'écriture décimale.

Ce sont les jeux de cadres numérique - géométrique qui permettent de donner du sens au produit de 2 fractions qui est abordé très tôt dans la progression de Douady, dans une situation de calcul d'aires (produit de mesures). Chez Brousseau au contraire, on pousse assez loin la technique d'addition de 2 fractions et la réduction au même dénominateur mais on n'aborde le produit que dans le cas des décimaux, déjà écrits sous la forme habituelle, dans une situation de composition d'applications linéaires (agrandissements par le pantographe).

L'écriture à virgule est introduite assez tôt dans la progression de Brousseau dans une situation d'approximation de fractions qui doit amener les élèves à privilégier le choix de fractions décimales. Chez Douady il s'agit d'approcher un irrationnel, cette situation n'intervient qu'en fin de processus et c'est après avoir fait beaucoup de multiplications de nombres en écriture décimale fractionnaire "avec tous les zéros" que la virgule apparaît comme une convention permettant d'alléger l'écriture. Dans les deux cas, il faut que les élèves aient eu auparavant l'occasion de remarquer que les calculs étaient plus faciles et plus rapides dans le cas des fractions décimales.

2. Notre démarche

Notre objectif est ici de repérer les difficultés des élèves à propos des nombres rationnels et décimaux ainsi que les représentations et règles d'action qu'ils mettent en place à ce sujet, de voir s'il y a des régularités et aussi des différences suivant les classes. Ces différences peuvent avoir plusieurs origines, nous essayerons de discerner celles qui peuvent être dues à l'enseignement reçu et celles qui peuvent être spécifiques des élèves en difficulté ou de milieu social défavorisé.

Pour cela, nous avons utilisé deux questionnaires (désignés dans la suite A et B) et des entretiens individuels ou par deux. Le questionnaire A a été passé dans plusieurs classes parmi lesquelles des classes de CM2 et de 6ème où on a essayé de mettre en place un enseignement prenant en compte certaines hypothèses issues des recherches en didactique des mathématiques dont nous venons de parler, en particulier l'ingénierie didactique que nous avons mise au point avec R. Douady. Les séquences d'enseignement dont il est question seront décrites dans le chapitre 3. Les entretiens ont eu lieu dans ces mêmes classes. Les résultats du questionnaire A ont été décrits dans le cahier de didactique n° 24 de l'IREM de Paris 7 paru en septembre 1985. Nous les reprenons ci-dessous.

Le questionnaire B a été élaboré par R. Douady et moi-même pour un stage de formation continue de l'IREM. Certains des stagiaires l'ont fait passer dans leurs classes. Nous leur avons aussi proposé un questionnaire sur leur enseignement des décimaux et rationnels ; les réponses étaient anonymes, nous ne pouvons donc les mettre en relation avec les résultats des élèves mais elles permettent de donner certaines tendances sur les conceptions des professeurs à propos de cet enseignement. Nous en parlerons à la fin de ce chapitre et nous y reviendrons dans le chapitre 6.

Nous avions nous-même au départ certaines hypothèses sur l'enseignement de ces notions, ce sont celles qui ont présidé à l'élaboration de notre ingénierie didactique, nous les avons exprimées dans le chapitre 1, rappelons-en quelques-unes :

Notre hypothèse essentielle de départ, celle qui conditionne l'existence même de ce travail, est que, même s'il y a des régularités, les difficultés que les élèves rencontrent dans l'apprentissage des nombres décimaux et rationnels ne sont pas inéluctables et que l'enseignement reçu a un effet important.

La deuxième est que ces notions se construisent sur un long temps et qu'il faut donc se placer dans une perspective à long terme pour leur enseignement, en pensant le plus possible à l'usage qui en est fait en mathématiques et ailleurs.

Une autre hypothèse concerne la place importante des interactions entre ces notions et d'autres notions mathématiques : un concept prend aussi son sens dans les relations qu'il entretient avec d'autres concepts, même et surtout si ce n'est pas dans le même domaine mathématique. Nous pensons ici en particulier à l'interaction avec la géométrie dans des situations de mesure et à l'interaction avec la représentation graphique de fonctions traduisant ces situations de mesure ou d'autres situations numériques.

En ce qui concerne les décimaux, un point qui nous paraît fondamental est l'intérêt qu'ils ont pour approcher les réels, en particulier dans le cadre de la mesure. L'interaction entre les cadres numérique et géométrique (points d'une droite, aires de rectangles...) nous paraît un moyen important pour donner du sens aux décimaux et pour donner aux élèves des moyens de contrôle dans leur traitement. En ce qui concerne les rationnels, le point de vue algébrique (résolution d'équations du premier degré) nous paraît central mais en ce qui concerne la mise en place des techniques opératoires ou de comparaison, il nous semble important que les élèves puissent disposer de plusieurs cordes à leur arc, en particulier la réduction au même dénominateur et la division, et utiliser facilement aussi bien l'écriture à virgule que l'écriture fractionnaire. Là encore les changements de cadres entre le numérique, le géométrique et l'algébrique permettent de faire avancer les connaissances des élèves et de leur donner des moyens de contrôle de leur travail.

2.1. Questionnaire A

Le questionnaire A s'adresse à des élèves du CM2 à la quatrième avant l'apprentissage des rationnels et porte sur les représentations qu'ils se font des décimaux et des "petites fractions" ainsi que sur un certain nombre de techniques à leur sujet. Notre objectif était plus particulièrement de cerner les difficultés que rencontraient les élèves issus de milieu social défavorisé et en retard scolaire dans des classes où ils étaient majoritaires, de comparer à d'autres classes et de voir si un apprentissage différent pouvait agir sur les représentations des élèves et donc modifier les erreurs observées. Nous nous posions en particulier les questions suivantes :

- Quelles représentations les élèves se font-ils des petites fractions et des nombres décimaux (Ici nous entendons par représentations à la fois des dessins sur le papier et éventuellement des images mentales dans la mesure où nous pensons pouvoir y accéder)?
- Quelle pratique ont-ils de la graduation et de l'ordre sur les décimaux ?

- Y-a-t-il un rapport entre les conceptions exprimées par les représentations proposées, les explications données, et les performances sur l'ordre des décimaux ?

- Les élèves sont-ils capables de réussir des problèmes multiplicatifs simples comme ceux mis en œuvre dans la numération ou la composition d'applications linéaires et qui semblent des prérequis à la compréhension des nombres décimaux ?

- Y-a-t-il un rapport entre la résolution de ces problèmes par les élèves et les performances sur les décimaux ?

- Y-a-t-il une différence au niveau des conceptions des élèves qui ont au moins un an de retard scolaire (nous avons expliqué dans le premier chapitre que c'était pour nous un indice de difficulté) ?

- Y-a-t-il des différences au niveau des résultats pour ces mêmes élèves ?

- Y-a-t-il des différences au niveau des représentations et des conceptions selon l'apprentissage ?

- Y-a-t-il des différences au niveau des résultats selon l'apprentissage ?

Nous entendons conception dans un sens assez naïf, nous reviendrons sur ce mot dans le chapitre 7.

2.1.1. Choix des questions.

Il existe deux versions de ce questionnaire. On peut trouver les textes en annexe. Nous décrivons la version 2 qui est proposée en 2 parties aux élèves (partie A et partie B). La version 1 était légèrement différente et ne comportait pas de question sur l'axe gradué, mais une partie des classes qui ont traité cette version ont répondu un peu plus tard à la version 1bis où elle figurait.

Les questions B1, B2, B3, B4 concernent les représentations que les élèves se font des petites fractions et de leurs opérations. En demandant d'expliquer à un camarade de CE2, on espère sortir du contexte purement scolaire et accéder aux conceptions spontanées des élèves, le CE2 a été choisi parce que c'est la classe qui précède le premier apprentissage des nombres décimaux. La question sur les heures est destinée à vérifier que l'usage du quart d'heure est bien une pratique courante pour les élèves, si cette pratique est reliée à la notion de fraction et si l'élève peut l'utiliser pour évaluer des fractions d'heure qui ne sont pas d'un usage courant ($\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ pour la première version, $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{5}$ pour la deuxième version). La question sur les sommes est destinée à déceler des modèles spontanés des élèves avant l'apprentissage systématique de la somme de 2 fractions (ou les dérives par rapport à l'apprentissage dans le cas où il a commencé).

Deux questions concernent l'ordre : (A3) ranger 9 nombres décimaux du plus petit au plus grand (il y avait aussi 2 nombres fractionnaires mais nous n'avons pu en tenir compte dans les résultats), intercaler des nombres entre 2 nombres donnés (B5)

Une question porte sur la graduation : placer 8 nombres décimaux sur un axe où les graduations entières sont marquées (5 cm pour une unité). Cette question ne figurait pas dans la première version du test, certaines classes n'y ont donc pas répondu.

Le questionnaire comportait aussi quelques problèmes multiplicatifs dont la maîtrise nous paraissait a priori une condition d'acquisition correcte des décimaux et rationnels (en particulier le problème sur les œufs qui nous semblait porter sur la numération et donc préalable à l'apprentissage des décimaux).

Dans la première version, il y avait aussi un problème sur la mesure de l'aire d'un rectangle (problème du carrelage). Quelques élèves avaient proposé 25+15 = 40 ou 2x(25+15), mais la plupart des autres l'ont assez bien réussi. Il nous est apparu que la multiplication d'entiers pour compter les carreaux d'une grille était maîtrisée et nous n'avons pas fait figurer ce problème dans les versions suivantes.

2.1.2. Les classes testées.

Au cours de l'année scolaire 1983-1984, nous avons fait passer ce questionnaire dans 10 classes :

- 3 classes de CM2 pour lesquelles nous avons des informations sur l'enseignement des décimaux :

Les classes de CM2A et CM2B étaient deux classes d'une même école de la banlieue sud de Paris. Dans chacune de ces classes, plus de la moitié des élèves avaient au moins un an de retard scolaire, et la plupart d'entre eux étaient issus de milieu socio-culturel très modeste, avec un fort pourcentage d'élèves d'origine étrangère (40%). J'ai travaillé avec les maîtres de ces deux classes pendant l'année de CM2, préparant avec eux toutes les activités sur l'introduction des nombres décimaux. Bien que les élèves aient rencontré au CM1 des nombres à virgule à partir des changements d'unité, nous avons repris cet enseignement au départ à l'aide de situations présentées dans Douady et Perrin (1986). Cependant, après un long travail sur la graduation et ses affinements en demis, quarts, huitièmes ou tiers, sixièmes, puis en dixièmes, centièmes, millièmes nous avons accéléré le passage à l'écriture à virgule qui est apparue en fin de premier trimestre comme une convention et a été reliée au tableau de numération. Les séquences réalisées sont décrites dans le chapitre 3A.

La classe de CM2C était située dans une autre école de la banlieue sud de Paris (école d'application de l'école normale) ; elle comportait également un fort pourcentage d'élèves d'origine étrangère et beaucoup d'élèves issus de milieux modestes, elle était cependant moins homogène et comptait quelques enfants d'enseignants. R. Douady a travaillé avec cette classe en CM1 et CM2 ; l'apprentissage des décimaux s'est fait en gros selon le processus décrit dans Douady et Perrin (1986).

- 4 classes de 6ème, 1 classe de 5ème, 2 classes de 4ème :

La classe de 6ème A était située dans le même secteur scolaire que les CM2A et CM2B. Dans cette classe 70% des élèves avaient au moins un an de retard et la plupart d'entre eux étaient issus de milieu socio-culturel très modeste. Nous avions organisé dans cette classe avec le professeur une séance de travaux dirigés une fois par semaine au cours du premier trimestre avec comme objectifs la distinction des notions de longueur et d'aire et l'utilisation des décimaux dans des situations d'approximation en reprenant quelques-unes des situations expérimentées en CM (séances décrites dans le chapitre 3). Le reste du temps, les élèves travaillaient normalement avec le professeur sur le programme de 6ème de façon traditionnelle.

Pour les autres classes, nous n'avons aucune information sur l'enseignement.

Les classes de 6ème B et 6ème C étaient deux classes d'un même collège d'une ZEP de la banlieue nord de Paris, avec un fort pourcentage d'élèves ayant au moins un an de retard scolaire.

Les classes de 6ème D, 5ème, 4ème B étaient 3 classes d'un collège de la banlieue sud-ouest de Paris, ayant le même professeur de mathématiques. Dans cette 4ème, l'apprentissage sur les rationnels était commencé mais les élèves ont disposé de très peu de temps pour le test (1/4 h).

La classe de 4ème A était une classe de 4ème d'un lycée parisien où la majorité des élèves avaient du retard scolaire. L'apprentissage des rationnels n'était pas commencé.

Nous donnons ci-dessous les âges des élèves et le pourcentage de retard (ou d'avance) suivant les classes. Dans le premier tableau, il s'agit du retard calculé selon l'âge en années civiles légales. Dans le deuxième, nous donnons des retards et des avances "corrigés" : les enfants qui ont du retard et qui sont nés en novembre ou décembre sont comptés avec ceux de l'année suivante, ce qui diminue leur retard d'un an ; les enfants qui ont de l'avance et qui sont nés en janvier ou février sont comptés avec ceux de l'année précédente, ce qui diminue leur avance d'un an.

<u>Age des élèves</u>

	CM2A	CM2B	CM2C	6è A	6è B	6è C	6è D	5ème	4è A	4è B
Effectif	23	23	26	24	21	22	26	23	19	22
Avance	0	0	3	0	0	0	1	1	1	4
Normal	12	11	12	7	7	7	11	9	6	14
1 an de retard	6	8	5	8	9	8	7	2	8	2
retard ≥ 2 ans	5	4	4	9	4	7	1		2	0
% retard ≥ 1an	47,8	52,2	37,5	70,8	65	68,2	40		58,8	10
% retard ≥ 2 ans	21,7	17,4	16,7	37,5	20	31,8	5		11,7	0
Non réponse	0	0	2	0	1	0	6	11	2	2

<u>Retard "corrigé"</u>

	CM2A	CM2B	CM2C	6è A	6è B	6è C	6è D	5ème	4è A	4è B
Avance	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
Normal	14	14	15	9	8	9	17	10	8	18
1 an de retard	7	6	6	8	8	6	3	2	7	1
retard ≥ 2 ans	2	3	2	7	4	7	0		1	0
% retard ≥ 1an	39,1	39,1	33,3	62,5	60	59,1	15		47,1	5
% retard ≥ 2 ans	8,7	13	8,3	29,2	20	31,8	0		5,9	0

En 5ème trop d'élèves ont omis de donner leur date de naissance : nous n'avons donc pas cherché le taux de retard ; en 6ème D, le taux de retard est calculé sur les trois quarts de la classe environ.

2.1.3. Conditions de passation.

La première version du test a été passée en 6ème A en décembre 83, dans les 3 CM2 ainsi qu'en 6ème D, 5ème et les deux 4ème en janvier 84. Pour les CM2A et CM2B, la passation s'est faite en une séance d'une heure un quart, pour les CM2C en deux séances d'une heure, dans les deux classes de 6ème et la classe de 4ème A en une séance de 50 minutes, dans la classe de 5ème en 30 minutes et dans la classe de 4ème B en 15 minutes. Ces différences ont surtout eu des effets sur le taux de non-réponse, en particulier pour le problème sur les œufs placé en fin de questionnaire.

La version 1 bis le reprenait ainsi que les questions sur l'ordre et l'intercalation et ajoutait la question sur la graduation. Elle a été passée en mai 84 en 6ème A et en juin 84 en CM2A et CM2B.

Les classes de 6ème B et 6ème C ont passé la version 2 en deux séances de 50 minutes à deux jours d'intervalle fin juin 1984.

Les conditions de passation ne sont pas les mêmes. Il conviendra d'en tenir compte dans l'interprétation des résultats. Remarquons a posteriori que ces différences n'ont pas beaucoup d'importance dans la mesure où les classes de 4ème et 5ème qui ont le moins de temps sont aussi celles qui ont le mieux réussi, cela ne fait qu'accentuer les résultats. Les CM2C ont eu plus de temps que les autres CM2 ; cela explique le faible taux de non-réponse dans cette classe.

2.2. Questionnaire B

Le questionnaire B s'adresse à des élèves de 4ème après l'apprentissage des rationnels. Il a été élaboré en 1985 en collaboration avec R. Douady à l'occasion d'un stage IREM pour les professeurs de collège.

Le questionnaire comportait trois parties (voir texte en annexe) : la première portait principalement sur les définitions, la seconde sur la technique opératoire et l'ordre, la troisième sur la résolution d'équations et l'approximation.

Les professeurs volontaires le faisaient passer dans leurs classes. Nous avons reçu les réponses de 8 classes à l'ensemble du questionnaire ; nous avons aussi les réponses d'une classe supplémentaire pour la deuxième partie. Le test a été passé dans toutes les classes fin avril ou début mai, après l'enseignement sur les rationnels.

Le profil des classes était différent. Dans le tableau ci-dessous, on peut voir la répartition des effectifs et des âges des élèves suivant les classes :

classe	A	B	C	D	E	F	G	H	I	autres	total
effectif	29	25	25	24	25	26	26	25	24	10	239
en avance	11	1	0	1	0	1	0	0	2	2	18
âge normal	15	12	11	21	13	20	10	10	18	2	132
1 an retard	3	12	11	2	11	1	11	5	4	2	62
retard ≥2 ans	0	0	3	0	1	3	3	0	0	2	12
non réponse	0	0	0	0	0	1	2	10	0	2	15
% retard	10,3	48	56	8,3	48	16	58,3		16,7		33

Des élèves isolés ont passé ce test : 4 élèves d'autres classes du même établissement ont passé une partie des tests avec les élèves de la classe B : l'un pour la partie II (âge normal), 3 pour la partie III (1 n'a pas donné sa date de naissance, 1 a un an de retard, 1 a 2 ans de retard). Il y avait avec les élèves de la classe D, 6 élèves d'une autre classe du même établissement. Nous comptons à part les résultats de ces élèves supplémentaires.

Nous voyons que les classes se répartissent en deux catégories assez nettes : dans les classes B, C, E, G, le retard scolaire est compris entre 48% et 58,3%. Dans les classes A, D, F, I, il est compris entre 8,3 et 16,7%. Nous laissons à l'écart la classe H où trop d'élèves n'ont pas fourni leur date de naissance. Ils n'ont d'ailleurs répondu qu'à une partie du questionnaire.

Les conditions de passation ont été assez différentes suivant les classes : en une fois, deux fois ou trois fois. Cela ne nous permet pas de comparaison, en particulier sur le taux de non-réponse élevé à certaines questions de la troisième partie mais cela permet une étude des erreurs des élèves et des procédures utilisées.

2.3. Sources d'information complémentaires.

Entretiens individuels

Tous les élèves de 6ème A ont été interrogés par deux sur l'un des problèmes suivants :

1. Parmi les rectangles de périmètre X cm, y-en-a-t-il un d'aire Y cm^2 ?

2. Peux-tu trouver deux nombres dont la somme est X et le produit Y ?

Quelques élèves de CM2A et CM2B ont été interrogés sur le problème :

- peut-on trouver un carré d'aire 25 cm^2 ?
- peut-on trouver un carré d'aire 30 cm^2 ?

Ces problèmes avaient déjà été utilisés dans des entretiens individuels avec des élèves de CM2 et de 6ème que nous avions effectués avec R. Douady quelques années auparavant. Nous pourrons comparer les démarches des élèves dans les deux cas.

Les réponses des élèves à ces questionnaires sont analysées dans le chapitre 3A, après la description des séquences observées dans ces classes. Nous en donnons un résumé à la fin du présent chapitre.

Elèves instituteurs.

A la même époque, nous participions à la formation des élèves instituteurs dans le cadre du DEUG 1er degré dispensé dans les écoles normales. Nous avons fait passer un test sur les ensembles de nombres à deux promotions successives. J. Robinet a analysé les réponses d'un de ces groupes dans son article : "Les réels, quels modèles en ont les élèves ?". Nous reviendrons sur les résultats de ces tests.

Professeurs de collège.

Au cours du stage d'avril 1985 dont nous avons déjà parlé à propos du questionnaire B, nous avions demandé aux professeurs de remplir un questionnaire portant sur leur enseignement des réels et des rationnels. Nous avons reçu 50 réponses qui nous donnent une idée de l'enseignement des nombres au collège à cette époque.

L'année suivante, vu les difficultés des élèves à ce sujet, nous avons réalisé un autre questionnaire portant plus spécifiquement sur la graduation de la demi-droite numérique, et aussi sur la répartition cours-exercices. Nous avons recueilli 39 réponses. La partie générale de ce questionnaire sera analysée dans le chapitre 6, nous rapportons dans ce chapitre ce qui concerne la graduation de la demi-droite.

3. Résultats du questionnaire A

3.1. Questions sur les représentations

3.1.1 Représentations proposées

Types de représentations

Dans les classes où l'apprentissage a été fait de façon classique, l'unique représentation proposée par les élèves pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ est en termes de partage de tartes, gâteaux, disques... regroupé sous le terme "galette". Quelques élèves proposent des rectangles, mais assez peu.

Une exception : la classe de 4^eB où des élèves proposent des représentations correctes en termes de longueurs (4 pour $\frac{1}{3}$, 3 pour $\frac{3}{4}$).
Pour 2,3 certains élèves restent fidèles aux représentations en termes de galette, toutes fausses. La plupart n'ont aucune réponse à fournir. Les seules représentations correctes fournies le sont en termes de cm et mm, sauf dans la classe de 4^eB où 5 élèves fournissent des représentations en termes de longueur, indépendamment des centimètres et millimètres.
Remarquons que la classe de 4^eB est celle qui a les conditions les plus favorables du point de vue âge des élèves (4 élèves en avance, deux avec un an de retard).
De plus, l'apprentissage sur les fractions était commencé dans cette classe. A noter quelques représentations non inscrites dans le tableau parce que peu nombreuses, en termes d'heures (encouragées par la question suivante) en termes d'opérateur ou en termes de division pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$. Quelques élèves de 6^e font une représentation discrète

 $\frac{1}{3}$  $\frac{3}{4}$

Pour les classes de CM_2 où il y a eu un apprentissage sur les petites fractions à partir des longueurs, la représentation "baguettes" est partout présente. C'est particulièrement net pour la classe de CM_2C où ce sont presque les seules fournies (à part quelques rectangles). Dans la classe de CM_2B, il y a beaucoup de réponses sans dessin du type " $\frac{1}{3}$ c'est une unité partagée en 3 " ou " $\frac{3}{4}$ c'est 3 fois $\frac{1}{4}$ " ou "2,3 c'est 2 entiers et 3 dixièmes" difficilement interprétables en termes de représentation.

Dans la classe de CM_2A les représentations "baguettes" et "galettes" sont à peu près équilibrées avec un léger avantage pour les galettes.

Notons qu'en CM_2C l'apprentissage sur les fractions à partir des mesures de longueur a été plus poussé et s'est étalé sur une plus longue période de temps.

		CM_2A	CM_2B	CM_2C	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	4^eB	total 6^e	% 6^e
Effectif		22 *22*	21 *18*	26 *25*	24 *19*	18 *15*	21 *21*	26 *26*	23 *22*	19 *16*	22 *20*	89 *77*	
baguettes	$\frac{1}{3}$	6	8	16	0	0	0	1	0	0	6	1	1,4
	$\frac{3}{4}$	11	4	15	0	0	0	1	0	0	4	1	1,5
	2,3	6	4	15	0	0	6	3	4	0	6	9	22
rectangles	$\frac{1}{3}$	0	1	5	2	0	0	4	3	0	1	6	8,2
	$\frac{3}{4}$	0	0	2	3	0	0	2	3	0	0	5	7,4
	2,3	0	1	2	0	0	0	1	0	0	0	1	2,4
galettes	$\frac{1}{3}$	12	0	0	12	14	21	15	18	9	11	62	84,9
	$\frac{3}{4}$	10	0	0	8	13	21	16	16	12	9	58	85,3
	2,3	8	0	0	4	11	14	2	2	6	0	31	75,6
Réponses sans dessin	$\frac{1}{3}$	1	6	3	2	0	0	0	0	3	1	2	
	$\frac{3}{4}$	1	12	4	2	1	0	1	1	3	1	4	
	2,3	3	9	2	3	0	1	5	5	2	2	9	
Réponses fournies	$\frac{1}{3}$	19	15	24	16	14	21	24	21	12	19	75	84,3
	$\frac{3}{4}$	22	16	22	13	14	21	24	20	15	14	72	80,9
	2,3	17	14	20	8	11	18	13	10	8	8	50	56,2
Représentations correctes	$\frac{1}{3}$	12	7	17	7	5	12	16	17	3	15	40	53,3
	$\frac{3}{4}$	16	1	13	6	8	19	17	16	13	10	50	69,4
	2,3	3	3	12	0	0	6	4	4	0	6	10	20

Pour les représentations le pourcentage concernant l'ensemble des élèves de 6^e est calculé sur les réponses avec dessin.

Exemple : $\frac{\text{représentation "galette"}}{\text{réponses avec dessin}}$ 84,9% des élèves de 6^e ayant fourni un dessin pour 1/3 ont fait une représentation de type galette.

Le pourcentage des représentations correctes est calculé sur les réponses fournies, toujours pour l'ensemble des élèves de 6^e; par exemple 20 % des élèves ayant fourni une réponse pour 2,3 ont fait une représentation correcte.

Le nombre de réponses fournies est indiqué pour chaque classe en italique dans la ligne effectif.
Le pourcentage des réponses fournies est calculé sur l'effectif : par exemple 80,9 % des élèves de 6^e ont fourni une réponse à la question concernant 3/4.

Tableau des % de représentations correctes sur les représentations fournies avec dessin.

	CM_2A	CM_2B	CM_2C	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	4^eB	6^e
1/3	66,7		81	50	35,7	57,1	76,2	81	33,3	83,3	54,8
3/4	76,2		72	54,5	61,5	90,5	80	84,2	100	76,9	73,5
2,3	21,4		66,7	0	0	33,3	57,1	66,7	0	100	21,7
Effectif total	22	21	26	24	18	21	26	23	19	22	89
Réponse avec dessin pour 2,3	14	5	18	5	11	17	8	5	6	6	46

Nous ne donnons pas les pourcentages en CM_2B. Ils n'auraient aucune signification puisque trop peu d'élèves ont fourni des représentations (respectivement 9-4-5). Remarquons que la même réserve est à faire sur les pourcentages concernant 2,3 étant donné le faible pourcentage de réponse à cette question dans certaines classes, en particulier en 6^eA, 6^eD, 5^e, 4^eA, 4^eB où moins de la moitié des élèves ont répondu à cette question. Si on ne prend en compte que les réponses avec dessin les effectifs sont respectivement de 14 sur CM_2A, 18 en CM_2C, 5 en 6^eA, 11 en 6^eB, 17 en 6^eC, 8 en 6^eD, 5 en 5^e, 6 en 4^eA et 6 en 4^eB.

On peut cependant remarquer que sur les représentations fournies pour 2,3, elles ne sont majoritairement correctes que dans les classes de CM_2C, 6^eD, 5^e, 4^eB et pour les classes de 6^eD, 5^e, 4^eB les réponses correctes sont évaluées sur un très petit effectif (resp. 8,5,6). Dans les classes de 6^e les seules représentations correctes fournies sont celles de la règle avec cm et mm. Cette représentation resterait-elle efficace pour 2,37 ?

<u>Erreurs rencontrées</u>

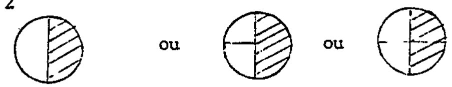
Les erreurs ont été nombreuses et variées. On trouve cependant des régularités. Nous ne donnerons pas de résultats quantitatifs, mais une description qualitative des erreurs avec une simple indication de fréquence.

a) <u>pour $\frac{1}{3}$</u>

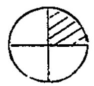
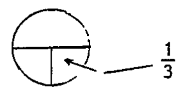
. Une erreur très fréquente est celle de l'inégalité des parts. Je n'en ai pas tenu compte quand elle était manifestement due à la maladresse.
Mais certains élèves représentent $\frac{1}{3}$ par une petite part ou trois parts inégales

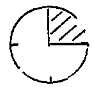
sans toujours dire quelle part ils choisissent.

. La confusion avec $\frac{1}{2}$ existe mais elle est assez rare

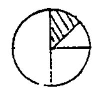
on trouve $\frac{1}{3}$ =  ou ou 3 exemples vus en 6^e

Le 2^e exemple est sans doute à rapprocher des partages inégaux.

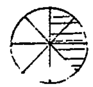
. Mais la confusion avec $\frac{1}{4}$ est assez répandue (14 fois).
Elle n'est pas toujours à rapprocher des partages inégaux car certains élèves dessinent  D'autres commentent
"il le coupe en demi et la moitié il la coupe en 2. Une des parties sera le tiers" avec le dessin 

Un élève de 4^e qui adopte le modèle "heures" précise 15 mn à côté d'un dessin 

. Une autre confusion rencontrée 6 fois est la confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{8}$

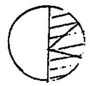
parfois explicitée :
"c'est la moitié du quart" 

. A noter aussi la confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ (3 fois)
parfois exprimée $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

. entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{8}$: un élève de 6^e a dessiné très soigneusement  tiers

il a d'ailleurs écrit $\frac{1}{3}$ vaut $\frac{3}{4}$

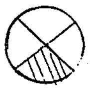
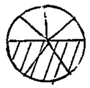
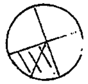
et pour $\frac{3}{4}$: $\frac{3}{4}$ vaut $\frac{1}{3}$!

. Un élève de 6^e pour $\frac{1}{3}$ a dessiné 3 parts de gâteau : 

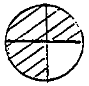
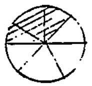
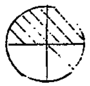
. A noter aussi la confusion entre $\frac{1}{3}$ et 1,3 rencontrée quelquefois en CM_2 et en 6^e.

. Enfin des élèves de CM_2 et de 6^e ne voient dans les écritures $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ et 2,3 qu'un couple de 2 entiers.

Ainsi un élève de CM_2 dessine :

 $\frac{1}{3}$  $\frac{3}{4}$  2,3

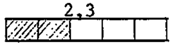
Un élève de 6^e dessine

 $\frac{1}{3}$  $\frac{3}{4}$  2,3

et un autre élève de CM_2 explique :

avec cinq bâtons de chocolat je dois donner

2,3



Dans chaque cas il y a séparation respectivement en une part et 3 parts, 3 parts et 4 parts, 2 parts et 3 parts sans qu'il y ait nécessairement souci d'égalité des parts. C'est une conception qu'on pourrait appeler "juxtaposition de 2 entiers".

b) pour $\frac{3}{4}$

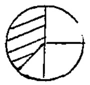
. Les partages inégaux sont plus rares. On les rencontre cependant avec la représentation "baguettes" - Par exemple

 en CM_2

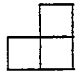
$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$

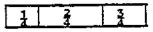
. Pour quelques élèves de 6^e $\frac{3}{4}$ c'est presque tout : 

ou plus de la moitié. Par exemple un élève de CM_2

dessine  et écrit "j'ai colorié ce qu'il a mangé, il lui reste les $\frac{3}{4}$ (il a mangé le quart)".

. Pour d'autres élèves c'est 3 morceaux mais on ne précise pas toujours le tout.

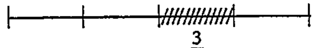
Par exemple 

ou  ou  je coupe les trois quarts du gâteau

. Nous avons déjà signalé la confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$, elle est peut-être à rapprocher de cette conception "3 morceaux".

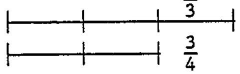
. A noter aussi les élèves qui pour $\frac{3}{4}$ donnent la définition de $\frac{1}{4}$: c'est l'unité partagée en 4 , ou tu partages le gâteau en 4 sans plus de précision.

. Une autre erreur que l'on rencontre plutôt chez les élèves qui ont adopté une représentation de type "baguette" c'est la confusion entre $\frac{3}{4}$ et "le $3^{ième}$ quart" :



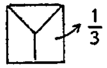
$\frac{3}{4}$

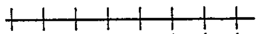
. Un élève de CM_2 écrit : pareil que pour $\frac{1}{3}$ mais je coupe en 4 et j'en prends 3 et dessine



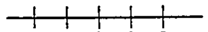
$\frac{3}{3}$ $\frac{3}{4}$

Confusion entre les tiers et les quarts ou entre les barres et les intervalles ?

Pour $\frac{1}{3}$ il avait dessiné  $\frac{1}{3}$ "je coupe en 3 parties égales et je prends un morceau du carré"

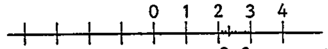
. Un élève de 4^eB a répondu  à la 1^e question

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$

 à la 2^e question et correctement à la 3^e question :

$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{6}$

0 1 2 3 4



$-\infty$ 2,3 $+\infty$

. Deux élèves d'une classe de 6^e interprêtent $\frac{3}{4}$ comme 3,5.

Rappelons les élèves qui ont développé la conception "juxtaposition de 2 entiers" pour les 3 exemples.

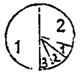
c) pour 2,3

La confusion la plus fréquente est celle entre 2,3 et $\frac{2}{3}$ (16 fois) surtout dans les classes de CM_2 et de 6^e .

. Plusieurs élèves proposent $2 + \frac{1}{3}$: deux unités plus l'unité partagée en 3. Un élève propose $2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

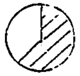
- Une autre représentation est celle par 2 gros bouts et 3 petits. Par exemple une élève de 6^e prend 2 grosses boîtes de thon et 3 petites

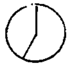
THON THON THON THON THON

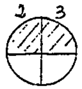
Une élève de CM_2 dessine  et écrit 2 entiers et 3 dixièmes.

- Un élève de 6^e explique "j'ai une galette, je la coupe en 2 parties, j'en prends 1 part plus 3 petits morceaux" et dessine 

3 autres élèves ont des dessins du même type

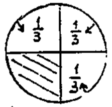
- Une élève de 6^e dessine  et commente "c'est la moitié d'une tarte avec une moitié d'un quart". Pour $\frac{1}{3}$ elle dessine  et écrit un quart

- Certains élèves représentent 2,3 par la moitié ou un peu plus de la moitié  ou  sans commentaire. Faut-il les rapprocher de ceux qui confondent 2,3 et $\frac{2}{3}$ ou de ceux qui considèrent 2,3 comme la moitié plus quelque chose ?

- Une élève fait ce dessin 

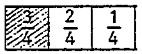
faut-il la rapprocher des élèves déjà signalés qui expriment la conception "2 entiers juxtaposés"; il s'agirait peut-être ici d'un aspect ordinal "le 2^e et le 3^e".

Pour les autres questions cette élève avait dessiné



$\frac{1}{3}$ enlevé

et



- Enfin, beaucoup d'élèves ne font aucune représentation et se contentent de dire 2,3 c'est 2 entiers et 3 dixièmes ou c'est un nombre décimal, il y a une partie entière et une partie décimale. Un élève de 4^e écrit "c'est 2,30 c'est-à-dire 2 + , + 30"

3.1.2 Questions sur les heures

a) réponses correctes

		CM_2A	CM_2B	CM_2C	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	4^eB
Effectif		22	21	26	24	18	21	26	23	19	22
$\frac{1}{4}$	correctes	13	13	22	18	12	19	25	23	13	19
	fournies	15	14	24	20	15	20	26	23	15	19
$\frac{1}{3}$	correctes	8	3	13	1			17	17	5	13
	fournies	10	8	23	13			23	21	9	15
$\frac{1}{5}$	correctes	7	1	15	1	1	5	12	18	4	9
	fournies	10	5	18	13	9	13	22	20	10	12
$\frac{1}{10}$	correctes					2	11				
	fournies					9	15				

Pourcentage des réponses correctes sur les réponses fournies

	CM_2A	CM_2B	CM_2C	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	4^eB
$\frac{1}{4}$	86,7	92,9	91,7	90	80	95	96,2	100	86,7	100
$\frac{1}{3}$	80	37,5	56,5	7,7			73,9	81	55,6	87,7
$\frac{1}{5}$	70	20	83,3	7,7	11,1	38,5	54,6	90	40	75
$\frac{1}{10}$					22,2	73,3				

Pourcentage des réponses correctes sur l'effectif

	CM_2A	CM_2B	CM_2C	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	4^eB
$\frac{1}{4}$	59,1	61,9	86,4	75	66,7	90,5	96,2	100	68,4	86,4
$\frac{1}{3}$	36,4	14,3	50	4,2			65,4	73,9	21,1	59,1
$\frac{1}{5}$	31,8	4,8	50,6	4,2	5,6	23,8	46,2	78,3	26,3	40,9
$\frac{1}{10}$					11,5	52,4				

Les réponses fournies pour $\frac{1}{4}$ sont souvent correctes (au moins 80 % des réponses fournies dans toutes les classes). Dans les classes de CM_2A et CM_2B beaucoup d'élèves n'ont pas du tout abordé la question (1/3 de l'effectif). Il y a également beaucoup de non réponse en 4^eB, surtout pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$. Peut-être est-ce dû pour cette classe au manque de temps (rappelons que dans cette classe les élèves n'ont disposé que de 15 minutes).

Pour les autres questions les réponses correctes sont majoritaires pour les classes de Vélizy (6^eD, 5^e, 4^eB) et pour les classes de CM_2 où il y a eu apprentissage sur les fractions (CM_2C et CM_2A dans une moindre mesure) et dans la classe de 6^eC pour $\frac{1}{10}$ (la réussite chute pour $\frac{1}{5}$ en particulier à cause des élèves qui pensent que $\frac{1}{5}$ est la moitié de $\frac{1}{10}$). Dans les autres cas, moins du quart des élèves donnent une réponse correcte pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ (26,3 % pour $\frac{1}{5}$ en 4^eA).

b) <u>erreurs rencontrées sur cette question</u>

<u>pour $\frac{1}{4}$ h :</u> 3 élèves répondent 45 minutes (dont 2 en 4^eA) confusion $\frac{1}{4}$ et moins $\frac{1}{4}$)

Effectif : 222

3 élèves répondent 40 minutes (appel du 4)
2 élèves répondent 900 minutes (15 x 60)
1 élève de 6^e répond $\frac{1}{4}$ h 14 mn $\frac{1}{3}$ h 13 mn $\frac{1}{5}$ h 15 mn
1 élève de CM_2 répond 840 mn (14 x 60)
1 élève de CM_2 répond 20 mn.

Toutes les erreurs sont en 6^e et CM_2 sauf les deux signalées en 4^e.

N.B. les élèves qui répondent 40 mn pour $\frac{1}{4}$ répondent respectivement 35 mn pour $\frac{1}{3}$ et 1 h 5 mn pour $\frac{1}{5}$; 30 mn pour $\frac{1}{3}$ 15 mn pour $\frac{1}{5}$; 30 mn pour $\frac{1}{5}$ h et 40 mn pour $\frac{1}{10}$.

<u>pour $\frac{1}{3}$ h :</u> Effectif 189.

- 7 élèves répondent 30 minutes (appel du 3)
- 7 élèves répondent 45 mn (cf la confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ ou la conception 3 parties, à la fois pour $\frac{1}{3}$ et pour $\frac{3}{4}$)
- 5 élèves répondent 7 mn 30 (4) ou 8 mn (1) (à rapprocher de la confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{8}$).
- 5 élèves répondent 10 minutes.
- 4 élèves font des erreurs de calcul ou de dénombrement :
  2 élèves répondent 2 minutes (dont une écrit 60 : 3 = 2)
  et 2 élèves répondent 21 après avoir dessiné la pendule graduée en minutes (erreur borne-intervalle).

- 3 élèves répondent 15 minutes (cf la confusion $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{4}$ ou la position du 3 sur la pendule)
- 2 élèves répondent 13 minutes
  + un autre qui répond 690 minutes (60 x 13)
- 1 élève répond $\frac{1}{4}$ h = 15 mn $\frac{1}{3}$ h = 14 mn $\frac{1}{5}$ h = 16 mn
- on trouve encore les réponses 35 mn, 40 mn, 5 mn.

<u>pour $\frac{1}{5}$ h :</u> Effectif 222

- 10 élèves répondent 5 mn + 1 répond 50 mn + 1 répond 300 mn (5 x 60) + 1 répond 50 s.
- 4 élèves répondent 15 minutes + 1 élève répond 1 h 5 mn.
- 9 élèves répondent 30 mn (confusion $\frac{1}{5}$ et 0,5 ?).
- 5 élèves répondent 10 mn.
- 4 élèves répondent 20 mn.
- 4 élèves répondent 25 mn (position du 5 sur la pendule ? hypothèse plausible si on considère que 2 élèves ont fait cette réponse et n'avaient pas à répondre pour $\frac{1}{10}$ et que les 2 élèves qui ont fait cette réponse et qui devaient aussi répondre à la question $\frac{1}{10}$ h ont répondu 50 mn pour $\frac{1}{10}$ h.
  Remarquons que cette réponse est aussi cohérente avec l'idée que $\frac{1}{5}$ est la moitié de $\frac{1}{10}$ et la confusion entre $\frac{1}{10}$ et - 10).
- 2 élèves répondent 3mn (ils ont bien trouvé 6 minutes pour $\frac{1}{10}$ h et ont pris la moitié pour $\frac{1}{5}$.
- 2 élèves de 4^eA ont répondu 75 mn (5 quarts d'heure).
- Autres réponses recueillies une fois chacune,
  60 mn ; 4 mn 30 ; 950 (900 = 15 x 60 ?) ; 16 mn
  45 mn ; 2 mn 30 ; 300 mn ; 22 mn 30 ; 40 mn.

<u>pour $\frac{1}{10}$ h :</u> Effectif 39

- 6 élèves répondent 10 minutes + 1 qui répond 600 mn (60 x 10).
- 2 élèves répondent 50 mn (position du 10 sur la pendule ou - 10 ?)
- 1 élève répond 30 mn, 1 élève répond 40 mn.

3.1.3 Questions sur les sommes

	CM_2A	CM_2B	CM_2C	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	4^eB	$6^eA,B,C$	6^e
Effectif	22	21	26	24	18	21	26	23	19	22	63	89
Rép. fournies	22	18	25	14	14	20	21	20	19	22	48	69
Correct a b c d	0	0	8	1	0	0	0	0	3	12	1	1
Correct a b c	18 *81.8*	10 *55.6*	16 *64*	3 *21.4*	4 *28.6*	2 *10*	12 *57.1*	6 *30*	8 *42*	18 *81.8*	9 *18.75*	21 *30.4*
Correct $\frac{1}{2}$	22 *100*	13 *72.2*	22 *88*	3 *21.4*	5 *35.7*	6 *30*	15 *71.4*	8 *40*	9 *47.5*	21 *95.5*	14 *29.2*	29 *42*
modèle $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$	0	1+(2)	2+(2)	4+(1)	2	9+(1)	4+(4)	6+(4)	1+(1) *10.5*	(1)	17 *35.4*	25 *36.2*
modèle $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	0	2+(1)	1+(1)	0	(1)	(3)	1+(2)	3	7+(3) *52.6*	1	4 *8.3*	7 *10.1*
mélange des 2	0	0	0	1	0	5	1	0	3	0	6	7
somme des nombres	0	0	0	2	1	1+(2)	0	0	0	0	6	6
autres erreurs	0	3	0	4	7	2	6	3	0	6	13	19

A titre indicatif, pour faciliter les comparaisons, nous indiquons dans le bas de la case le pourcentage calculé sur le nombre de réponses fournies.

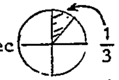
Nous disons que les élèves utilisent le modèle $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ quand ils répondent systématiquement en ajoutant numérateur et dénominateur. Nous disons que les élèves utilisent le modèle $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ quand ils répondent systématiquement en gardant le numérateur 1 et en ajoutant les dénominateurs. Nous indiquons entre parenthèses le nombre d'élèves qui utilisent partiellement un des modèles. Certains utilisent tantôt un modèle tantôt l'autre.

Trois élèves de 6^e (2 en 6^eA et 1 en 6^eC) répondent en faisant systématiquement la somme des nombres figurant au numérateur et au dénominateur, par exemple $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 8$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 7$, $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 24$. Un élève de 6^eB que nous avons compté aussi dans la ligne "somme des nombres" fait un calcul légèrement différent et écrit :

"$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \times (2+2) = 4$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \times (3+3) = 6$; $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 10 \times (1+3) = 40$"

Deux autres élèves de 6^eC, indiqués entre parenthèses, répondent correctement pour $\frac{1}{2}$: "$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$" et font une réponse du même type que la précédente dans les autres cas : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 6$ et $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 40$ pour l'un, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 12$, $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 40$ pour l'autre.

Les autres erreurs consistent parfois en un oubli du dénominateur (par exemple $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2$, $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$) ou des erreurs relevant de conceptions erronées : par exemple $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$ la moitié d'un gâteau, réponse cohérente avec le dessin fourni à la première question  $\frac{1}{3}$

ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ avec  $\frac{1}{3}$. Cette dernière réponse est fournie 4 fois.

Remarquons cependant que les réponses erronées à cette question ne sont pas toujours cohérentes avec les représentations fournies à la première question.

Certaines réponses peuvent correspondre à une évaluation du résultat : par exemple $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{5}$ proposé par un élève de 6^e qui a répondu correctement aux autres questions.

Notons aussi la réponse $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ d'un élève de 5^e et 3 réponses $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ (1 en 6^e et 2 en 4^e).

Remarquons que les élèves de CM_2 ont une meilleure performance que les élèves de 6^e, 5^e, 4^eA pour les questions $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$, $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} =$

Ce n'est pas étonnant puisque dans ces classes il y a eu un apprentissage sur les fractions et les élèves avaient été amenés à ajouter des fractions de même dénominateur. Pour $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, seuls les élèves de CM_2C avaient rencontré des problèmes analogues et plus de 30 % d'entre eux répondent correctement à la question.

Les élèves de 4^eB avaient commencé l'étude des fractions ce qui explique que plus de la moitié d'entre eux répondent correctement à la question, alors qu'aucun élève de 5^e du même établissement ne répond correctement à cette question.

Les élèves de 6^eB et 6^eC n'ont pas eu à donner $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. En revanche, on leur demandait 0,7 + 0,8.

On a le tableau suivant :

	6^eB	6^eC	Total	%
Effectif	18	21	39	
Réponse fournie	12	16	28	
Réponse correcte	3	7	10	35.7
Réponse 0,15	5	8	13	46.4

Les autres réponses fournies sont :

1,6 (2 fois) 15 (1 fois)

"15 petits morceaux de tarte"

4,5 (il s'agit d'un enfant qui a appliqué le modèle "somme de tous les nombres" pour ajouter les fractions).

On voit qu'il y a plus de réponses 0,15 que de réponses 1,5. Mais cette erreur n'est pas significative : il y a des élèves qui ont répondu correctement aux questions plus difficiles et qui ont écrit 0,7 + 0,8 = 0,15.

C'est une question piège, qui attire les erreurs des élèves, mais cette erreur n'est peut-être pas forcément signe d'une mauvaise conception.

moitié de $\frac{1}{100}$

	CM_2A	CM_2B	CM_2C	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	4^eB	6^eABC	total 6^e
Effectif	22	21	26	24	18	21	26	23	19	22	63	89
Réponses fournies	18	11	23	19	15	21	20	19	18	19	55	75
Réponses correctes	1	0	5	1	3	5	7	5	3	7	9 *16.4*	16 *21.3*
Rép $\frac{1}{50}$	9	10	9	11	10	6	7	10	12 *66.7*	9 *47.3*	27 *49.1*	34 *45.3*
Rép $\frac{0,5}{50}$			4	4			2	4	1	2	4	6

Sur les 183 réponses fournies, 93 sont " $\frac{1}{50}$ " .

Plus de la moitié des élèves, tous niveaux confondus font cette réponse. En 4^eA, près des $\frac{2}{3}$ des élèves font cette réponse (12 sur 19); et même en 4^eB, où les résultats aux autres questions sont meilleurs, c'est la réponse de près de la moitié des élèves.

C'est manifestement une question piège. Les réponses $\frac{1}{50}$ ne sont sans doute pas forcément significatives de conceptions erronées.

Les autres réponses fausses sont

$\frac{5}{10}$ (5 fois + 1 fois 0,5) ; $\frac{0}{50}$ (4 fois) ; 50 (3 fois) ; $\frac{5}{100}$ (2 fois) ;

$\frac{50}{100}$ (2 fois) ; $\frac{1}{5}$ (2 fois) ; $\frac{2}{1000}$ (2 fois) et aussi $\frac{2}{200}$; $\frac{1}{1000}$; 0,01 ;

$\frac{1}{10}$; $\frac{1}{1}$; 10 ; $\frac{10}{10}$; $\frac{2}{10}$; $\frac{1,5}{100}$; 2,50 ; $\frac{1}{2}$ + 50 et 64 minutes rencontrées une fois chacune.

Les réponses $\frac{0}{50}$ sont peut-être à rapprocher de $\frac{0,5}{50}$ (la moitié de 1, c'est 0). En effet sur les quatre élèves qui ont fait cette réponse, deux avaient aussi à donner le double de $\frac{1}{100}$ et ont proposé $\frac{2}{100}$, les deux autres n'avaient pas à répondre à cette question.

Dans deux autres classes (6^eB et 6^eC) les élèves ont également répondu aux questions "quel est le double de $\frac{1}{100}$? " "quelle est la moitié de 0,1 ? "

	double de $\frac{1}{100}$				moitié de 0,1				
	Effectif	Rép. fournies	Rép. correctes	$\frac{1}{200}$	$\frac{2}{200}$	Rép. fournies	Rép. correctes	0,01	0,5
6^eB	18	15	5	7		10	2	4	3
6^eC	21	21	4	5	5	20	9	1	4
Total	39	36	9 *25*	12 *33.3*	5 *12.8*	30	11 *36.7*	5 *16.7*	7 *23.3*

On a seulement $\frac{1}{4}$ de réponses correctes pour le double de $\frac{1}{100}$. La réponse la plus fréquente est $\frac{1}{200}$ ($\frac{1}{3}$ des élèves) ce qui est cohérent avec la réponse $\frac{1}{50}$ pour la moitié de $\frac{1}{100}$.

Le nombre des réponses correctes s'élève un peu quand la question est posée sous forme décimale, mais on n'arrive cependant qu'à 11 réponses correctes sur 30 fournies pour la moitié de 0,1. Remarquons un élève qui répond que la moitié de 0,1 est $0,\frac{1}{2}$ (les réponses pour la moitié et le double de $\frac{1}{100}$ sont correctes : $\frac{0,5}{100}$ et $\frac{2}{100}$).

Le fait de poser la question du double en même temps que celle de la moitié n'a pas beaucoup fait changer les points de vue.

Si on compare les réponses des 4 classes de 6^e, les réponses correctes et les réponses $\frac{1}{50}$ sont respectivement (par rapport aux réponses fournies)

	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD	ou en %	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD
correctes	1/19	3/15	5/21	7/20		5 %	20 %	23,8 %	35 %
$\frac{1}{50}$	11/19	10/15	6/21	7/20		57,9 %	66,7 %	28,6 %	35 %

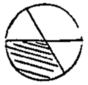
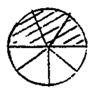
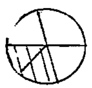
La proportion de réponses correctes est certes plus élevée en 6^eB et 6^eC qu'en 6^eA, mais elle est un peu moins élevée qu'en 6^eD. De toute façon la proportion de réponses $\frac{1}{50}$ est la plus élevée en 6^eB (2/3). Le fait de demander aussi le double de $\frac{1}{100}$ n'a pas aidé les élèves à trouver la moitié de $\frac{1}{100}$. D'ailleurs les réponses aux deux questions sont souvent cohérentes : les élèves appliquent souvent une règle

et son inverse pour les deux questions :	6^eB	6^eC
moitié de $\frac{1}{100} = \frac{1}{50}$ et double de $\frac{1}{100} = \frac{1}{200}$	7	5
deux réponses correctes	3	3
moitié de $\frac{1}{100} = \frac{1}{50}$ double de $\frac{1}{100} = \frac{2}{100}$	2	0

3.1.4 Conclusions

* Pour les fractions la référence spontanée majoritaire et presque unique est celle des parts de tarte.
  Pour les nombres décimaux, il semble qu'aucune représentation correcte ne soit disponible, même en 4^e (à l'exception de quelques élèves de 4^eB), à part celle de la règle en cm et mm. Il faut de plus signaler que dans la classe de 6^eC où 6 élèves l'utilisent, elle a été suggérée par le professeur avant le passage du test.
  Dans les classes de CM_2 où il y a eu un apprentissage sur les petites fractions, la référence est celle de l'apprentissage en CM_2C (cas d'un apprentissage sur une grande période de temps), les représentations "baguettes" et "parts de tarte" apparaissent à peu près également en CM_2A où l'apprentissage a été plus court.
  Pour le CM_2B, le grand nombre de réponses sans dessin ne permet pas de se prononcer.
  Pour les heures, les réponses sont correctes pour ce qui relève de la pratique courante (plus de 80 % des réponses fournies sont justes dans toutes les classes pour 1/4 h.).
  Pour les autres questions ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$) les réponses sont majoritairement correctes dans les 3 classes du collège de V. et dans les classes de CM_2 où il y a eu un apprentissage sur les fractions (exception faite du CM_2B). Notons que dans la classe de 6^eC, plus de la moitié des élèves répondent correctement pour $\frac{1}{10}$ h, mais la réussite retombe pour $\frac{1}{5}$ h parce que $\frac{1}{5}$ est vu comme la moitié de $\frac{1}{10}$.

* Il semble que pour beaucoup d'élèves, seuls les nombres entiers ont vraiment statut de nombre, ce qui fait que ces élèves essaient de se ramener aux entiers et à leurs opérations par des moyens divers.
  - Au moment des représentations, certains élèves ne voient dans les fractions et les décimaux que des entiers juxtaposés. 3 élèves ont des réponses cohérentes dans ce sens :

 $\frac{1}{3}$  $\frac{3}{4}$  2,3

L'élève qui a répondu pour 2,3
"avec 5 bâtons de chocolat je dois donner 2,3

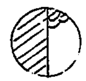
avait écrit pour $\frac{3}{4}$ "avec 4 bâtons de chocolat" 

Peut-être la réponse de cet élève pour 2,3 est-elle le résultat de 2 confusions : la confusion entre 2,3 et 2/3 (cf. ci-dessous) et celle entre "prendre 2 sur 3" et "prendre 2 laisser 3" ?

Les réponses du type "entiers juxtaposés" sont plus fréquentes pour 2,3. Parfois cette juxtaposition est améliorée : on voit 2,3 comme deux grosses unités et trois petites (exemple : 2 grosses boîtes de thon et 3 petites boîtes).

- On observe des confusions entre les codages : $\frac{1}{3}$ vu comme 1,3 et 2,3 comme $\frac{2}{3}$, plus fréquemment dans le deuxième sens que dans le premier, même dans les classes où on peut penser que l'apprentissage a été davantage centré sur les décimaux que sur les fractions.
  On peut se demander si cette confusion n'est pas due à la forme du test. En effet les questions sur les fractions sont en tête, il reste peu de place pour 2,3.

- Une autre erreur qui est peut-être à rapprocher de celle-là est la confusion entre $\frac{1}{5}$ et 0,5 : 9 élèves répondent que $\frac{1}{5}$ heure c'est 30 minutes. C'est peut-être aussi cette confusion qui explique les réponses $\frac{1}{5}$ pour la moitié de $\frac{1}{100}$ (avec en plus oubli du dénominateur).

- Il semble que pour certains des élèves, les écritures proposées ne soient pas des nombres mais des codages d'actions.
  Par exemple pour 2,3 :
  "je coupe en deux et j'ajoute 3 petits bouts" 

  Autre exemple : $\frac{1}{3}$ est confondu avec $\frac{1}{8}$ parce qu'on partage en deux 3 fois de suite
  ou encore $\frac{1}{3}$ est bien un gâteau partagé en 3, mais on ne retient pas l'égalité des parts.

- Dans les représentations, l'erreur qui consiste à représenter $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ par 3 parts est assez peu fréquente (1 seule fois pour $\frac{1}{3}$) mais on retrouve cette erreur très présente quand il s'agit de quantités numériques :
  pour $\frac{1}{5}$ h, 10 élèves répondent 5 mn, un autre 300 mn (5 x 60), 1 élève répond 50 mn, 1 autre 50 s, 4 élèves répondent 15 minutes et 1 élève répond 1 h 5 mn. ce qui fait 18 élèves qui donnent une réponse faisant intervenir 5, 15 ou 50.

130

pour $\frac{1}{3}$ h , 7 élèves répondent 30 minutes et 2 élèves répondent 13 minutes, plus un qui répond 690 minutes (60 x 13).

pour $\frac{1}{10}$h , 6 élèves répondent 10 mm et 1 répond 600 minutes (60 x 10).

et même pour $\frac{1}{4}$ h , 3 élèves avaient répondu 40 mn, 1 élève avait répondu 14 mn (il avait répondu de façon cohérente : $\frac{1}{4}$ h : 14 mn, $\frac{1}{3}$ h : 13 mn, $\frac{1}{5}$: 15 mn) et 1 autre 840 mn (14 x 60).

* Ce désir de se ramener aux entiers et à leurs opérations est encore plus manifeste pour les sommes.
Ainsi la règle spontanée la plus utilisée par les élèves pour ajouter les fractions est d'ajouter les numérateurs d'une part et les dénominateurs de l'autre (plus du tiers des élèves de 6^e). A cet égard il n'y a pas de différence entre la 6^eD et les autres classes de 6^e.

Une autre règle utilisée dans le cas où on ajoute des fractions de numérateurs 1 est de garder ce numérateur 1 et d'ajouter les dénominateurs :

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, peut-être pour rester dans l'ensemble des fractions de numérateur 1.

Elle est moins utilisée que l'autre sauf dans la classe de 4^eA où plus de la moitié des élèves l'utilisent au moins une fois.

3.2. Questions concernant l'ordre et la graduation

3.2.1. Axe gradué

La question concernant l'axe gradué a été proposée en CM_2A, CM_2B, 6^eA, 6^eB, 6^eC en mai ou juin 1984.
L'unité choisie pour la graduation dessinée était de 5 cm

On demandait de placer 2,5 0,8 1,45 1,7 0,62 2,87 1,08

Les résultats ont été les suivants :

	CM_2A	CM_2B	6^eA	6^eB	6^eC	Total 6^e
Effectif total	23	16	24	21	22	67
Ont abordé la question	21	13	23	20	15	58
Tous les points bien placés	1	1	1	0	2	3
Au moins 4 points bien placés	1	1	2	3	3	8
2,5 bien placé	9	3	5	10	5	20
Aucun point marqué	3	4	6	1	3	10
Ordre entièrement correct	4	1	3	1	2	6
Un oubli ou une erreur sur l'ordre	+4	0	+3	+2	+1	+6
Intervalles entiers non respectés	3	3	2	6	0	8
Utilisation des cm , mm	4	3	5	10	3	18

Très peu d'élèves placent correctement tous les points (2 en CM_2 et 3 en 6^e ; 8 élèves de 6^e placent correctement 4 des points). A peine plus du tiers des élèves de 6^e ayant abordé la question placent correctement 2,5 (20/58). Il y en a un peu plus en CM_2A, mais moins en CM_2B.
Certains élèves ne marquent aucun point sur la graduation et se contentent d'écrire les nombres sur l'axe en s'en servant comme d'une ligne, d'autres placent des points mais en ne souciant que de l'ordre. C'est pourquoi nous avons aussi examiné l'ordre proposé par les élèves indépendamment du placement sur la graduation. Cette fois encore les résultats sont meilleurs en CM_2A (8 élèves sur 21 font au plus une erreur) qu'en 6^e (12 sur 58) mais ils sont plus mauvais en CM_2B.
Certains élèves ne placent pas le nombre décimal entre les deux entiers qui conviennent. Cela vient parfois d'une référence abusive aux cm et mm : par exemple ils ont placé 0,62 à 6,2 cm de 0, donc entre 1 et 2.
En 6^e, surtout en 6^eB, un nombre important d'élèves essaie d'utiliser les cm et mm d'une manière ou d'une autre. Remarquons qu'en 6^eA la première réaction des élèves avait été la même, mais nous sommes intervenues le jour de la passation en faisant remarquer aux élèves qu'on ne parlait pas de cm dans le texte.

Les élèves ont plusieurs manières de se référer aux mm. Une première idée est de compter en mm la partie décimale du nombre. Mais ce n'est pas toujours possible (par exemple 2,87). Alors les élèves adaptent leur procédure de plusieurs manières :

- on compte la partie décimale en mm quand c'est possible, sinon on prend tout le nombre en cm : par exemple 1,45 à 45 mm de 1 et 2,87 à 2,87 cm de 2.
- on compte le tout en cm et mm. Par exemple 1,7 à 1,7 cm de 1. Dans ce cas certains élèves traitent de la même manière 1,7 et 1,08 comme s'il s'agissait de 1,8 ; d'autres élèves font un traitement différent : par exemple 1,08 à 8 mm de 1 et 1,7 à 1,7 cm de 1 (ou le contraire).
- on prend la partie décimale en mm quand c'est possible, sinon on divise par 2. (ce qui fait que 0,62 et 2,87 sont bien placés à cause de l'échelle choisie mais que 1,7 ou 1,45 ne le sont pas).
- on divise systématiquement la partie décimale par 2 : une élève de 6^eB a placé 0,8 à 4 mm de 0, 0,62 à 3,1 cm de 0, 1,7 à 3,5 mm de 1, 1,08 à 4 mm de 1, 1,45 à 3,25 mm de 1, 2,5 à 2,5 mm de 2 et 2,87 à 4,35 cm de 2.
  Avec cette procédure tous les nombres qui ont deux décimales sont bien placés mais ceux qui n'ont qu'une décimale sont mal placés.

Cette utilisation de la règle graduée explique peut-être le faible nombre d'élèves qui placent correctement 2,5.

Notons qu'une certaine utilisation de la règle graduée donne un placement correct de 2,5 (à 2,5 cm de 2) - D'ailleurs la classe qui a le plus de 2,5 bien placés (50 %) est aussi celle qui a le plus d'utilisation des cm et aussi celle qui a le plus d'intervalles entiers non respectés.

	CM_2A	CM_2B	6^eA	6^eB	6^eC	Total 6^e
1,08 après 1,7	7	1	5	8	7	20
1,08 avant 1,7	8	5	11	5	5	21
1,45 après 1,7	9	6	14	12	9	35
1,45 avant 1,7	9	2	7	5	4	16
0,62 après 0,8	10	8	15	6	9	20
0,62 avant 0,8	9	1	7	7	3	17
1,08 remplacé par 1,8	3	4	3	5	0	8

Il semble bien que la règle qui consiste à comparer les décimaux qui ont même partie entière selon l'entier formé par leur partie décimale (règle 1 de C. Grisvard et F. Léonard) soit dominante. Elle révèle une conception des décimaux comme couple de 2 entiers. En 6^eA, nous pouvons remarquer l'amélioration de cette règle quand un des nombres a un zéro derrière la virgule (règle 3 de C. Grisvard et F. Léonard) : en 6^eA 1,08 est plus souvent placé avant 1,7 alors que 1,45 est après 1,7 et 0,62 après 0,8.

On trouve cependant aussi quelques élèves qui placent 1,08 après 1,45 (resp. 3, 1, 1, 3, 0) ou 2,5 après 2,87 (resp. 1, 1, 0, 1, 0).

3.2.2. Ordonner 9 nombres décimaux.

$4,12 - 43,25 - 4,54 - 4,02 - 4 + \frac{1}{2} - 4,45 - 40,2 - 4,2 - 40,12 - 43 + \frac{1}{4} - 4,325$

Il y avait en fait onze nombres à ranger dont deux donnés sous forme fractionnaire. Nous ne tenons compte que du rangement des neuf nombres écrits avec une virgule.

Les élèves de CM_2A, CM_2B et 6^eA ont répondu deux fois à cette question (une première fois en décembre 83 ou janvier 84, la deuxième fois en mai ou juin 1984) - Les résultats sont notés avec un indice 1 pour le premier avec un indice 2 pour le 2^e.

La classe de CM_2C a répondu à la même question que les autres en janvier 84 et à une question du même type en juin 84 : il s'agissait d'ordonner 75,02 ; 74,378 ; 73,9 ; 74,4 ; 74,3807 ; 75 ; 74,5 ; 74,3078 ; 74,378002 ; 75,012 du plus petit au plus grand - Nous notons avec des indices 1 et 2 respectivement les réponses à ces deux questions.

Dans le tableau des résultats ci-dessous, nous distinguons les réponses entièrement correctes, les réponses correctes avec un oubli ou une erreur, les règles fausses utilisées : nous appelons "ordre b" le classement obtenu en comparant les parties décimales comme des entiers. Nous distinguons (quand cela est possible) l'ordre b_1 : (ordre b avec $4,02 < 4,2$), l'ordre b_2 (ordre b avec $4,02 > 4,2$), l'ordre b_3 (ordre b avec $4,02 = 4,2$).

Nous appelons "ordre c" le classement obtenu en appliquant la règle "plus la partie décimale est longue, plus le nombre est petit".

Nous appelons "mélange" le classement obtenu en appliquant l'ordre b pour les nombres ayant une ou deux décimales mais en plaçant 4,325 avant 4,54 : par exemple $4,02 < 4,2 < 4,12 < 4,325 < 4,45 < 4,54 < 40,2 < 40,12 < 43,25$, ou même 4,325 avant tous les autres.

Notons que certains élèves utilisent mal le signe < et écrivent toutes leurs inégalités à l'envers, nous les avons classés dans la catégorie qui correspondrait à l'ordre inverse mais nous notons cette mauvaise utilisation.

	CM_2A_1	CM_2A_2	CM_2B_1	CM_2B_2	CM_2C_1	CM_2C_2	6^eA_1	6^eA_2	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	4^eB	CM_2 juin	$6^eA,B,C$ juin
Effectif	22	22	21	16	26	24	24	24	21	21	26	23	19	22	62	68
Réponses fournies	18	16	11	13	24	22	13	23	19	16	16	19	16	12	52	58
Réponses correctes	7	8	4	3	5	8	2	4	3	2	11	13	8	5	19	9
1 erreur	4	1	0	0	2	4	2	0	1	2	5	2	2	5	5	3
ordre b	5	2	4	6	13	8	6	16	13	10	0	2	5	1	16	39
ordre b_1	3	0	3	1	5	/	6	13	4	5	0	1	4	1	/	22
ordre b_2	2	2	1	5	6	/	0	3	3	2	0	1	1	0	/	8
ordre b_3	0	0	0	0	1	/	0	0	5	3	0	0	0	0	/	8
ordre c	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	2	1
mélange	2	0	0	1	2	0	1	2	1	1	0	3	3	1	1	4
autres erreurs	3	3	3	3	4	1	1	0	1	2	0	0	1	1	7	3
non respect partie entière	3	0	0	3	3	2	1	0	4	3	0	0	0	0	5	7
4,02 = 4,02 (≠ 40,2)	0	0	0	0	1	/	0	0	1	0	0	0	0	0	/	1
4,02 = 4,2 = 40,2	0	0	0	0	0	/	0	0	4	2	0	0	0	0	/	6
fractions correctement placées	4	3	2	2	5	/	0	0	1	0	6	7	7	5	/	1
signes entre les n^{bres}	0	2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	3	1
signes à l'envers	0	0	0	2	3	1	1	1	1	0	1	1	0	0	3	2
% au plus une erreur sur effectif	50	40.9	19	18.75	26.9	50	16.7	16.7	18.2	18.2	61.5	65.2	52.6	45.5	38.7	17.6
% ordre b	22.7	9.1	19	37.5	50	33.3	2.5	66.7	59.1	45.5	0	8.7	26.3	4.5	25.8	57.4

Certains élèves n'ont pas compris la question et mettent simplement des signes $<$ ou $>$ entre les nombres écrits sur la feuille dans l'ordre où ils se présentent. Parmi les autres erreurs rencontrées, certains élèves n'ont pas ordonné toute la suite mais ont fait des paquets avec des ordres partiels corrects.
Par exemple : une élève a classé correctement séparément les nombres qui avaient une partie entière de l'ordre de 40 et ceux qui avaient une partie entière 4 et elle a inversé l'ordre des deux paquets ; d'autres élèves ont changé de façon de ranger en cours de classement.

Des élèves ont identifié 4,325 à 43,25 ; d'autres ont placé 4,325 à la fin sans commentaire ; un élève de 4^e a pris les tirets pour des soustractions et a comparé les nombres relatifs situés entre les virgules, deux autres élèves de 4^e ont pris les tirets pour des signes - et ont comparé des décimaux relatifs : (- 43,25 - 4,54 etc.). En $CM_2\ B_1$ 3 élèves n'ont pas ordonné mais ont transformé les décimaux en écriture fractionnaire par exemple $4,12 = \frac{412}{100}$, ce qui était un exercice fait récemment en classe.

Dans les deux dernières lignes nous donnons le pourcentage d'élèves faisant au plus une erreur et le pourcentage d'élèves utilisant l'ordre b . Les calculs sont faits sur l'effectif total de la classe

Nous constatons une meilleure réussite et une plus faible utilisation de la règle b dans les classes témoin de Vélizy (6^eD, 5^e, 4^eB). En 4^eB le faible pourcentage de réussite est dû au nombre élevé de non réponse (10 sur 22) qui s'explique par le manque de temps (rappelons que les élèves ne disposaient que de 15 minutes).
On constate la progression des CM_2C entre janvier et juin (en janvier l'écriture à virgule venait d'être introduite dans la classe et n'avait pas été beaucoup utilisée). On retrouve la différence entre les CM_2A et les CM_2B déjà constatée sur d'autres questions. Les CM_2A et les CM_2C qui ont eu un apprentissage sur les petites fractions et sur la graduation ont une meilleure réussite que les élèves de 6^eA, 6^eB, 6^eC.

L'ordre c est très peu utilisé et quand il l'est, c'est souvent en cohabitation avec l'ordre b (mélange). L'ordre b est très utilisé, surtout dans les classes de 6^eA, 6^eB, 6^eC. Remarquons qu'il régresse entre janvier et juin dans les classes de CM_2A et CM_2C où la réussite est meilleure.

En ce qui concerne le traitement des fractions, nous nous contenterons de quelques remarques :

. Un élève de CM_2C interprête $4 + \frac{1}{2}$ comme $4 + \frac{1}{2}$ dixième et $43 + \frac{1}{4}$ comme $43 + \frac{1}{4}$ dixième.

. Une élève de CM_2 remplace $43 + \frac{1}{4}$ par 47 et un élève de 6^e remplace $43 + \frac{1}{4}$ par $\frac{1}{47}$ et $4 + \frac{1}{2}$ par $\frac{1}{6}$

- Un élève de 4^e interprête $43 + \frac{1}{4}$ comme 11,25 (43 : 4 avec erreur de calcul ?) et $4 + \frac{1}{2}$ comme 2
- Plusieurs élèves remplacent $4 + \frac{1}{2}$ par 4,12 et/ou $43 + \frac{1}{4}$ par 43,15
- D'autres interprétent $43 + \frac{1}{4}$ comme 43,025 et $4 + \frac{1}{2}$ comme 4,05.

Est-ce l'une ou l'autre de ces interprétations qu'il faut faire pour les élèves qui placent $4 + \frac{1}{2}$ tout au début ou $43 + \frac{1}{4}$ avant 43,25 sans faire de commentaire ?

3.2.3. Intercalation.

Dans cette question, il s'agit de fournir 3 nombres compris entre deux donnés.
Dans la première version du test, il y avait deux questions avec des bornes entières, nous les avons supprimées dans la version suivante et nous n'avons pas tenu compte des réponses à ces questions : quand les bornes sont entières, beaucoup d'élèves comprennent la question "peux-tu citer 3 nombres entre 1 et 3" comme "peux-tu citer 3 nombres entiers entre 1 et 3". C'est sans doute le même phénomène lié au contrat didactique et aux habitudes qui explique en partie la réussite légèrement meilleure aux deux dernières questions (entre 1,5 et 1,6 ; entre 1 et 1,1) qu'aux deux premières (entre 1,8 et 2,1; entre 1,5 et 1,8) : les élèves sortent plus facilement des nombres à une décimale quand ils y sont obligés; quand ils peuvent donner une réponse avec des nombres à une décimale certains élèves ne fournissent que ceux-là : entre 1,5 et 1,8 il y a 1,6 et 1,7.

D'autre part certains des types d'erreurs rencontrées expliquent une moins bonne performance pour la première question (erreur E_1) ou une meilleure performance à la quatrième question (erreur E_2)

<u>Types d'erreurs rencontrées.</u>

E_1 : cette erreur résulte de la conception "2 entiers" des nombres décimaux et correspond au type d'ordre b vu à la question précédente :
entre 1,8 et 2,1 on intercale 1,9 ; 1,10 ; 1,11... 1,78...
Cette erreur est présente dans toutes les classes de CM_2 et 6^e

E_2 : intercaler un zéro derrière la virgule pour rester proche d'un nombre donné : par exemple entre 1,3 et 1,4 il y a 1,03 ; 1,003 ou 1,04 ; 1,004...
Cette erreur, que nous n'avions pas prévue, est présente dans toutes les classes et très importante dans certaines (6^eA)

E_3 : ajouter un zéro à la fin : entre 1,6 et 1,8 il y a 1,7 ; 1,70 ; 1,700 avec la même idée d'avoir des nombres proches d'un nombre donné.

E_4 : rester dans les nombres à une décimale ou répondre que c'est impossible.
Erreur présente dans toutes les classes; c'est la réponse majoritaire dans certaines.
Cette erreur ne signifie pas que l'élève ne connait pas de nombres avec plusieurs chiffres derrière la virgule, mais il ne les mobilise pas dans ce contexte. Nous avons déjà signalé l'effet possible du contrat didactique : la question étant posée avec des nombres avec 1 chiffre derrière la virgule, des élèves ne trouvent pas licite de sortir de cette catégorie de nombres pour la réponse.

E_5 : "débordement proche" : on donne des valeurs proches mais du mauvais côté de l'intervalle : par exemple entre 1,6 et 1,8 il y a 1,87
entre 1 et 1,1 on a 1,11.

E_6 : erreur qu'on ne rencontre qu'entre 1 et 1,1 : oubli du zéro. Des élèves qui ont des réponses justes aux autres questions proposent 1,9 ; 1,8 ; 1,7 ou 1,99 ; 1,83 ; 1,85 entre 1 et 1,1. Quand les élèves proposent 1,12 ; 1,13 ou 1,2 ; 1,3... il n'est pas facile de savoir si c'est une erreur E_5 ou E_6. Nous l'avons comptée E_5 dans le 1er cas, E_6 dans le 2e.

E_7 : oubli de la partie entière. Cette erreur se rencontre surtout en CM_2C pour les élèves qui ont répondu avec des fractions.

Signalons une autre erreur rencontrée quelquefois (4 élèves de 4 classes différentes) : les questions sur les décimaux ont été comprises comme deux questions sur les entiers : par exemple, une élève de 4^e répond :

entre 1,8 et 2,1 : oui 2,3,4 et non
entre 1,5 et 1,8 : oui 2,3,4 et oui 2,3,4
entre 1,5 et 1,6 : oui 2,3,4 et oui 2,3,4
entre 1 et 1,1 : non et non.

Les élèves de CM_2A, CM_2B, 6^eA ont répondu deux fois à la question à 5 mois d'intervalle ; nous notons les réponses successives avec un indice 1 ou 2.

Les élèves de CM_2C ont passé la 1ère version du test en janvier. En juin, ils ont répondu à une question différente portant sur le même sujet (voir texte en annexe). Nous notons avec un indice 2 le résultat à cette deuxième épreuve.

Nous n'avons pas tenu compte de la question "entre 74 et 75" pour les raisons signalées plus haut, même si les habitudes de la classe permettaient de penser que l'effet de contrat ne jouerait pas de la même manière; il y a cependant des élèves de cette classe qui ont répondu qu'il n'y avait aucun nombre entre 74 et 75 et qu'il y en avait plusieurs dans les autres cas. D'autre part on ne demandait pas de fournir 3 exemples; certains élèves n'en ont fourni qu'un ou même pas du tout. Les réponses à ce questionnaire sont donc difficilement comparables aux autres et les types d'erreur ne sont pas toujours repérables.

Pour les réponses au premier test, dans cette classe, elles sont le plus souvent données sous forme de fractions et quelquefois avec un mélange des deux codages : par exemple entre 1,5 et 1,8 il y a $1{,}5\,\frac{1}{2}$; $1{,}5\,\frac{1}{4}$; 1,6 ...
entre 1 et 1,1 il y a $1{,}\frac{1}{4}$; $1{,}\frac{2}{3}$ ... Ceci explique que les erreurs soient différentes.

Rappelons que ces élèves avaient beaucoup travaillé sur les fractions et que la notation à virgule était d'introduction très récente dans la classe.

		CM_2A_1	CM_2A_2	CM_2B_1	CM_2B_2	CM_2C_1	CM_2C_2	6^eA_1	6^eA_2	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	4^eB	$6^eA,B,C$ juin 84
Effectif		22	23	21	16	26	24	24	24	18	21	26	23	19	22	63
Réponses fournies		21	22	17	15	22	24	21	24	17	21	25	22	18	21	62
Tout correct		2	5	1	4	5	4	2	8	0	5	13	12+1	7+2	16+1	13
1 erreur		0	4	0	1	1		0	1	0	1	4	4	1	1	2
E_1		5	4	3	4	4	4	8	7	3	3	1	0	1	0	13
E_2		4	1	1	3	2	0	7	8	2	2+2	1	1	2	2	14
E_3		6	3	2	2	1	0	3	3	5	3	1	0	0	0	11
E_4		8	8	11	6	3	7	9	3	10	7	6	2	5	3	20
E_5		3	1	1	1	1	2	0	2	1	2	2	2	0	0	3
Autres (*)		6	9	6	1	11	4	5	5	2	6	3	5	1	1	13
E_1 seul		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_2 seul		2	1	1	2	0		2	3	1	1	0	1	2	1	5
E_3 seul		0	0	0	0	0		1	0	1	1	0	0	0	0	2
E_4 seul		1	3	5	2	1	5	4	0	6	5	4	2	4	2	11
Réponses sans erreur	a	5	9	1	5	8		5	14	3	10	18	19	11	19	
	b	6	11	2	6	10		4	12	0	9	17	18	11	17	
	c	12	15	2	7	9		7	12	0	12	18	18	10	18	
	d	7	11	2	8	9		12	15	1	12	14	17	12	19	

(*) il s'agit d'élèves ayant fait des erreurs autres que E_1, E_2, E_3, E_4, E_5

Dans les classes de 5^e et 4^e nous avons ajouté dans la ligne"tout correct"les élèves qui ont répondu à toutes les questions sans erreur mais en donnant moins de trois exemples, quelquefois un seul.

Nous comptons que les élèves ont fait une seule erreur quand ils ont fait un seul type d'erreur à une seule question.

En classe de 6^eC, deux élèves ont intercalé un 1 au lieu d'un 0 : entre 1,3 et 1,4 il y a 1,135 .... Nous les avons ajouté aux deux élèves qui font l'erreur E_2.
L'erreur E_1, importante dans les classes de CM_2 et les classes de 6^eA, B, C, ne se trouve presque pas en 6^eD, 5^e, 4^e. Dans ces dernières classes, on ne trouve pratiquement pas l'erreur E_3 non plus; il en est de même en CM_2C.
L'erreur E_2 se trouve dans toutes les classes mais elle est surtout importante en 6^eA : peut-être y-a-t-il eu un phénomène de diffusion qui l'a aggravée dans cette classe.
L'erreur E_4 est présente dans toutes les classes; elle correspond à la difficulté des élèves à mobiliser des décimaux avec plus de décimales que ceux qui sont dans le texte (cf. [I]).

Les erreurs E_1 et E_3 semblent correspondre aux plus mauvaises représentations des décimaux : les élèves qui font ce type d'erreur en font en général un autre (aucun élève ne fait que l'erreur E_1) alors que ce n'est pas le cas pour E_2 et E_4. Les élèves de 5^e et 4^e qui font l'erreur E_2 ou E_4 ne font pour la plupart que celle-là. Plus de la moitié des élèves de 6^e qui font l'erreur E_4 ne font que celle-là.

Dans la dernière ligne nous donnons les réponses sans erreur fournies à chacune des questions. Nous comptons les réponses avec moins de trois exemples à condition que soient fournies des nombres à deux décimales pour au moins deux des cas. Par exemple, nous ne comptons pas comme réponse correcte en a : 1,9 ; 2 si en c et d on répond impossible, mais nous comptons cette même réponse correcte si en c et en d on fournit une réponse correcte.

Dans les deux CM_2 A et B les résultats s'améliorent entre les deux passations, avec toujours un retard pour le CM_2 B.

Les mauvais résultats de la classe de 6^eB s'expliquent par le grand nombre de réponses "impossible".

3.2.4. Cohérence entre les réponses sur l'ordre.

Nous avons comparé les réponses des élèves aux questions portant sur l'ordre, l'intercalation, la graduation. Pour l'ordre et l'intercalation, nous ne tenons pas compte des classes de CM_2C (en janvier l'écriture à virgule n'était pas maîtrisée, en juin ce n'est pas la même épreuve) et de 4^eB (trop grand nombre d'absence de réponse à la question de l'ordre par manque de temps : les 11 élèves qui ont répondu correctement à l'une seulement des deux questions sont tous des élèves qui n'ont pas du tout répondu à l'autre). Pour les autres CM_2 et la 6^eA, ce sont les résultats de juin qui ont été pris en compte.

Nous notons 0 (resp I) les élèves qui n'ont fait aucune erreur sur l'ordre (resp. sur l'intercalation) $\overline{0}$ (resp. $\overline{I}$) les autres.

Par classe nous avons :

	CM_2A	CM_2B	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	Total	4^eB
0 I	4	2	1	0	2	8	11	6	34	8
0 $\overline{I}$	4	1	3	3	0	3	2	2	18	1
$\overline{0}$ I	1	2	7	0	3	4	3	3	23	10
$\overline{0}$ $\overline{I}$	14	11	13	15	16	11	7	8	95	3

Soit

	0	$\overline{0}$
I	34	23
$\overline{I}$	18	95

Si l'on compte dans 0 et I les élèves ayant fait au plus une erreur, cela donne :

	0	$\overline{0}$
I	46	24
$\overline{I}$	19	81

On voit que la cohérence est surtout assurée par la négative (grand nombre d'élèves ne réussissant aucune des deux questions), et que la cohérence est meilleure dans les classes où les résultats sont meilleurs (6^eD - 5^e - 4^e). En 4^eB elle est totale pour les 11 élèves qui ont répondu aux deux questions (8 ont des réponses correctes aux deux questions, 3 font des erreurs aux deux questions).

Si l'on compare les résultats sur la graduation à ceux sur l'ordre et l'intercalation, on obtient, pour les 5 classes concernées (CM_2A, CM_2B, 6^eA, 6^eB, 6^eC).

	G.O.	G.$\overline{0}$.	$\overline{G}$.O.	$\overline{G}$.$\overline{0}$.	G.I.	G.$\overline{I}$.	$\overline{G}$.I.	$\overline{G}$.$\overline{I}$.
CM_2A	1	0	7	15	0	1	5	17
CM_2B	1	0	2	13	1	0	3	12
6^eA	1	0	3	20	2	0	6	16
6^eB	2	1	2	16	0	3	0	15
6^eC	2	0	0	20	2	0	3	17
Total	7	1	14	84	5	4	17	77

où nous désignerons par G (resp. 0, resp. I) les élèves ayant placé correctement la plupart des nombres sur l'axe gradué (resp. n'ayant fait aucune erreur sur l'ordre, resp. sur l'intercalation)

ce qui donne au total

	G	$\overline{G}$
0	7	14
$\overline{0}$	1	84

	G	$\overline{G}$
I	5	17
$\overline{I}$	4	77

(*)

Là encore, la plupart des élèves font des erreurs dans les deux exercices. La tâche de graduation est très peu réussie et on aurait pu attendre que les élèves qui la réussissent aient de bons résultats sur l'ordre et l'intercalation.

Un seul élève (en 6^eB) réussit la graduation et pas l'ordre : il place à peu près correctement tous les points sauf 1,08 mis à la place de 1,8. Pour l'ordre il a écrit aussi 4,02 = 4,2 et utilisé l'ordre b (comparaison des parties décimales comme des entiers) mais en mettant 4,325 tout à la fin.

Quatre élèves réussissent la graduation et pas l'intercalation :

- un élève de CM_2A qui ne fait qu'une erreur sur la question concernant l'intercalation : entre 1,3 et 1,4 il propose 1,35 - 1,50 - 1,55 ; aux autres questions il avait répondu respectivement 2 - 1,9 - 1,95 ; 1,7 - 1,75 - 1,755 ; 1,05 - 1,06 - 1,08.
- trois élèves de 6^eB :
  . celui qui a réussi la graduation et pas l'ordre
  . un élève qui réussit graduation et ordre (y compris $4 + \frac{1}{2}$) mais répond impossible pour l'intercalation.
  . un élève qui réussit la graduation et l'ordre (en oubliant toutefois 4,02) et qui fait l'erreur E_3 : ses réponses sont respectivement 1,9 - 1,90 - 2,00 ; 1,7 - 1,70 - 1,700 ; 1,30 - 1,300 - 1,3000 ; 1,0 - 1,00 - 1,000 aux quatre questions sur l'intercalation.

(*) L'effectif des élèves ayant réussi la graduation est trop faible pour que ces résultats soient significatifs. Nous donnons cependant des précisions pour les élèves qui ont réussi un des exercices et pas l'autre.

Un nombre assez important d'élèves réussit l'ordre ou l'intercalation sans réussir le placement sur l'axe gradué : il s'agit probablement d'élèves qui ont des règles de comparaison correctes pour les nombres décimaux, mais sans lien avec la mesure des longueurs.

Signalons un cas particulier : un élève de 6^eA, étranger nouvellement arrivé en France; il faisait partie de la classe d'initiation au Français et ne rejoignait la 6^eA que pour le cours de mathématiques. Cet élève a une bonne connaissance des fractions : ses réponses sur les fractions sont toutes correctes, y compris les sommes, mais ces connaissances ne sont pas reliées avec l'écriture à virgule des nombres décimaux. Sur la graduation, il place correctement 0,62 ; 1,45 ; 2,5 ; 2,87 mais il place 0,8 à 8mm de 0 ; 1,08 très près de 1 et 1,7 à 5mm de 1. Peut-être les placements corrects ne sont-ils qu'une adaptation de l'usage de la règle graduée comme cela est manifeste sur d'autres copies. Pour l'ordre il répond avec la règle b_1 (comparaison des parties décimales comme des entiers avec 4,02 < 4,2). Il répond correctement à la question sur l'intercalation mais en mélangeant l'écriture à virgule et les fractions : par exemple $1,6\frac{1}{2}$; 1,7 ; $1,7\frac{1}{2}$ entre 1,6 et 1,8.

En tout 4 élèves sur 103 répondent correctement aux 3 questions graduation, ordre, intercalation : un élève de CM_2B qui n'a aucune erreur dans tout le test, un élève de 6^eA, 2 élèves de 6^eC.

3.2.5. Conclusions sur l'ordre.

Nous retrouvons l'utilisation importante de la règle 1 de C. Grisvard et F. Léonard (ordre b), un peu la règle 3 (l'ordre b_1 est un peu plus utilisé que l'odre b_2), mais pratiquement pas d'utilisation de la règle 2 (ordre c) sauf en cohabitation avec la règle 1 (mélange).
Nous retrouvons également la difficulté pour les élèves à produire des réponses avec des nombres ayant plus de décimales que ceux qui sont proposés dans le texte. Cette difficulté est repérée par M.L. Izorche chez des élèves de 2^eA B [I].
Les résultats sur les questions concernant l'ordre et l'intercalation sont meilleurs dans les classes témoin de Vélizy, mais ils sont aussi meilleurs dans les CM_2 A et C que dans les 6^e A, B, C. Il semble donc que le travail fait en CM_2 sur la mesure des longueurs et l'utilisation des fractions ait pu aider les élèves à se faire une représentation des nombres non entiers qui les aide dans les tâches de comparaison, et ceci bien que le placement de nombres sur un axe gradué soit encore très mal réussi.
Il semble que les élèves aient très peu de représentations disponibles, en particulier sur les nombres décimaux et qu'ils travaillent plutôt avec des règles de calcul purement numériques. Ces règles numériques peuvent être correctes et bien fonctionner (voir les élèves qui réussissent l'ordre et l'intercalation et pas la droite graduée) mais avec des règles purement numériques les élèves ne disposent d'aucun moyen de contrôle, ce qui laisse place à des dérapages, par exemple retour aux règles utilisées dans les entiers en considérant le décimal comme un couple de deux entiers. La représentation par une règle graduée en cm et mm fonctionne pour des nombres qui ont un chiffre derrière la virgule mais les enfants ne savent pas l'adapter quand l'unité ne fait pas 1 cm. Il semble toutefois qu'un certain nombre d'élèves aient l'idée qu'on peut trouver des nombres décimaux proches d'un décimal donné mais avec une procédure inadaptée pour les produire (erreurs E_2 E_3).

3.3. Résolution des problèmes

3.3.1. Problème des œufs.

Ce problème a été posé sous différentes formes (voir textes en annexe). Dans la première version proposée aux 6^eA en décembre 83, les rangements pour la première question étaient par douze. Très peu d'élèves ont abordé le problème. Les calculs étaient un peu longs et dans les versions suivantes nous avons proposé des rangements par 6.
Dans les dernières versions (proposées en juin 84 aux CM_2A, CM_2B, 6^eA, 6^eB, 6^eC) nous avons adopté une présentation plus aérée qui sépare les deux questions du problème et nous avons modifié les valeurs numériques pour qu'il ne reste pas d'oeufs isolés dans le rangement par boîtes de 10 de la deuxième question.

Ce problème comporte deux parties. Dans la première partie il s'agit d'un problème multiplicatif : on donne le nombre de caisses, cartons et boîtes remplis et on demande le nombre d'oeufs emballés. Dans la deuxième partie, il s'agit de faire des groupements par dix à partir du nombre d'oeufs trouvés à la première question : la connaissance de la numération en base 10 permet de donner la réponse sans calcul. Les questions ne sont pas indépendantes : un élève ne peut aborder la deuxième question s'il n'a pas un nombre d'œufs à proposer à la première.
En revanche il peut répondre correctement à la deuxième question même si sa réponse à la première question est fausse : nous prenons comme donnée de la deuxième question le nombre d'oeufs trouvé à la première.
Pour les classes à qui l'on a proposé deux fois ce problème (CM_2A, CM_2B, 6^eA), nous prenons les résultats de la deuxième passation : la première fois, très peu d'élèves avaient abordé ce problème placé en fin de test.
Pour traiter la première partie, deux procédures observées mènent au résultat correct :

- calcul du nombre d'œufs par boîte, carton, caisse, puis multiplications et additions nécessaires. Par exemple avec les dernières données (50 caisses, 3 cartons, 2 boîtes et rangement par 6), cela donne :
  6 œufs par boîte, 36 oeufs par carton, 216 oeufs par caisse puis
  (50 x 216) + (3 x 36) + (2 x 6)
- calcul du nombre d'œufs dans les boîtes, dans les cartons, dans les caisses avec, pour les caisses par exemple, un calcul du genre :

  nombre de cartons : 50 x 6 = 300
  nombre de boîtes : 300 x 6 = 1800
  nombre d'œufs : 1800 x 6 = 10800

  puis addition finale.

Certains élèves, adoptant l'une ou l'autre de ces deux procédures ne terminent pas le problème, par exemple ils s'arrêtent avant l'addition finale ou ils ne comptent que les œufs dans les caisses.

Dans le tableau qui suit, nous appelons réussite partielle au I, une procédure correcte avec erreur(s) de calcul, ou une procédure correcte non terminée telle que nous venons de la décrire. Les autres procédures observées sont les suivantes :

(c) il manque des multiplications par 6 :
par exemple (2 x 6) + (3 x 36) + (50 x 6) ou (2 x 6) + (3 x 6) + (50 x 36)
ou (2 x 6) + (3 x 36) + (50 x 36).
Parmi celles-là nous distinguons la procédure (c_2) où l'élève ne multiplie qu'une fois par 6 qu'il s'agisse de boîtes, de cartons ou de caisses : (2 x 6) + (3 x 6) + (50 x 6)

(d) multiplications enchaînées : le plus souvent 6 x 2 = 12, 12 x 3 = 36, 36 x 50 = 1800.
On trouve aussi 2 boîtes : 12 œufs ; 3 cartons 3 x 36 = 108 œufs ; 50 caisses 50 x 108 = 5400, avec parfois une addition finale.
Certains élèves font d'autres calculs à partir des données ou donnent des réponses sans explication; certains même donnent une réponse qui n'est pas un nombre d'oeufs. Nous les regroupons dans la catégorie : autres réponses.

Pour la deuxième partie, à partir du nombre d'oeufs trouvé à la première question, nous avons considéré comme correctes deux sortes de réponse : celle qui répond exactement à la question posée et celle qui est directement issue de la numération.
Par exemple, pour 1974 oeufs nous avons considéré comme correctes :
réponse 1 : 1 caisse, 19 cartons, 197 boîtes (ou 198 boîtes)
réponse 2 : 1 caisse, 9 cartons, 7 boîtes (ou 8 boîtes).

	CM_2A	CM_2B	CM_2C	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	4^eB	CM_2	C^eABC	CM_2 + 6^eABC	6^eD + 5^e+4^e	total
Ont abordé le I	20	14	22	22	18	19	13	12	15	9	56	59	115	49	164
Réussité total au I	1	2	4	6	0	6	2	5	9	3	7	12	19	19	38
Réussite partielle* au I	3	5	9	11	7	9	10	8	12	6	17	27	44	36	80
Procédures c	10	6	7	4	10	5	1	1	1	0	23	19	42	3	45
Procédures c_2	5	1	4	2	7	2	1	0	0	0	10	11	21	1	22
Procédures d	3	2	0	6	0	1	1	1	0	1	5	7	12	3	15
Autres réponses	6	1	6	1	1	5	1	2	1	2	13	7	20	6	26
Ont abordé le II	11	9	12	14	12	6	7	4	9	3	32	32	64	23	87
Réussite totale au II	0	1	0	6	1	3	7	1	7	2	1	10	11	17	28
Réussite partielle* au II	3	5	4	6	1	3	7	3	9	3	12	10	22	22	44
Procédures b	3	1	2	3	3	1	0	1	0	0	6	7	13	1	14
Autres réponses	4	3	6	4	8	2	0	0	0	0	13	14	27	0	27
Réussite I. II	0	0	1	2	1	1	5	1	6	2	1	4	5	14	19
% réussite totale I	5	14.3	18.2	27.3	0	31.6	15.4	41.7	60	33.3	12.5	20.3	16.5	38.8	23.2
% réussite partielle I	15	35.7	40.9	50	38.9	47.4	76.9	66.7	80	66.7	30.4	45.8	38.3	73.5	48.8
% réussite totale II	0	11.1	0	42.9	8.3	50	100	25	77.8	66.7	3.1	31.2	17.2	73.9	32.2
% réussite partielle II	27.3	55.6	33.3	42.9	8.3	50	100	75	100	100	37.5	31.2	34.3	95.6	50.6

* nous voulons dire réussite au moins partielle.

Pour la réussite I.II nous comptons les élèves qui ont réussi les deux questions jusqu'au bout avec éventuellement des erreurs de calcul.

Les réponses correctes des élèves ont le plus souvent été du deuxième type. Certains élèves qui donnent des réponses du premier type les donnent avec décimales.

Nous appelons réponses partiellement correctes celles qui ne donnent que le nombre de caisses ou celles qui font une erreur d'ordre de grandeur : par exemple pour 1974 oeufs on répond 19 caisses, 7 cartons, 4 boîtes. Certains élèves calculent le nombre d'œufs par carton et par caisse et s'arrêtent (b).

Les autres réponses mélangent parfois les deux parties du problème ou donnent un résultat faux sans justification, ou un résultat numérique sans précision, ou même un nombre d'œufs.

Nous voyons qu'au niveau de la réussite au I, pour les élèves ayant abordé la question, il y a trois groupes : les CM_2 d'une part; les 6^eA, B, C d'autre part; les 6^eD, 5^e, 4^e enfin, avec, dans le groupe des CM_2, une réussite plus faible pour le CM_2A, dans le groupe des 6^eA, B, C une réussite plus faible pour la 6^eB.

Il semble que les procédures c soient d'autant moins nombreuses que la réussite de la classe est meilleure. Les procédures c et d disparaissent presque totalement à partir de la 6^eD. Dans les classes de 6^eD, 5^e, 4^eB, le problème n'a été abordé que par la moitié des élèves, moins en 4^eB (voir les conditions de passage).

Il faut donc prendre avec prudence les meilleurs résultats de ces classes. En 4^eA, la première partie a été traitée par 15 élèves sur 19 avec une réussite totale de 60 % d'entre eux et une réussite partielle de 80 %.

La deuxième partie a été peu abordée (au plus la moitié des élèves). Une des raisons est sans doute qu'il fallait partir des résultats obtenus à la question précédente. La différence de performance n'est pas grande entre les CM_2 et les 6^eA, B, C ; mais elle est grande avec les 6^eD, 5^e, 4^e : dans ces classes presque toutes les réponses obtenues sont correctes, au moins partiellement. Il est vrai que seulement un quart des élèves de ces classes ont abordé cette question.

Sur les résultats globaux des classes, il semble toutefois qu'il puisse y avoir une corrélation entre la réussite aux questions sur les décimaux et la réussite à un problème de ce type.

Une analyse détaillée permettrait de voir si ce sont bien les mêmes élèves qui réussissent les questions sur l'ordre des décimaux par exemple et le problème sur les œufs.

3.3.2. Problème des âges

Dans la première version du test, ce problème était donné en deux temps : au recto de la feuille la première partie du texte, sans donnée d'âge; au verso la donnée de l'âge du père.

Nous espérions de cette façon distinguer entre les élèves qui répondent à la première partie de la question sans connaître les âges et ceux qui ne peuvent répondre qu'en calculant les âges. Dans la plupart des cas nous avons en effet pu reconstituer la procédure des élèves, soit grâce à leurs explications, soit par l'ordre des réponses : calcul d'âges d'abord, réponse à la première question ensuite, et la position de cette réponse (au verso). Toutefois, dans neuf cas, nous n'avons aucun renseignement sur la procédure qui a pu amener la réponse correcte. De plus, les calculs entrepris à partir des valeurs numériques fournies sont le plus souvent corrects. C'est pourquoi, dans la deuxième version du test proposée en 6^eB et 6^eC, nous n'avons gardé que la première partie du texte, sans valeur numérique.

Les élèves de CM_2C ont eu la première version en deux temps : le recto un jour et le verso le lendemain. Ils se sont donc trouvés dans la même situation que les 6^eB et 6^eC.

Certains élèves ne répondent pas à la question posée et ne font que des calculs d'âge, même dans le cas où aucun âge n'était donné : ils font alors une hypothèse sur l'âge de Martine.

Quatre élèves (2 en CM_2, 1 en 6^e, 1 en 4^e) ne comprennent pas la question posée et répondent par une différence d'âge : "le grand père a 54 ans de plus que le petit frère".

Parmi les réponses erronées, la plus fréquente est "6 fois" : 11 élèves font cette réponse (3 en CM_2, 7 en 6^e, 1 en 5^e). On rencontre aussi "5,5 fois" (2 élèves) "7 fois : 5 + 2" (2 élèves) "9 fois : 5 + 3 + 1" (2 élèves) et 7 autres réponses variées.

Parmi les procédures adoptées, nous pouvons en distinguer 3 :

- une procédure que nous qualifions d'algébrique qui peut être explicite (pour 6 élèves de 4^eB et un de 5^e), avec emploi de lettres, par exemple
  $m = 2\ f \quad gp = 5\ m \quad gp = 10\ f.$
  ou implicite : "il faut multiplier 5 fois par 2".
- essai de valeurs numériques : on fait une hypothèse sur l'âge de Martine et on calcule les autres âges.
- utilisation des valeurs numériques données. Cette procédure ne peut pas apparaître en CM_2C, 6^eB, 6^eC.

Quelques élèves de 6^e donnent des âges plausibles sans rapport avec les renseignements fournis. Un élève de 6^eC avait fourni la réponse correcte avec calcul d'âges en supposant que Martine avait 10 ans. Il a barré, choisi d'autres âges (M : 14 ans, F : 12 ans, P : 42 ans, G.P. : 70 ans) en faisant 2 ans de moins pour le frère et a conclu "6 fois".

	CM_2A	CM_2B	CM_2C	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	4^eB	Total
Pb. abordé	18	12	17+4	23	14	16	24	19	18	20	185
Calcul âges seul	9	4	1	3	2	1	3	1	2	2	28
Rép. correctes	5	6	13+2	11	8	8	19	16	13	16	117
"6 fois"	1	0	2	4	1	1	1	1	0	0	11
Proc. algébrique	1	2	7	1	3	0	7	7	6	10	44
Essai valeurs	1	0	10	0	8	5	1	1	1	2	26
Valeurs données	5	4	/	9	/	/	9	9	8	4	48
Ages corrects	10	7	15	13	/	/	22	17	13	18	115
% rép. correctes	27.8	50	71.4	47.8	57.1	50	79.2	84.2	72.2	80	63.2
% proc. alg.	5.6	16.7	33.3	4.3	21.4	0	29.2	36.8	33.3	50	23.8
calcul d'âge corr. ou réponse correc.	77.8	83.3	76.2	60.9	71.4	56.25	91.7	89.5	83.3	90	78.4

Ces pourcentages sont calculés sur le nombre d'élèves ayant abordé le problème.

Les procédures par hypothèse sur l'âge de Martine sont plus nombreuses dans les classes où les valeurs numériques n'étaient pas fournies (23 pour CM_2C, 6^eB, 6^eC) que dans les autres (6 pour les 7 autres classes). Dans ces autres classes on utilise les valeurs numériques fournies (48 élèves).

Les procédures algébriques sont plus nombreuses en 4^e, 5^e et en 6^eD, CM_2C. Elles ne sont explicites avec utilisation de lettres que pour 7 élèves (6 en 4^eB et un en 5^e).

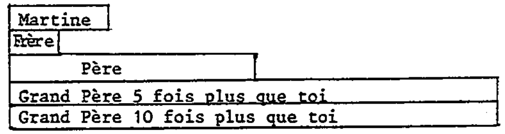
Dans toutes les classes, sauf en CM_2A, plus de la moitié des élèves qui ont abordé le problème ont fourni une réponse correcte. En CM_2A beaucoup d'élèves ont calculé correctement les âges sans conclure. Si on regroupe ces élèves avec ceux qui ont fourni une réponse correcte on a dans presque toutes les classes un pourcentage de réussite supérieur à 75 % (60.9 en 6^eA, 71.4 en 6^eB, 56.25 en 6^eC). Rappelons que dans ces deux dernières classes l'âge du père n'était pas fourni.

La réussite est un peu moindre en 6^eA mais dans cette classe tous les élèves, sauf un, ont abordé la question, alors qu'il y a plus de non-réponse dans les autres classes.

Mais si l'on regarde les procédures utilisées, on s'aperçoit que les élèves qui utilisent une procédure algébrique, c'est-à-dire qui sont capables de composer les rapports sans disposer des valeurs numériques sont beaucoup plus nombreux en CM_2C, 6^eD, 5^e, 4^eA et 4^eB que dans les autres classes : si l'on calcule le pourcentage d'élèves utilisant une procédure algébrique, par rapport aux présents le jour de passage du test, on a respectivement :

CM_2A	CM_2B	CM_2C	6^eA	6^eB	6^eC	6^eD	5^e	4^eA	4^eB
4.5	9.1	26.9	4.2	16.7	0	26.9	30.4	31.6	45.5

Une élève de CM_2B a représenté les âges par des baguettes de longueurs proportionnelles aux âges, en prenant 2 cm pour l'âge de Martine



D'autres élèves de la même classe ont fait des dessins de bonshommes respectant l'ordre des âges.

La faible utilisation des procédures algébriques ne nous étonne pas :

G. Vergnaud [V] a souligné la difficulté des élèves à travailler sur des opérateurs quand ils ne disposent pas d'information sur les états.

Le lien entre la réussite à ce problème et les performances sur les décimaux n'est pas évident. Il faudrait une analyse plus fine pour en décider.

Remarque.

Il faut noter que ces problèmes avaient été choisis parce qu'ils nous paraissaient des prérequis à l'acquisition des décimaux. Cela n'a pas l'air évident d'après les résultats. Les élèves peuvent posséder des acquis techniques sur les opérations et l'ordre des décimaux sans être capables de résoudre de tels problèmes. Inversement, bien que nous n'ayons pas beaucoup d'exemples en ce sens, ils peuvent être capables de résoudre ces problèmes sans posséder les techniques de calcul sur les décimaux. Cependant la maîtrise de problèmes de ce type est peut-être un prérequis à l'acquisition d'un certain sens des décimaux, ou l'indice de l'acquisition de ce sens. La question qu'on peut se poser c'est s'il y a dialectique entre l'acquisition des techniques et celle du sens. Les recherches effectuées avec R. Douady nous font penser que la réponse est oui.

3.4. Conclusion

On peut récapituler ainsi les résultats :

1) Les élèves interrogés ont peu de représentations disponibles sur les petites fractions et surtout sur les nombres décimaux : très peu de dessins fournis pour 2,3 et quand c'est le cas c'est souvent sous forme de parts de tarte avec une confusion avec 2/3 ou alors pour illustrer une conception en 2 gros morceaux et 3 petits, par exemple 2 grosses boîtes de thon et 3 petites.

La représentation sous forme de longueurs n'est pas spontanée et elle n'apparaît vraiment que dans les classes où il y a eu un apprentissage spécifique. Dans une classe de 6ème, les élèves utilisent la règle graduée en cm et mm mais c'est le professeur qui l'a suggéré.

2) Les élèves peuvent représenter les nombres décimaux qui ont un chiffre derrière la virgule à l'aide de la règle graduée en cm et mm. Cependant ils ont beaucoup de mal à représenter les nombres décimaux sur un axe gradué quand l'unité ne fait pas 1 cm, et ceci même pour les nombres qui n'ont qu'une décimale. Certains élèves font une utilisation abusive de la règle graduée pour placer les décimaux soit en comptant en millimètres la partie décimale (par exemple 1,45 à 45 mm de 1 ou aussi 1,08 à 8 mm de 1) soit en adaptant cette procédure dans le cas où elle amènerait un placement du nombre dans un intervalle entre entiers incorrect (pour 2,87 par exemple). Diverses adaptations sont possibles : placer 2,87 à 2,87 cm de 2 (notons qu'on trouve aussi parfois 1,7 à 1,7 cm de 1 ou 1,08 à 1,8 cm de 1) ; diviser par deux la partie décimale (par exemple 2,87 à 4,35 cm de 2). Certains élèves ont même adopté cette procédure de façon systématique, ce qui donne un placement correct pour les nombres qui ont 2 décimales (en raison de l'échelle choisie) et un placement incorrect pour les nombres à 1 décimale.

Cette difficulté de placement sur l'axe gradué montre que l'enseignement n'assure pas suffisamment la relation entre la construction des nombres et la mesure des longueurs. Ces deux activités sont d'ailleurs souvent séparées dans les manuels de 6ème de l'époque. On trouve là une trace du cloisonnement des connaissances dont nous parlions dans le chapitre 1.

3) Certains élèves ne voient dans les décimaux et les fractions que des entiers juxtaposés. Nous avons vu que trois élèves ont des réponses cohérentes dans ce sens.

4) Pour d'autres, il semble que les écritures proposées ne soient pas vraiment des nombres mais plutôt des codages d'actions, comme pour cet élève qui pour 2,3 explique "je coupe en deux et j'ajoute 3 petits bouts". On peut peut-être aussi interpréter de cette façon la confusion trouvée plusieurs fois entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{8}$ (je coupe en deux 3 fois) ou même celle entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ (je coupe en deux une fois de plus que pour $\frac{1}{2}$).

5) Il semble que beaucoup d'élèves travaillent avec des règles de calcul purement numériques, en essayant de se ramener aux règles de calcul sur les entiers. Ces règles peuvent être correctes et bien fonctionner dans la plupart des cas (des élèves réussissent l'ordre et l'intercalation mais pas la droite graduée) mais elles peuvent aussi donner lieu à des dérapages quand la situation est complexe (rangement d'une dizaine de nombres) ou non encore algorithmisée (somme de 2 fractions, moitié de 1/100) où l'on voit les élèves traiter les décimaux ou les fractions comme un couple de 2 entiers : les décimaux sont comparés suivant la règle 1 de Grisvard et Léonard ou enventuellement la règle 3 (surtout à partir de la 6ème) ; entre 1,8 et 2,1 on trouve 1,9 1,10 1,11 ... ; pour la somme de 2 fractions, on ajoute respectivement numérateurs et dénominateurs $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d})$ ou les dénominateurs en gardant le numérateur 1 pour les inverses d'entiers $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b})$, la moitié de $\frac{1}{100}$ est $\frac{1}{50}$.

6) En ce qui concerne l'intercalation, on voit apparaitre une procédure qui paraît contradictoire avec les règles utilisées pour la comparaison mais qui permet de toujours intercaler des nombres entre des décimaux donnés et qui consiste à ajouter des zéros derrière la virgule : entre 1,3 et 1,4 il y a 1,03 ; 1,003 ... ou 1,04 ; 1,004 ... Cela peut être interprété comme la règle 2 comme une prise en compte de l'ordre de grandeur entre centièmes, millièmes... Un élève qui fournissait ce genre de réponse à l'oral a fait ce commentaire : "après les dixièmes, je passe aux centièmes". D'autres élèves, moins nombreux ajoutent des 0 à la fin : entre 1,6 et 1,8 il y a 1,7 ; 1,70 ; 1,700 ...

7) Les résultats concernant l'ordre et l'intercalation sont meilleurs dans les classes où les élèves ont moins de retard (6ème D, 5ème, 4ème B) mais ils sont aussi meilleurs dans les CM2A et CM2C que dans les 6ème A, B, C. Il semble donc que le travail fait en CM2 sur la mesure des longueurs et l'utilisation des fractions pour graduer une demi droite ait contribué à ce que les élèves se faissent une représentation des nombres non entiers qui les aide dans les tâches de comparaison, et ceci bien que le placement des nombres sur un axe gradué soit encore très mal réussi en CM2A (en CM2C, nous avons pu voir sur un autre contrôle que la réussite était bien meilleure). On

n'a pas les mêmes résultats en CM2B qu'en CM2A mais le taux de non réponse est très élevé en CM2B sur toutes les questions.

8) Le problème sur les œufs a été très mal réussi en CM2 et en 6ème. Les erreurs principales sont les suivantes : il manque des multiplications par 6 (2x6 + 3x6 +50x6 ou 2x6 + 3x36 + 50x6 ou 2x6 + 3x36 + 50x36) ou l'élève enchaîne des multiplications (6x2 = 12, 12x3 = 36, 36x50). Ce problème était considéré dans notre analyse a priori comme un problème de numération et donc un prérequis à l'acquisition des décimaux. A posteriori, ce n'est pas évident, mais c'est peut-être un prérequis à l'acquisition d'un certain sens des décimaux : on peut avoir un fonctionnement technique sans avoir vraiment acquis tout le sens ; il semble d'ailleurs que les élèves utilisent prioritairement des règles numériques pour la comparaison, ils peuvent le faire sans connaître les rapports entre les différents ordres de grandeur.

4. Résultats du questionnaire B

Nous allons d'abord donner les résultats par question, nous comparerons ensuite les résultats des différentes classes pour voir si les difficultés se retrouvent au même endroit dans toutes les classes ou s'il y a des différences qui pourraient être dues à l'enseignement. Nous désignons chaque élève par la lettre qui code sa classe et un numéro en indice. Les élèves des mêmes établissements que ceux des classes B et D sont respectivement codés en B' ou D'. Rappelons que ces tests ont été passés dans des classes de 4ème en mai 1985, c'est-à-dire à une époque où les programmes de 1977 étaient encore en vigueur : on ne parlait que de décimaux en 6ème et 5ème, les rationnels et les réels étaient introduits en 4ème.

4.1. Les définitions

La partie I du questionnaire a été remplie par 8 classes soit 208 élèves.

Les réponses aux questions de cette partie nous montrent qu'il ne reste pas grand chose des distinctions faites dans les cours sur les ensembles de nombres. On voit cependant transparaître le point de vue adopté dans le cours du professeur à travers ce qui en a été retenu par les élèves.

Il y a des caractéristiques communes à toutes les classes : par exemple le décimal est presque toujours défini par l'écriture à virgule. Pour les fractions, les élèves font aussi souvent référence à l'écriture de deux points de vue : écriture de la fraction avec numérateur et dénominateur, ou fraction comme écriture d'un nombre ou comme représentant un nombre ou une division ; les 2 points de vue sont parfois mêlés, le deuxième apparaît rarement de façon nette sauf chez quelques élèves qui se trouvent majoritairement dans la classe I ; nous avons essayé de les distinguer, même si le deuxième n'est pas toujours bien exprimé. Pour les rationnels, les définitions sont souvent floues ou absentes, ils sont même parfois définis comme des nombres entiers ou alors des nombres réels. Suivant les cas les élèves font ou non une différence entre fraction et rationnel ou entre fractions équivalentes et fractions égales : il y a des différences de définition à l'intérieur d'une même classe, mais il y a des différences assez nettes entre les classes.

Nous allons détailler les réponses par classe :

<u>Classe A</u> *29 élèves*

fraction : 4 élèves le définissent comme un couple écrit sous la forme $\frac{a}{b}$, mais la majorité fait plutôt référence à un quotient ou à une division (14 élèves) ; beaucoup insistent d'une façon ou d'une autre sur l'écriture (11 élèves plus les 4 qui parlent de couple, 13 du 1er point de vue, 2 du 2ème : "nombre représenté par une division") ; certains ont l'air de se restreindre aux entiers positifs, un élève le fait explicitement.

rationnel : Presque tous les élèves qui donnent une définition disent que c'est le quotient de 2 entiers (18 élèves), 2 disent que c'est une suite périodique illimitée, 3 élèves disent que c'est un élément de **R**. Dans l'ensemble les élèves font assez peu de différence entre nombre rationnel et fraction.

décimal : Le nombre décimal est presque toujours défini par l'écriture à virgule ou par partie entière et partie décimale, ce qui recouvre la même idée (17 élèves) ; 4 précisent que la partie décimale est finie ou que la période est 0, un dit que la suite décimale peut être périodique ou illimitée ; 4 autres élèves disent qu'il s'écrit sous la forme $a \times 10^p$, 2 précisent que $a \in \mathbf{Z}$ et $p \in \mathbf{Z}$ et 1 que $a \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{Z}$. Deux élèves disent simplement que c'est un élément de **D** et 3 qu'il n'est pas entier ou qu'il est compris entre 2 entiers.

Tous les élèves qui répondent à la question (25) font une différence entre fractions équivalentes et fractions égales, mais pour 7 d'entre eux, ce n'est pas ce qu'on attendrait.

fractions équivalentes : ce sont 2 fractions qui sont dans la même classe d'équivalence (8 élèves), qui représentent le même nombre (1 élève), qui ont la même fraction irréductible ou qu'on obtient par simplification ou multiplication (10 élèves), qui donnent le même résultat, la même valeur (2 élèves). Pour A_7 les fractions équivalentes sont celles qui ont des dénominateurs égaux et pour A_{14} en les rendant au même dénominateur elles sont les mêmes : $\frac{3}{5}$ et $\frac{9}{25}$!

fractions égales : elles sont identiques (même numérateur et même dénominateur) pour 19 élèves, ce qui justifie pour eux la différence avec fractions équivalentes. Pour A_8 des fractions sont égales par un résultat d'opérations : $\frac{4}{2}=\frac{2}{2}+\frac{2}{2}$. A_{25}, A_{26}, A_{27} disent qu'une fraction égale à une fraction donnée est la fraction irréductible de la fraction donnée alors que la fraction équivalente n'est pas forcément irréductible (l'égalité n'est donc pas symétrique pour ces élèves). A_{12} et A_{18} ne devraient pas trouver de différence puisque le premier définit les fractions équivalentes comme appartenant à la même classe d'équivalence et les fractions égales comme ayant la même fraction irréductible et le second les fractions équivalentes comme ayant le même représentant privilégié et les fractions égales comme ayant le même quotient.

<u>Classe B</u> *24 élèves (pas d'élève de B' sur cette partie)*

fraction : elle est souvent définie comme une partie de quelque chose (12 élèves) ; 11 élèves considèrent plutôt la fraction comme une écriture (1er point de vue, 7 élèves, exemple : 2 entiers séparés par une barre, 2ème point de vue, 4 élèves, exemples : représente une division, écriture symbolisant un partage...) ; 3 élèves parlent de division, 2 d'opérateurs, 1 de classe d'équivalence ; 1 élève (B_{13}) écrit (orthographe respectée) : *"une fraction et un nombre rationnel est égal à un nombre décimal, ex $\frac{1}{2}$ = 0,5 et donc c'est un décimal, un nombre à virgule".*

rationnel : 5 élèves parlent de classe d'équivalence, d'élément d'une classe d'équivalence ou de suite de fractions équivalentes ; 3 disent que c'est un nombre avec un signe ou qu'il peut être positif ou négatif ; 1 élève donne des exemples avec des écritures variées (1,333... 8 $\frac{1}{5}$) et dit *"c'est celui qui comprend tous les ensembles"* ; 3 élèves disent que c'est une fraction transformée en décimal et 1 l'égalité d'une fraction ; 1 élève dit que c'est une fraction et 1 autre que c'est une fraction que l'on peut mettre en décimal avec comme exemple $\frac{5}{100}$ = 0,05.

décimal : pour 16 élèves un décimal est un nombre à virgule, certains précisent "ou sans virgule" en donnant des exemples entiers ; 1 seul signale "c'est un nombre à virgule qui sera limité" ; 1 élève exclut les relatifs, 3 les entiers et 3 disent que tous les nombres sont décimaux.

fractions équivalentes : 3 élèves disent que ce sont des fractions qui ont même fraction irréductible, 11 élèves font référence à la simplification ou à la multiplication par un même nombre du numérateur et du dénominateur (certains parlent pour cela de fraction multiple), 3 élèves disent que ce sont des fractions qui ont même quotient ou même valeur, 4 élèves ne donnent que des exemples, 1 élève dit que ce sont des fractions que l'on peut rendre irréductibles, 1 élève (B_{20}) que ce sont des fractions identiques et 1 élève que ce sont des fractions de même dénominateur.

fractions égales : 8 élèves disent que cela correspond à des fractions identiques, 1 autre pense la même chose mais ne donne qu'un exemple ; 7 élèves disent que c'est comme équivalentes, auxquels il faut ajouter 2 élèves qui donnent des exemples dans ce sens, 3 élèves qui pensent que ce sont des fractions qui donnent le même résultat, 1 élève ne sait pas et 1 autre (B_3) qui dit que des fractions égales sont des fractions égales, mais qui par les exemples qu'il donne laisse penser que l'égalité est le résultat d'une opération ($\frac{4}{1}=4$; $\frac{8}{1}=8$; $\frac{7}{8}=0{,}705$) ; la réponse de B_{24} est difficilement interprétable mais on peut se demander s'il ne considère pas comme égales des fractions ayant le numérateur égal au dénominateur.

Finalement 7 élèves font une différence justifiée entre fractions égales et fractions équivalentes (dont B_{20} qui la fait dans le sens inverse de tout le monde), 8 n'en font pas sauf éventuellement dans l'écriture (on écrit $\mathcal{R}$ ou =), 2 élèves en font mais ne devraient pas en faire d'après leurs définitions, 1 n'en fait pas mais devrait en faire, pour 1 élève l'équivalence va dans le sens de la réduction alors que l'égalité va dans les 2 sens, ce qui fait qu'on ne peut pas trouver de fraction équivalente à $\frac{7}{8}$; B_{24} fait une différence qui semble injustifiée, ou correspond à une erreur.

<u>Classe C</u> *: 24 élèves, 4 ne répondent pas au I, restent 20 élèves* *fraction* : 12 élèves parlent de division, 1 élève dit que le numérateur sert à multiplier et le dénominateur à diviser, 1 élève (C_{14}) dit : *"une fraction est la simplification de la soustraction, elle comporte un dénominateur et un numérateur"* et C_{24} : *"une fraction est une division telle que comme résultat on ne trouve pas de nombre décimal"* ; 10 élèves font allusion à l'écriture de la fraction avec numérateur et dénominateur.

rationnel : très peu de définitions, aucune pertinente : pour 2 élèves c'est un entier, pour 1 élève c'est un entier obtenu par une division, pour 1 autre un nombre ne comportant aucune virgule, pour 1 autre un élément de l'ensemble **R** = {1, 2, 3, 4, ... } et pour 1 dernier un élément de **R** sans précision.

décimal : pour tous les élèves qui s'expriment (16) c'est un nombre à virgule, 1 élève (C_{24}) confond valeur absolue et partie entière : *"un nombre qui est composé d'une valeur absolue et d'une ou plusieurs décimal ou on peut dire que c'est un nombre à virgule".*

Dans cette classe il est clair que les nombres sont caractérisés par leur écriture, c'est souvent implicite à travers des définitions brèves et floues mais c'est particulièrement net pour C_8 qui donne des définitions très claires : *"Une fraction est une division où deux nombres sont superposés et que l'on note de la façon suivante* $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ *. Une fraction est composée d'un numérateur et d'un dénominateur. Le numérateur se trouve au dessus du trait de fraction et le dénominateur en dessous du trait de fraction. Un nombre décimal est un nombre qui est composé d'une virgule, d'un entier et d'une partie décimale. L'entier se trouve à gauche de la virgule et la partie décimale à droite de la virgule. Un nombre décimal se trouve toujours entre deux nombres entiers."* Les questions suivantes sont très peu abordées.

fractions équivalentes : ce sont des fractions qui donnent le même résultat ou le même quotient pour 3 élèves, pour C_{11} *"une est le double de l'autre ex :* $\frac{6}{2}$ *équivaut à* $\frac{12}{4}$*"*, pour C_{20} *"une fraction équivalence et une fraction que l'on simplifier"*, C_{24} ne donne que des exemples. Pour C_{22} deux fractions équivalentes sont des fractions qui ont des résultats qui se valent avec comme exemple $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{9}$.

fractions égales : pour 5 élèves ce sont des fractions qui donnent le même résultat, C_{24} ne donne que des exemples qui vont dans le même sens, pour C_9 elle peut de plus être égale à son inverse : il écrit

$$\frac{7}{8} = \frac{\frac{14}{2}}{\frac{32}{4}} \quad \text{et aussi } \frac{7}{8} = \frac{8}{7}$$

Finalement parmi les 7 élèves qui répondent à la question, 6 ne font pas de différence entre fractions équivalentes et fractions égales. C_{22} en fait une due à sa mauvaise définition de fractions équivalentes ("on ne trouve pas le même résultat").

__Classe D__ *: 24 élèves* __Classe D'__ *: 6 élèves*

fraction : 7 élèves parlent de division, 3 donnent seulement des exemples, 1 parle de couple, 1 de nombre à virgule illimité ou limité, 1 de période, 1 de portion de segment ; 1 élève de D' se réfère à des parties d'un carré et D'_{27} et D'_{28} disent qu'une fraction est un rationnel (et qu'un rationnel est un réel). 11 élèves de D et 2 de D' se réfèrent à l'écriture, 1 seul du 2ème point de vue (classe D).

rationnel : pour 5 élèves de D et 2 de D', c'est un réel ou un élément de **R**. Pour 3 autres élèves c'est un nombre à virgule illimité, pour 1 autre, un nombre, pour 6 élèves (dont 1 de D') c'est un nombre qui a une période, pour 6 élèves (dont 4 de D') c'est un nombre dont l'écriture est fractionnaire ou qui ne peut s'écrire que sous forme de fraction, pour 1 élève c'est "un ensemble de fractions équivalentes", pour 1 autre "un représentant de fractions" et pour 1 élève "un résultat de fraction" ; 2 élèves ne donnent que des exemples.

décimal : pour 19 élèves (dont 3 de D'), c'est un nombre à virgule, 6 précisent qu'il est limité, 1 qu'il n'a pas de période et 1 qu'il a un signe. D'_{26} dit qu'il ne peut pas être transformé en fraction et D_{24} qu'on ne connaît pas la fin. D_{18} dit que c'est un élément de **N**, D_{15} de **D**, D'_{27} et D'_{28} un rationnel.

fractions équivalentes : les références sont les suivantes : produit en croix (5 élèves), simplification ou multiplication de numérateur et dénominateur par un même nombre (8 élèves), même fraction irréductible (3 élèves - dont 1 de D'), représentent le même rationnel (2 élèves dont 1 de D'), même résultat (1) même valeur (1 de D'), 1 élève dit qu'elles donnent le même résultat dans une opération, 3 se contentent d'exemples et 1 élève de D' dit que ce sont des fractions qui ont les mêmes nombres mais ne donne pas d'exemple.

fractions égales : ce sont des fractions identiques pour 7 élèves, 5 élèves donnent une définition qui revient à équivalente (quelquefois différente de celle qu'ils avaient choisie), 1 élève donne un exemple dans le même sens.

Pour D_2 *"deux fractions égales sont 2 fractions dont la valeur absolue des numérateurs est égale et des dénominateurs est égale, et la fraction ayant le même signe"* et parmi les exemples il donne : $\frac{7}{8}=\frac{-7}{-8}=+\frac{7}{8}$.

Finalement 5 élèves de D font une différence explicitement, 3 implicitement ; 7 élèves de D et 3 de D' ne font explicitement aucune différence, 2 ont la même position implicite.

Classe E *: 25 élèves*

fraction : 9 élèves parlent de division, 1 de division qui ne tombe pas juste, 1 de nombre décimal qui ne s'arrête pas, 2 de nombre qui n'est pas déterminé, 2 de nombre qu'on ne peut pas mettre sous forme de décimal, pour E_9 c'est *"un nombre qu'on ne peut pas écrire sur la forme d'un nombre, ex: $\frac{4}{7}$* alors que pour 3 élèves, c'est au contraire *"un nombre décimal transformé"* ou *"un nombre à virgule mis sous forme fractionnaire"* ou *"un nombre mis en fraction"*. 7 élèves s'intéressent à l'écriture dont 3 du 2ème point de vue.

rationnel : 2 élèves parlent de division et 3 de quotient exact, 1 parle de période, 3 disent que l'opération continue à l'infini, 1 que c'est un nombre qu'on ne peut pas écrire (avec comme exemple 2,222...) tandis que 2 élèves disent que c'est le résultat d'une fraction et 5 élèves un nombre marqué sous la forme d'une fraction ou qui ne peut s'écrire que sous la forme d'une fraction. Un élève dit simplement que ça fait partie de l'ensemble des rationnels, 1 élève que c'est un nombre déterminé (une fraction était pour lui un nombre qui n'est pas déterminé), 1 élève que c'est un entier et 2 autres un nombre sans virgule en donnant des exemples entiers. Pour E_{11} c'est aussi *"un nombre sans virgule, sans aucun point de repair"* et il ne donne comme exemple que des entiers positifs.

décimal : pour les 25 élèves, c'est un nombre à virgule, un élève précise *"qu'il possède 2 propriétés le signe - (**R**-) et le signe + (**R**+)"* et un autre que ce n'est pas un entier.

fractions équivalentes : elles donnent le même résultat pour 9 élèves, on les obtient en multipliant numérateur et dénominateur par un même nombre (plus ou moins explicitement) ou c'est une fraction avec sa simplifiée pour 4 élèves, on fait le produit en croix pour 2 élèves, elles sont en relation pour 1 élève (avec un exemple), elles donnent la même fraction irréductible pour 1 élève, pour 1 élève *"ce ne sont pas les mêmes chiffres mais c'est la même fraction,"* 1 élève se contente d'un exemple, pour un autre elles sont à peu près égales (sans exemple), pour un autre *"il y a à peu près le même total de chiffres ou qui représente le même total"*, il dit finalement qu'il n'y a pas de différence avec égale et donne des exemples corrects. Pour 2 élèves une fraction est équivalente ou égale toute seule, et utilisent ce mot dans le sens voisin de celui qu'il a en français (à peu près égal) : E_{18} *"fraction équivalent veut dire qu'un nombre d'une fraction est équivalent à l'autre (ex :$\frac{2}{3}$) fraction égales veut dire que les deux nombres des fraction sont de même valeur (ex :$\frac{2}{2}$)"* pour E_{12} *"une fraction équivalente, c'est une fraction que l'on peut réduire ex : $\frac{8}{4}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=2$".*

fractions égales : ce sont des fractions identiques pour 10 élèves, 1 autre donne la même définition mais avec comme exemple $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$; c'est comme équivalentes ou elles donnent le même résultat pour 7 élèves, 2 élèves donnent des exemples dans le même sens ; pour E_1 ce sont des fractions de même dénominateur ; nous avons déjà donné la définition de E_{18} (fraction $\frac{a}{a}$) ; pour E_{12} *"une fraction égale, c'est une fraction qui, lorsque l'on trouve un nombre entier de cette fraction, on peut trouver ce même nombre entier avec une autre fraction (ex : $\frac{8}{2}=4$; $\frac{12}{3}=4$)."*

Finalement 10 élèves font une différence justifiée entre fractions équivalentes et fractions égales (dont 2 implicitement) ; 8 élèves n'en font pas (dont 4 implicitement) ; pour E_{19} il n'y a presque pas de différence (pour lui équivalentes veut dire à peu près égales) ; E_{21} ne fait pas de différence mais devrait en faire une (il a changé sa définition de "égales" et n'a pas changé sa conclusion ; E_{12} fait une différence, nous avons déjà vu pourquoi.

Classe F *: 26 élèves*

fraction : 11 élèves parlent de couple (en précisant ou non qu'il s'agit de 2 entiers), 3 autres ont une définition apparentée à celle là (par exemple *"une fraction est formée de 2 nombres entiers naturels tels que le dénominateur est supérieur ou égal à 1"*), 3 élèves parlent d'opération, pour 2 élèves c'est une division, pour F_{19} c'est plutôt une suite de 2 opérateurs *"une fraction est un couple de décimal ; le décimal qui multiplie est au-dessus : le numérateur ; celui qui est en dessous divise celui du dessus : le dénominateur"* ; pour F_{10} c'est un décimal sous forme fractionnaire ; 9 élèves se réfèrent à l'écriture de la fraction avec numérateur et dénominateur.

rationnel : c'est une classe d'équivalence pour 4 élèves, une fraction appartenant à une classe d'équivalence pour 5 élèves, un élément de **Q** pour 1 élève, un nombre qui appartient à **R** pour 1 élève (qui donne comme exemple π) ou même *"c'est l'ensemble des nombres réels (noté **R**) tel que tout nombre de la droite soit un et un seul de ces nombres"* pour 3 élèves qui donnent pratiquement la même définition ; pour F_{14} c'est *"un nombre dont le dénominateur et le numérateur sont des nombres premiers"* et pour F_{20} *"un nombre que l'on peut multiplier que par soi-même ou par 0".*

décimal : c'est un nombre à virgule pour 10 élèves (l'un d'eux précise qu'il n'est pas entier), qui fait partie de **D** pour 3 élèves, positif ou négatif pour 1 élève (qui ne donne que des exemples entiers), que l'on peut écrire sous forme fractionnaire pour 1 élève, tout réel est un décimal pour 1 élève. Deux élèves donnent une définition correcte (ou presque mais pas toujours bien formulée) : F_3 *" un décimal est un rationnel si et seulement si on retrouve dans sa décomposition le facteur 2 ou le facteur 5 ou 2 et 5"* et F_4 *"un rationnel est un décimal si son dénominateur peut s'écrire sous la forme d'une puissance de 10".*

fractions équivalentes : 9 élèves font référence au produit en croix, 8 élèves au produit des 2 termes par un même nombre ou à la réduction, 1 élève dit que l'un appartient à la classe d'équivalence de l'autre, 4 élèves ne donnent que des exemples, 1 élève dit si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (pour égales il dit $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$)

fractions égales : elles sont identiques pour 17 élèves (dont 1 qui n'admet dans ce cas que des fractions irréductibles : *"une fraction égale est la fraction égale à elle-même : une irréductible"*), 2 élèves se réfèrent au produit en croix et 1 au produit des 2 termes par un même nombre.

Finalement 15 élèvent trouvent une différence justifiée entre fractions équivalentes et égales (dont 5 implicitement), 2 élèves n'en trouvent pas de façon justifiée, 1 en trouve mais ne devrait pas en trouver, 3 n'en trouvent pas mais devraient en trouver d'après leurs définitions.

<u>Classe G</u> *: 26 élèves*

fraction : c'est une division pour 3 élèves, une partie de quelque chose pour 3 élèves, un décimal écrit sous une autre forme pour 2 élèves, un nombre qui appartient à **Q** et pas à un autre ensemble pour 2 élèves ; 4 élèves ne donnent que des exemples et 10 élèves se réfèrent à l'écriture, dont 1 du 2ème point de vue.

rationnel : un nombre qui appartient à **Q** pour 4 élèves, un nombre qui appartient à **Q** et à un autre ensemble pour 2 élèves (ceux qui trouvaient qu'une fraction appartient à **Q** et pas à un autre ensemble), un nombre fractionnaire ou un nombre représentant une fraction pour 4 élèves, le quotient d'une fraction pour 1 élève, une fraction irréductible pour 1 élève, une classe d'équivalence pour 1 élève, un nombre entier ou décimal qui a un signe pour 1 élève, un nombre décimal pour 1 autre. Citons enfin les définitions de G_2 *"une fraction est une partie de quelque chose ex : $\frac{1}{2}$ heure, $\frac{1}{4}$ du gâteau, tandis qu'un rationnel a une valeur plus mathématique ex : $\frac{1}{5}$ de $\frac{8}{4}$, $\frac{6}{2}$ de $\frac{1}{6}$* et G_9 *"un nombre rationnel, c'est un nombre qui fait partie d'un ensemble, c'est un nombre surmonté par un autre, c'est aussi un numérateur divisé par un dénominateur qui donne un nombre décimal".*

décimal : c'est un nombre à virgule pour 18 élèves, un élément de **D** pour 4 élèves, une fraction sans borne pour un élève, un entier divisé par 10, 100, 1000 pour 1 élève ; tout décimal est un entier pour 1 élève, un autre donne un exemple (entier naturel)

fractions équivalentes : 8 élèves font référence au produit en croix, 1 dit que ce sont des fractions qui font partie de la même classe, qui ont un même représentant, pour 5 élèves ce sont des fractions de même valeur ou qui veulent dire la même chose, pour 1 élève ce sont "des fractions multiples de fractions" (il veut dire axn/bxn), 1 élève se contente d'un exemple, pour 1 autre une fraction équivalente est un ensemble de rationnels, pour un autre ce sont des fractions "de même source" et il donne comme exemples $\frac{4}{8}$ $\frac{8}{16}$ $\frac{-4}{8}$ $\frac{-8}{16}$.

fractions égales : pour 3 élèves ce sont des fractions qui ont même dénominateur et même numérateur, 2 élèves donnent la même définition mais par les exemples on peut constater que l'égalité des fractions se fait au signe près ($\frac{7}{8} = -\frac{7}{8}$, 9 élèves donnent une définition qui revient à l'équivalence mais différente du produit en croix qu'ils avaient utilisé alors, 1 élève dit que ce sont des fractions qui ont des dénominateurs égaux, il ne voit pas de différence avec fractions équivalentes qu'il a définies comme "un nombre qui peut être réduit au même dénominateur".

Finalement 4 élèves font une différence justifiée entre fractions équivalentes et égales, 2 en font une mais ne devraient pas en faire, 9 n'en font pas dont 1 de façon implicite et 1 sans donner de définition.

***Classe I** : 24 élèves*

fraction : c'est une division ou un quotient pour 12 élèves dont 1 précise que *"c'est un nombre qui n'est pas décimal que l'on exprime par une division"*; 19 élèves font référence à l'écriture dont 6 précisent clairement qu'une fraction représente un rationnel, citons la définition de I_{21} qui exprime les deux points de vue sur l'écriture : *"une fraction est une représentation graphique d'un nombre rationnel sous la forme d'une division : le nombre supérieur étant le numérateur, le nombre inférieur le dénominateur"* ; 1 élève dit qu'une fraction correspond à un nombre qui peut être positif ou négatif.

rationnel : pour 7 élèves c'est le résultat d'une fraction ou un quotient ou un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction (1 précise qu'il peut être décimal ou entier ou autre), 2 élèves assimilent rationnel et fraction, pour 1 élève cela représente une portion de quelque chose, pour 2 élèves c'est un entier ou un décimal, pour 1 élève c'est un décimal ou un entier ou autre chose, pour 1 autre *"c'est un ensemble qui comporte les décimaux plus les nombres à période et ceux qui ne se terminent pas"*, pour 2 élèves c'est un nombre qui a une période alors que pour I_{13} *"c'est un nombre qui n'est pas décimal et qui a une infinité de chiffres après la virgule (ex : 3,78231...)"* pour I_6 *"c'est un nombre interminable ex 1,666 qui ne correspond à aucune fraction"* et pour I_7 c'est *"un nombre qui ne peut pas avoir de fraction précise : ex : 0,666... sa fraction est $\frac{2}{3}$ mais puisqu'il y aura toujours un reste, $\frac{2}{3}$ n'est qu'une fraction qui évite d'écrire 0,666..."*

décimal : pour 22 élèves c'est un nombre à virgule, pour les 2 autres c'est implicite. 5 élèves disent plus ou moins explicitement que la partie décimale est finie, mais 1 dit que ça ne se termine jamais, 2 précisent qu'il peut être positif ou négatif, 2 élèves disent qu'il n'est pas entier et 1 qu'il est compris entre 2 entiers.

fractions équivalentes : elles représentent le même rationnel pour 7 élèves, 8 élèves font allusion à la simplification ou au produit des termes par un même nombre, 1 élève dit que "c'est la même avec des transformations", pour 4 élèves elles donnent le même quotient ou le même résultat, 2 élèves donnent des exemples, 1 dit que "ce sont des fractions égales mais écrites autrement", pour 1 élève "fractions équivalentes veut dire pour moi que 2 fractions sont équivalentes soit qu'une équivaut à 2 autres" avec comme exemple $\frac{7}{8} \to \frac{3}{4} + \frac{4}{4}$.

fractions égales : elles sont identiques pour 5 élèves ; 14 élèves donnent une définition qui revient à l'équivalence ; pour 1 élève ce sont des fractions égales à 1 ; 2 élèves ont des définitions erronées reposant sur une confusion entre addition et multiplication : I_{21} *"2 fractions égales sont 2 fractions dont le numérateur de la première + le dénominateur de la seconde = le dénominateur de la première + le numérateur de la seconde ex : $\frac{2}{4} = \frac{3}{7}$ et $\frac{7}{8} = \frac{2}{3}$* et I_{23} *"deux fractions égales signifie qu'on leur ajoute au dénominateur et au numérateur un nombre quelconque donc elles sont égales ex : $\frac{7}{8} = \frac{7+3}{8+3} = \frac{10}{11}$".*

Finalement 12 élèves ne voient pas de différence entre fractions équivalentes et égales, 5 élèves voient une différence dont 1 implicitement et 3 en voient une petite (justifiée par leurs définitions) : I_2 *"pour moi il y a une petite différence entre une fraction équivalente et une fraction égale : égale, pour moi, est plus précis, plus sûr qu'équivalente. Mais je ne pense pas que la différence soit très grande"* I_7 *"il n'y a pas de différences visibles sur le plan matériel car $\frac{7}{8}$ sera toujours égale à $\frac{21}{24}$ qui sera toujours égale à $\frac{7}{8}$ Mais la différence qu'il y a c'est sur le plan de l'écriture : $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$ (seulement sur le plan de l'écriture)"* I_{14} *"une fraction égale on voit que a est distinctement, sensiblement semblable à b. Une fraction équivalente est plus compliquée à trouver : plusieurs étapes sont nécessaires pour entrevoir la solution".*

Conclusion

Les résultats de cette partie sont récapitulés dans le tableau n° 1. Les réponses aux questions nous montrent qu'il ne reste pas grand chose des distinctions sans doute faites dans les cours sur les ensembles de nombres. Par exemple, 8 élèves identifient explicitement rationnel et décimal, 7 ne font pas de différence entre décimal et réel et 20 confondent rationnel et réel. On a même 3 élèves qui disent qu'un rationnel est un entier ! On voit cependant transparaître le point de vue adopté dans le cours du professeur à travers ce qui en est retenu par les élèves.

Il y a des caractéristiques communes à toutes les classes : par exemple le décimal est presque toujours défini par l'écriture à virgule. Pour les rationnels, les définitions sont souvent floues ou absentes. D'une manière générale, les définitions sont plutôt liées à l'écriture des nombres qu'à des propriétés fondées sur les opérations. Suivant les cas, les élèves font ou non une différence entre fraction et rationnel ou entre fractions équivalentes et fractions égales. Il y a des différences de définition à l'intérieur d'une même classe mais aussi des différences assez nettes entre les classes.

Tableau 1. Définitions

classe	A	B	C	D	E	F	G	I	D'	total
effectif	29	24	24	24	25	26	26	24	6	208
fraction										
couple	4			1		14				19
quotient, division	14	3	12	7	10	2	3	12		63
partie de quelque chose	0	12		1			3	1	1	18
opérateur	0	2	1			1				4
écriture de la fraction	13	7	10	10	4	9	9	14	2	78
écriture d'un rationnel	2	4	0	1	3	0	1	7	0	18
rationnel										
classe d'équivalence		4		1		4	1			10
élément de classe d'éq.		2		1		5				8
quotient	18				5					23
résultat d'une fraction		4		4	7		5	7	4	31
suite périodique	2			6	1			3	1	13
nb à virgule illimité	2			3	4			3		12
nombre avec signe		3					1			4
entier			4		4					8
réel	3		1	5		4			2	15
décimal										
nombre à virgule	17	16	16	16	25	10	18	22	3	143
limité ou autre déf. de	8	1		6		2	1	5		23
non entier ou entre ent.	3	3			1	1		3		11
fractions équivalentes										
produit en croix				5	2	9	8			24
même classe	8					1	1			10
représente un même nb	1			1				7	1	10
même fraction irréd.	5	3		2	1				1	12
simplification ou xn	5	11	2	8	4	8	1	9		48
même quotient, résultat		3	3	1	9		5	4	1	26
erreurs	2	2	1		3		1	1		10
fractions égales										
identiques	19	9	0	7	10	17	3	5		70
équivalentes	7	12	6	6	9	3	9	14		66
erreurs			1		3		2	3		9
différence justifiée	19	7	0	8	10	15	4	5		68
non différence justifié	0	8	6	9	8	2	9	12	3	57
incohérence ou erreur	7	5	1	0	3	4	2	0	0	22

La définition de fraction comme un couple n'apparaît massivement que dans la classe F, et un peu dans les classes A et D ; dans les autres classes elle n'apparaît pas du tout même si certains élèves font une description de la fraction par son écriture comme 2 nombres superposés. C'est plutôt la notion de division qui domine, surtout dans les classes A, C, I. La fraction comme partie de quelque chose est surtout présente dans la classe B. Les élèves font souvent allusion à l'écriture de la fraction avec numérateur et dénominateur ; quelques-uns considèrent la fraction comme l'écriture d'un nombre, même si c'est parfois exprimé de façon maladroite, ce point de vue n'est clairement exprimé que dans la classe I. D'ailleurs, pour beaucoup d'élèves la définition des propriétés est liée à l'écriture du nombre plus qu'au nombre lui-même (aussi bien pour les rationnels que pour les décimaux).

Très peu d'élèves savent définir un nombre rationnel sauf dans la classe A (comme un quotient). Dans les autres classes, on trouve quelques définitions vagues comme quotient (C, E, G, I), comme nombre ayant une période (A, D, E), comme résultat d'une fraction ou nombre représenté par une fraction (D, E, G, I), comme classe d'équivalence ou élément d'une classe d'équivalence (B, D, F, G). Certains élèves se contentent de dire que c'est un élément de **Q**. Les rationnels sont parfois confondus avec les entiers, avec les décimaux ou avec les réels.

Le nombre décimal est presque toujours décrit par son écriture à virgule, très peu d'élèves en donnent un définition complète : le fait que la partie décimale est finie n'apparaît que dans les classes A, B, D, I, et encore n'est-ce le cas que pour moins d'un élève sur 5 ! On trouve quelques autres définitions correctes dans les classes A et F. Par contre d'autres élèves disent que la partie décimale est illimitée et pour quelques-uns ce n'est pas un entier, 4 élèves affirment que tous les nombres sont décimaux mais il est probable que beaucoup de ceux qui parlent de nombre à virgule le pensent.

La notion de fractions équivalentes fait davantage référence au cours que celle de fractions égales : on y voit les définitions avec le produit en croix qui n'apparaissent que très peu pour les fractions égales même si les élèves donnent le même sens aux deux termes (classe G par exemple). Pour les fractions égales, quand les élèves ne les définissent pas comme identiques, ils prennent plutôt une définition liée à la simplification; d'ailleurs pour quelques élèves l'égalité va dans le sens de la simplification alors que l'équivalence va plutôt dans celui de la multiplication, l'égalité est aussi davantage reliée au calcul. L'opposée et l'inverse ont des statuts ambivalents et sont parfois considérées comme égales ou équivalentes à un fraction donnée, on trouve aussi le sens de "équivaut" en français, des fractions équivalentes étant à peu près égales ou même ayant un numérateur et un dénominateur à peu près égaux, et aussi des confusions entre multiplication et addition dans la simplification ou le produit en croix.

La majorité des élèves font une nette différence entre fractions équivalentes et fractions égales dans les classes où on a présenté la fraction comme un couple (A et F) alors que dans les autres classes les avis sont partagés (B, D, E) ou plutôt en faveur de l'absence de différence (C, G, I). Les élèves sont parfois gênés par l'absence de différence entre 2 termes mathématiques et essaient de trouver quand même une justification à l'existence de 2 mots.

On peut penser que dans la classe A le professeur a présenté à la fois le point de vue couple et classes d'équivalence et le point de vue division (davantage retenu par les élèves), dans la classe F il semble que le point de vue surtout développé est celui de couple et de classe d'équivalence (très peu d'élèves parlent de division et aucun ne définit le rationnel comme un quotient), dans les classes C, E et I, c'est le point de vue division qui a été adopté (cela correspond aux informations données par les professeurs des classes C et I), dans la classe B, on peut penser qu'il y a eu une présentation "concrète" des fractions comme partie de quelque chose, pour les classes D et G, c'est moins net mais le produit en croix a été utilisé pour définir la relation d'équivalence.

Certaines définitions ont davantage un caractère "objet" (une fraction est un couple, les fractions équivalentes appartiennent à la même classe), d'autres ont davantage un caractère outil (deux fractions sont équivalentes si en les réduisant au même dénominateur on a la même), d'autres présentent les deux caractères (un nombre rationnel est un quotient de 2 entiers). Dans la classe F on trouve essentiellement des définitions à caractère objet, ce qui n'est pas le cas dans les autres classes.

4.2. Les opérations

Sur la deuxième partie (opérations, comparaisons, axe gradué, intercalation), nous disposons des réponses de 9 classes, soit 231 élèves. Les résultats sur les opérations sont assez bons puisque la majorité des élèves ne font aucune erreur, même s'il y a des différences suivant les classes. On peut les résumer dans le tableau n° 2 où nous avons compté comme erreur les non réponse, considérant que si un élève ne répondait pas à une question de cette partie, c'est qu'il ne savait pas le faire.

4.2.1. Relevé des erreurs par question :

a) $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} =$

La seule erreur est $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ (7 élèves dont 5 de la classe C)

ou $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ (2 élèves dont 1 de la classe C)

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ 6 élèves (dont 5 de la classe C)

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{12}$ 1 élève $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{3}{8}$ 1 élève

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$ 3 élèves dont 2 dans la classe C

Ces erreurs peuvent être rattachées à ce que nous avons appelé des modèles d'action issus des entiers. D'autres erreurs sont plutôt liées à une mauvaise technique de réduction au même dénominateur :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ 2 élèves $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1x3}{1x2} = \frac{3}{2}$ 1 élève

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1+3}{3}$ 1 élève $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1+3}{2+3} + \frac{1+2}{3+2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}$ 1 élève

5 élèves réduisent correctement au même dénominateur puis écrivent 2+3 = 6

1 élève répond $\frac{6}{5}$ et 1 élève ne répond pas.

c) $\frac{3}{5} - \frac{2}{7}$

$\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = -\frac{1}{2}$ (ou $\frac{1}{-2}$) 3 élèves, auxquels il faut ajouter un élève qui répond $\frac{1}{2}$

3 de ces élèves sont dans la classe C.

1 élève écrit $\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{3-7}{5-2} = \frac{-4}{3}$, combinant une utilisation du produit en croix et un modèle d'action issu des entiers.

1 élève enfin répond $\frac{21-10}{-2}$!

$\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{1}{35}$ 4 élèves auxquels il faut ajouter un élève qui répond $-\frac{1}{35}$

D'autres erreurs semblent provenir de mauvaises techniques de réduction au même dénominateur

$\frac{3-7}{5-7} - \frac{2-5}{7-5} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2}$ 1 élève (erreur combinée avec une erreur de signe)

$\frac{3x7}{2x5} = \frac{21-10}{2x5}$ 1 élève $\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{3-10}{5} = \frac{7}{5}$ 1 élève (avec erreur de signe)

1 élève confond soustraction et division et fait $\frac{3}{5} x \frac{7}{2}$

3 élèves remplacent la soustraction par une addition et l'un d'eux remplace ensuite l'addition des numérateurs par une multiplication pour "simplifier" :

$\frac{21+10}{35} = \frac{3x\cancel{7}x2x\cancel{5}}{\cancel{5}x\cancel{7}} = \frac{6}{1} = 6$

En plus de celles déjà signalées, deux erreurs sont dues aux relatifs (réponse $-\frac{11}{35}$). 4 autres élèves font des erreurs d'opérations sur les entiers et 9 élèves ne répondent pas à la question.

d) $\frac{3}{5} - \frac{5}{6} =$

Rappelons que cette question porte sur un peu moins de 7 classes : la classe A a traité une addition (ainsi que quelques élèves de la classe G) et la classe H une division.
L'erreur de loin la plus fréquente est l'oubli du signe : 19 élèves.

9 élèves font des erreurs de calcul sur les entiers dont 4 sont dues au calcul dans **Z**.

5 élèves ne répondent pas. 2 élèves remplacent la soustraction par une somme.

Les modèles d'action issus des entiers sont peu nombreux : 2 élèves qui l'utilisent systématiquement répondent l'un $\frac{-2}{-1}$, l'autre $\frac{2}{1}$.

Par contre les erreurs de réduction au même dénominateur sont plus nombreuses, on retrouve les techniques erronées déjà vues et des erreurs plus ponctuelles :

$\frac{3}{5} - \frac{5}{6} = \frac{3-5}{30}$ 3 élèves dont 1 répond $\frac{-2}{30}$, un autre $\frac{2}{30}$ et le dernier $\frac{-8}{30}$

Il faut peut-être y ajouter un élève qui répond $\frac{4}{15}$ qu'on peut peut-être interpréter comme $\frac{3+5}{30}$

$\frac{18-5}{6}$ 1 élève $\frac{3x6}{5x5}$ 1 élève $\frac{3-6}{5-6} - \frac{5-5}{6-5} = \frac{3}{1} - \frac{0}{1}$ 1 élève

1 élève fait $\frac{18-30}{30}$ et 1 autre $\frac{15-30}{30}$

3 élèves font des erreurs dues au désir de simplifier :

1 élève écrit $\frac{3x6}{5x6} - \frac{5x5}{5x6} = \frac{3x6x(-5)x5}{5x6}$, 1 autre la même chose sans le signe -

et un troisième $\frac{\cancel{3}}{5} - \frac{5}{\cancel{6}_{\,2}} = \frac{1}{2}$

e) $\frac{3}{4} x \frac{12}{5} =$

Pour la multiplication, la principale erreur consiste à réduire au même dénominateur :

$\frac{3}{4} x \frac{12}{5} = \frac{15x48}{20}$: 5 élèves

D'autres élèves confondent avec le produit en croix ou la division :

$\frac{3}{4} x \frac{12}{5} = \frac{3x5}{4x12}$ 3 élèves

A part 2 erreurs d'opérations sur les entiers et 4 non réponse, les autres erreurs concernent la confusion avec l'addition ou la simplification :

$\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} x \frac{\cancel{3}x\cancel{4}}{5} = \frac{1}{5}$ 1 élève $\frac{3x5}{4x5} + \frac{12x4}{5x4} = \frac{3+12}{20}$ 1 élève

$\frac{3}{4} x \frac{12}{5} = \frac{3}{4} x \frac{6}{2}$ 1 élève $\frac{83}{20}$ 2 élèves (pour $\frac{63}{20}$ qui est la somme ?)

f) $\frac{3/4}{12/5} =$

15 élèves ne répondent pas à cette question, 3 élèves ne terminent pas le calcul et 8 élèves font des erreurs d'opérations sur les entiers. Les autres erreurs concernent *soit la technique de multiplication des fractions* :

- la réduction au même dénominateur avec éventuellement simplification pour le choix du dénominateur commun : 7 élèves dont

$\frac{3x12}{4x12} x \frac{5x4}{4x12} = \frac{36x20}{48}$ 3 élèves $\frac{3}{4} x \frac{5}{12} = \frac{9x5}{12}$ 3 élèves $\frac{\cancel{3}}{4} x \frac{5}{\cancel{12}_{\,4}} = \frac{5}{4}$ 1 élève

- confusion addition - multiplication : 5 élèves dont

$\frac{3}{4} x \frac{5}{12} = \frac{9+5}{12}$ 1 élève $\frac{36}{48} x \frac{20}{48} = \frac{56}{48}$ 3 élèves $\frac{20+36}{12}$ 1 élève

- produit en croix : $\frac{3}{4} x \frac{5}{12} = \frac{3x12}{4x5}$ 1 élève

- simplification abusive : $\frac{3}{\cancel{4}} x \frac{5}{\cancel{12}_{\,3}} = \frac{15}{3}$ 2 élèves ou $\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} x \frac{5}{\cancel{12}_{\,4}} = \frac{5}{1}$

- inversion du résultat : $\frac{\cancel{3}}{4} x \frac{5}{\cancel{12}_{\,4}} = \frac{16}{5}$ 1 élève

soit la technique de division des fractions :

- pour diviser on ajoute l'inverse : 1 élève
- pour diviser, on multiplie par l'opposé : 1 élève
- 3 élèves font une multiplication à la place d'une division
- 1 élève fait une addition
- 1 élève utilise la règle dans l'autre sens et trouve $\frac{48}{15}$ $(\frac{4}{3} x \frac{12}{5})$

4.2.2. Les erreurs par élève et par classe : détermination de règles d'action erronées

Nous nous intéressons ici aux erreurs qui peuvent s'expliquer par une règle d'action erronée qu'utilise l'élève ; nous serons particulièrement attentive aux erreurs systématiques ou au moins qui se répètent plusieurs fois dans des contextes analogues. Nous écartons les erreurs de calcul sur les entiers et les erreurs de signe ou de calcul dans **Z** qui sont cependant nombreuses. Les erreurs de signe sont particulièrement nombreuses dans la classe F.

Dans la classe A, on ne relève aucune erreur systématique. Un élève écrit $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ mais tout le reste du test est correct, on peut donc penser à un lapsus. Un autre élève utilise un modèle d'addition issu des entiers pour $\frac{3}{5}$ - $\frac{2}{7}$

Dans la classe B, il n'y a pas d'erreur systématique sur l'addition, à part un élève qui ajoute au lieu de soustraire les 2 fois. Un élève fait une fois une erreur dans la technique de réduction au même dénominateur : non changement des numérateurs.
Pour la multiplication, on trouve une réduction au même dénominateur, une confusion avec l'addition et une simplification abusive mais ces erreurs ne sont pas systématiques chez le même élève.

C'est dans la classe C qu'on a le plus d'erreurs de technique opératoire :
6 élèves utilisent des règles d'action issues des entiers pour l'addition ou la soustraction (c'est-à-dire $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ ou $\frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b+d}$) dont 2 systématiquement et 2 autres presque (1 élève utilise alternativement les deux règles). On a aussi des techniques fausses de réduction au même dénominateur utilisées systématiquement :

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+d}{b+d}+\frac{c+b}{d+b}$ ou $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-d}{b-d}-\frac{c-b}{d-b}$: 1 élève

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{axd+c}{d}$ ou $\frac{a+cxb}{b}$ 1 élève

1 élève utilise le produit en croix pour l'addition : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{axd}{bxc}$ ou $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-d}{b-c}$

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{bxd}+\frac{c}{bxd}$ ou autre dénominateur plus simple : 1 élève

Cet élève utilise pour diviser la règle $\frac{a/b}{c/d}=\frac{bxc}{axd}$

Pour les multiplications, on a aussi des règles erronées :
- réduction au même dénominateur : 3 élèves
- produit en croix : 1 élève.

Pour diviser, un élève ajoute l'inverse.

Dans la classe D, il n'y a pas d'erreur systématique.
Deux élèves utilisent des règles issues des entiers pour l'addition, l'un pour $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ mais tout le reste est juste, on peut donc penser à un lapsus, l'autre 2 fois ($\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ et $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{12}$). Un élève réduit au même dénominateur dans la multiplication.

Dans la classe E, il n'y a pas non plus d'erreur systématique : trois élèves font une fois des erreurs techniques dans la réduction au même dénominateur : deux utilisent le même facteur pour les 2 numérateurs et l'autre garde les numérateurs intacts. Deux élèves font des simplifications abusives. Un élève fait une multiplication pour la division et un autre inverse le résultat de la multiplication (qui donnerait le résultat correct) quand il divise.

Dans la classe F, 2 élèves (F_2 et F_7) utilisent une fois des régles d'action issues des entiers pour ajouter ou soustraire. Un élève (F_{20}) fait des produits en croix pour $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}$ et ne répond pas aux autres questions (sauf la première). Deux élèves (F_{25} et F_{23}) réduisent au même dénominateur sans changer les numérateurs. L'un deux le fait systématiquement (F_{25}) ; ce même élève réduit au même dénominateur pour multiplier, ce que fait aussi F_{21} qui par ailleurs confond produit et somme comme F_4 et F_{16} (ce dernier remplace une somme par un produit pour simplifier alors que les deux autres remplacent un produit par une somme).

Dans la classe G, 5 élèves (G_4, G_6, G_{10}, G_{15}, G_{22}) écrivent $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$. L'un d'eux ($G_{15}$) écrit aussi $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$. Cet élève utilise de plus la réduction au même dénominateur pour les multiplications, ce qui est aussi le cas de G_3 ; ce dernier traite de plus la division comme une multiplication.

Dans la classe H, 3 élèves utilisent des règles d'action issues des entiers pour les additions : H_{24} pour $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$. ; H_2 pour $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{2+3}=\frac{1}{5}$! et H_{25} qui l'utilise plusieurs fois et qui confond division et soustraction, il écrit :
$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2x2}{3x2}=\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}=\frac{3}{8}$; $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{3}{5}x\frac{7}{2}$
Un élève (H_4) confond multiplication et somme dans un exercice et réduit au même dénominateur pour multiplier dans l'autre. Un élève (H_3) multiplie pour diviser et un autre (H_{10}) ajoute pour diviser.

Dans la classe I, une seule erreur de technique : I_{11} fait un produit en croix pour multiplier et obtient ainsi le résultat de la division.

<u>En résumé</u>, les modèles d'action issus des entiers
du type $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ ou $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$
tels qu'on avait pu les observer avant apprentissage apparaissent assez peu. Seuls deux élèves (de la classe C) l'utilisent systématiquement et deux autres presque. Ils apparaissent cependant à un moment ou à un autre dans 19 copies. Remarquons qu'ils n'apparaissent pas du tout dans les classes B, E, I. Par ailleurs une réponse conforme à l'utilisation d'une telle règle se produit plus souvent dans le cas de "$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$" , et c'est d'ailleurs la seule erreur concernant cet exemple ! Il semble donc que certaines questions attirent des réponses fausses de ce type même si l'élève n'applique pas systématiquement une règle erronée, ce qui nous incite à la prudence dans l'interprétation en termes de règles utilisées par les élèves.

D'autres erreurs sont dues à de mauvaises règles techniques de réduction au même dénominateur
- que l'on utilise l'addition pour réduire au même dénominateur,
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}+\frac{c+b}{d+b}$ ou $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}-\frac{c-b}{d-b}$
- un des dénominateurs comme dénominateur commun,
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{axd+c}{d}$ ou $\frac{a+cxb}{b}$
- que l'on oublie l'action sur les numérateurs
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{bxd}+\frac{c}{bxd}$ ou autre dénominateur plus simple
- ou que l'on confonde avec le produit en croix :
1 élève utilise le produit en croix pour l'addition : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{axd}{bxc}$ ou $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-d}{b-c}$

Pour les produits, l'erreur la plus fréquente consiste à réduire au même dénominateur:
$\frac{a}{b}x\frac{c}{d}=\frac{axdxcxb}{bxd}$ ou autre dénominateur plus simple.

On trouve aussi une mauvaise utilisation du produit en croix ou des simplifications abusives (numérateur avec numérateur ou dénominateur avec dénominateur), sans compter des confusions avec l'addition.

Pour les divisions, en plus des erreurs déjà signalées sur les produits, on trouve des confusions de règles : ajouter l'inverse ou multiplier par l'opposé, quand on ne remplace pas simplement la division par une autre opération.

Le tableau nous montre que les multiplications et divisions sont en général mieux réussies que les additions et soustractions : le taux de réussite total est en général plus fort sur les produits que sur les sommes. C'est même toujours le cas sauf dans la classe C, pour le pourcentage d'élèves ne faisant aucune erreur, où ils sont d'ailleurs voisins. Il est vrai qu'il y avait moins de produits que de sommes et que les négatifs n'intervenaient que dans les sommes. En fait ce sont les multiplications qui sont les mieux réussies.

classe	A	B	C	D	E	F	G	H	I		total
sommes :											
tout correct	23	15	8	19	15	10	14	21	21	5	151
% tout correct	79,3	65,2	36,4	79,2	60	38,5	53,8	84	87,5		65,4
1 seule erreur	6	6	2	5	10	9	9	2	3	0	52
% au plus une erreur	100	91,3	45,5	100	100	73,1	88,5	92	100		87,9
modèle "entiers"	2	0	6	1	0	1	5	2	0	2	19 (8,2 %)
Erreur de signe	-	5	0	2	3	8	(2)	-	1	1	22
produits											
tout correct	22	18	7	20	20	13	21	21	20	6	166
% tout correct	75,9	78,3	31,8	83,3	80	50	80,8	84	83,3		71,9
1 erreur	7	5	6	4	5	9	5	2	4	1	50
% au plus 1 erreur	100	100	59,1	100	100	84,6	100	92	100		93,5
aucune erreur sur la partie numérique	20	12	3	16	14	7	12	18	17	5	122
% aucune erreur	69	54,5	13,6	66,7	56	28	46,2	72	70,8		52,8
deux erreurs ou plus	3	5	18	1	4	11	5	3	1	2	53
% deux erreurs ou plus	10,3	22,7	81,8	4,2	16	42,3	19,2	12	4,2		22,9
Effectif pour cette question	29	23	22	24	25	26	26	25	24	7	231

Une tache sur les photocopies a entraîné que, pour les élèves de la classe A et une partie de ceux de la classe G, la question 3/5 - 5/6 a été remplacée par 3/5 + 5/6, ce qui évitait les erreurs de signes. Pour les élèves de la classe H, elle a été remplacée par 3/5 : 5/6. Ces élèves ont donc eu 3 questions sur les additions et 3 sur les multiplications, au lieu de 4 et 2.

Tableau n°2 des opérations.

4.2.3. Différences selon les classes.

Bien que les conditions de passation n'aient pas été les mêmes, on peut relever des différences entre les classes au niveau des réussites :

Dans les classes A, D, H, I, les deux tiers des élèves au moins ne font aucune erreur sur la partie numérique et près de 90% en font au plus une.

Dans les classes B, E, G, environ 80% des élèves font au plus une erreur et de 42% à 56% n'en font aucune.

La classe F a un résultat plus faible : 28% des élèves ne font aucune erreur mais plus de 57% en font au plus une. Dans cette classe, aussi bien sur les sommes que sur les produits, il y a un pourcentage important d'élèves qui font une seule erreur. Cela se retrouve d'ailleurs sur l'ensemble du numérique.

Seule la classe C a une performance faible sur cette question : 80% des élèves font au moins 2 erreurs et seulement 13,6% d'entre eux ne font aucune erreur. Sur les sommes en particulier, la majorité des élèves font au moins deux erreurs.

Les emplois systématiques de règles erronées pour l'addition sont relativement rares mais la répartition est là aussi inégale suivant les classes : aucun dans les classes A, B, E, I malgré quelques simplifications abusives dans la classe E. Les modèles d'addition issus des opérations sur les entiers sont utilisés plusieurs fois par 1 élève en D, 2 élèves en F, 1 élève en G, 1 élève en H.

Des erreurs fréquentes dans la réduction au même dénominateur sont faites par 1 élève de la classe B, 3 élèves de la classe E, 3 élèves de la classe F.

C'est dans la classe C qu'on a le plus d'erreurs sur cette partie : 6 élèves semblent utiliser des règles d'action issues des entiers pour l'addition ou la soustraction dont 2 systématiquement et 2 autres presque (1 élève utilise alternativement les deux règles). On a aussi diverses techniques fausses de réduction au même dénominateur utilisées systématiquement par 4 élèves.

Pour les multiplications, l'utilisation au moins une fois des principales règles erronées se répartit comme suit :

- réduction au même dénominateur : 3 élèves dans la classe C ainsi que 1 élève de chacune des classes B, D, F, G, H.
- produit en croix : 1 élève dans les classes C et I.

Dans la classe C un élève ajoute l'inverse pour diviser, dans la classe H, 1 élève multiplie par l'inverse pour soustraire !

4.3. Les comparaisons

Il y avait 4 exercices : comparer $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{8}$, $-\frac{32}{17}$ et $\frac{43}{19}$, enfin $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$ et $\frac{6}{13}$.

Sur les questions de comparaisons, nous distinguons les trois premières où il n'y avait que 2 fractions à comparer et la dernière où il fallait ranger 3 fractions et où la réduction au même dénominateur était assez coûteuse. Deux classes ont des résultats particulièrement faibles sur les comparaisons : la classe C où 41,7 % des élèves réussissent les 3 premiers exercices et 13,6 % réussissent le 4ème et surtout la classe F où ces proportions sont respectivement de 38,5 % et 3,8 %.

Dans toutes les classes sauf C et F, les trois premières questions sont très bien réussies : plus de 60% et même pour 6 classes plus de 70%.

Remarquons cependant qu'assez peu d'élèves utilisent le fait qu'un négatif est plus petit qu'un positif dans leurs justifications (24 élèves en tout) et que cela n'est indiqué par aucun élève dans 2 classes et par 1 seul dans 2 autres. D'ailleurs, dans une des classes (F), la moitié des élèves remplacent $-\frac{32}{17}$ par $\frac{32}{17}$, et, dans presque toutes les classes, il a quelques élèves qui font de même. Le choix des fractions ne permettait malheureusement pas de voir si des élèves avaient traité
$-\frac{32}{17}$ comme $\frac{32}{17}$ en écrivant quand même le signe puisque $\frac{32}{17} < \frac{43}{19}$ est vrai. Il aurait été plus astucieux de demander la comparaison de $-\frac{43}{19}$ et $\frac{32}{17}$: l'ordre des valeurs absolues n'aurait pas été le même que celui des nombres. Beaucoup d'élèves ne donnent pas d'explication pour cette question, on peut penser que certains d'entre eux ont vu l'argument du signe. Mais 15 élèves réduisent au même dénominateur, 11 font la division et 7 le produit en croix dans ce cas !

La réussite diminue considérablement pour le 4ème exercice : si l'on excepte la classe I où cette question est réussie par les 2/3 des élèves et la classe G où la moitié des élèves réussissent, la majorité des élèves des 7 autres classes échouent dans cet exercice.

Les résultats sont résumés dans le tableau n° 3

classe	A	B	C	D	E	F	G	H	I	total	autres
tout correct	13	7	2	6	7	1	13	6	13	74	1
% tout correct	44,8	30,4	09,1	25	28	03,8	50	24	54,2	32	
3 sur 4 corrects	26	19	10	18	18	10	22	19	20	166	4
3 premiers corrects	26	18	10	16	15	10	21	18	17	155	4
% 3 premiers corrects	89,7	78,3	54,5	66,7	60	38,5	80,8	72	70,8	67,1	
4ème correct	13	9	3	8	11	1	13	7	16	82	1
% 4ème correct	44,8	39,1	13,6	33,3	44	03,8	50	28	66,7	35,5	
3 premiers corrects, erreur au 4	11	6	5	8	7	8	5	8	4	64	2
% / 3 premiers corrects	42,3	26,1	50	50	46,7	80	23,8	44,4	23,5	43,2	
réduction même dénominateur	15	1	2	1	3	3	10	16	8	63	4
division	1		6	4				1	15	28	1
produit en croix				11	1					12	
négatif < positif	7			6			7	12	9	42	1
4/7 < 5/8 < 6/13	6	3	3	2	4	12	6	3	0	40	1
4/7 < 5/8 > 6/13	0	6	1	2	0	3	1	3	1	18	1
- 32/17 remplacé par 32/17	3	1	0	3	0	11	2	1	3	25	1

Tableau n°3 des comparaisons.

Réussite à la 4ème question

Beaucoup d'élèves (30 soit 13%) ne répondent pas à cette 4ème question. Il faut dire que 9 élèves dont 5 de la classe C n'abordent pas du tout les comparaisons. Parmi ces 30 élèves, 14 avaient répondu aux 3 premières questions sans autre erreur que de remplacer $-\frac{32}{17}$ par $\frac{32}{17}$ pour 2 d'entre eux.

D'autres élèves (25 au total) font une réponse partielle et semblent ne pas savoir utiliser les signes de comparaison quand il y a 3 nombres en présence : 18 élèves (6 en B, 1 en C, 3 en D, 3 en F, 1 en G, 3 en H, 1 en I) écrivent $\frac{4}{7} < \frac{5}{8} > \frac{6}{13}$ (l'un d'eux -B_2- a en fait une réponse correcte parce qu'il a de plus marqué des numéros d'ordre au-dessus des fractions) ; 5 autres (dans la classe C) écrivent $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{8} > \frac{6}{13}$; un sixième élève de la classe C écrit $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$ et $\frac{6}{13}$. Au total 23 élèves ont une réponse partiellement correcte à cette question. Ils ne sont pas uniformément répartis selon les classes : 7 en C, 5 en B, 3 en D, en F et en H, 1 en G et en I, aucun en A et en E. Un élève (F_{16}) fait une réponse partielle fausse : il écrit $\frac{4}{7} > \frac{5}{8} < \frac{6}{13}$.

Même si 117 élèves ne donnent aucune explication pour cet exercice (presqu'aucun élève des classes B, E, F n'en donne) en regardant celles qui sont fournies et en comparant aux procédures que les mêmes élèves ont utilisées pour comparer 2 fractions, nous pouvons vérifier que la division est plus efficace que les autres procédures pour comparer 3 fractions : les élèves qui utilisent les autres procédures pour les deux premières restent parfois sans réponse pour la quatrième et ceux qui gardent la même procédure échouent plus souvent (pour le produit en croix ce n'est pas significatif car seuls 4 élèves de la classe D l'utilisent dans ce cas).

- 33 élèves utilisent la réduction au même dénominateur pour la comparaison des 3 fractions, 17 réussissent, 2 donnent une réponse partielle et 14 une réponse fausse ; 3 élèves utilisent la réduction au même numérateur, 2 réussissent, 1 fait une erreur de calcul
- 58 élèves utilisent la réduction au même dénominateur pour les deux premières questions dont 32 ne répondent pas ou fournissent une réponse fausse (le plus souvent sans explication) pour la quatrième.
- 4 élèves (tous de la classe D) utilisent le produit en croix pour la quatrième question dont 3 réussissent.
- 12 élèves (dont 11 de la classe D) utilisent le produit en croix pour les deux premières questions ; 5 ne répondent pas ou font une erreur à la quatrième question.
- 20 élèves (dont 13 dans la classe I) utilisent la division à la quatrième question ; 16 réussissent
- 19 élèves (dont 11 dans la classe I) utilisent la division aux deux premières questions, parmi eux 2 élèves donnent des réponses partielles à la 4ème question, les autres réussissent

De plus pour les élèves qui ont donné une explication pour la quatrième question, on peut parfois trouver la cause de leur erreur : 12 élèves ont fait une erreur explicitement due à la réduction au même dénominateur (plus 1 qui réduit au même numérateur) alors qu'il n'y avait que 3 élèves dans ce cas pour les 3 premières questions. Un élève fait des produits en croix sans conclure. Les élèves qui ne disposent que de la réduction au même dénominateur ou du produit en croix échouent donc plus souvent à la 4ème question que ceux qui pensent à la division qui demande une moindre maîtrise technique, surtout quand on dispose d'une calculette, comme dans la classe I.

Examinons maintenant les réponses fausses données sans explication à cette question. Il y avait 6 ordres possibles pour les 3 fractions donc 5 réponses erronées possibles. Or elles n'apparaissent pas de façon équilibrée, ce qui permet de penser que les élèves ne répondent pas au hasard.

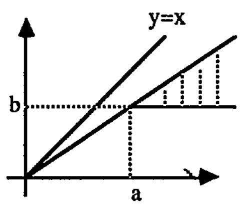
Ordre $\frac{4}{7} < \frac{5}{8} < \frac{6}{13}$

Le grand nombre (17,3%) de réponses $\frac{4}{7} < \frac{5}{8} < \frac{6}{13}$ à la 4ème question nous amène à examiner d'un peu plus près les autres réponses de ces élèves. Sur les 40 qui ont fait cette réponse, 35 avaient répondu correctement aux 3 premières questions (en remplaçant éventuellement $-\frac{32}{17}$ par $\frac{32}{17}$ pour quelques-uns) dont 30 n'avaient donné aucune explication. Un de ces élèves avait fait un produit en croix pour comparer $-\frac{32}{17}$ et $\frac{43}{19}$ et quatre autres avaient fait des réductions au même dénominateur.

Or si les élèves utilisent la règle de comparaison erronée :

$$a < c \text{ et } b < d \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

cette règle leur donne des réponses justes aux 3 premières questions. Il se peut donc qu'ils l'aient utilisée, même pour les premières questions. Des réponses correctes aux trois premières questions ne permettent donc pas de savoir s'ils utilisent une technique de comparaison correcte dans le cas où ils ne donnent pas d'explication. Remarquons que cette règle donne souvent des résultats justes pour les fractions plus petites que 1, comme le montre le graphique ci-contre :



Seules les $\frac{c}{d}$ dans la zone hachurée sont plus petites que $\frac{a}{b}$ avec a < c et b < d. La règle donne d'autant plus de réponses justes que $\frac{a}{b}$ est petite.

D'ailleurs un élève (C_{17}) explique *"pour comparer deux fractions je regarde le plus grand dénominateur ainsi que le numérateur et si le dénominateur et le numérateur sont plus grand alors je mets le signe supérieure vers cette fraction"* ; en fait il n'a pas su utiliser sa règle pour 3 fractions et a écrit $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{8}$ $\frac{6}{13}$.

Un élève (H_{22}) fait un classement de toutes les fractions qui laisse penser qu'il utilise bien une règle de ce genre pour classer beaucoup de fractions :

il écrit $-\frac{32}{17}<\frac{3}{5}<\frac{3}{7}<\frac{4}{7}<\frac{5}{8}<\frac{5}{9}<\frac{6}{13}<\frac{43}{19}$

Pour un autre élève (H_1), il semble qu'il compare les dénominateurs avant de comparer les numérateurs : avant chaque réponse, il a écrit et barré

$\frac{3}{7}<\frac{4}{7}<\frac{4}{8}<\frac{5}{9}$ avant $\frac{3}{7}<\frac{5}{9}$; $\frac{3}{5}<\frac{4}{6}<\frac{6}{5}<\frac{5}{8}$ avant $\frac{3}{5}<\frac{5}{8}$

$-\frac{32}{17}<-\frac{42}{17}<-\frac{66}{17}<\frac{43}{19}$ avant $-\frac{32}{17}<\frac{43}{19}$; $\frac{4}{7}<\frac{10}{7}<\frac{5}{8}<\frac{20}{8}<\frac{6}{13}$ avant $\frac{4}{7}<\frac{5}{8}<\frac{6}{13}$

Dans le deuxième exemple $\frac{6}{5}$ est peut-être écrit à l'envers, mais remarquons que pour l'ordre des négatifs, cet élève ne tient pas compte du signe !

Les règles utilisées par les élèves ne sont peut-être pas construites directement à partir de ce qu'ils savent sur les entiers mais peuvent être obtenues par combinaison de techniques apprises à propos des rationnels eux-mêmes. Par exemple, un autre moyen d'arriver à la réponse $\frac{4}{7}<\frac{5}{8}<\frac{6}{13}$ est d'utiliser une réduction au même dénominateur suivie d'une simplification, comme le fait l'élève F_{25} qui écrit successivement

$\frac{3\times9}{7\times9}\ \frac{5\times7}{7\times9} = \frac{27}{7\times9}\ \frac{35}{7\times9} = \frac{27}{63}<\frac{35}{63}$; $\frac{3}{5\times4\times2}\ \frac{5}{5\times4\times2} = \frac{3\times\cancel{4\times2}}{5\times\cancel{4\times2}}\ \frac{\cancel{5}\times5}{\cancel{5}\times4\times2} = \frac{3}{5}<\frac{5}{8}$

$\frac{32\times\cancel{19}}{17\times\cancel{19}}\ \frac{49\times\cancel{19}}{17\times\cancel{19}} = \frac{32}{17}<\frac{49}{19}$; $\frac{4\times\cancel{4\times2\times13}}{7\times\cancel{4\times2\times13}}\ \frac{\cancel{7\times13}\times5}{\cancel{7}\times4\times2\times\cancel{13}}\ \frac{\cancel{7\times4\times2}\times6}{\cancel{7\times4\times2}\times13} = \frac{4}{7}<\frac{5}{8}<\frac{6}{13}$

Cette technique revient à ranger les fractions dans l'ordre de leurs numérateurs.

Ordre inverse : $\frac{5}{8}<\frac{4}{7}<\frac{6}{13}$

16 élèves donnent l'ordre inverse. Parmi eux, 2 donnent l'ordre inverse pour toutes les questions et 2 autres le donnent pour toutes les questions sauf pour $-\frac{32}{17}<\frac{43}{19}$. Pour ces 4 élèves on peut se demander s'il s'agit d'une mauvaise utilisation du signe < mais ce n'est pas sûr du tout car l'un des élèves qui inverse l'ordre pour toutes les questions le fait après avoir barré une réduction au même dénominateur pour les 3 premières questions.

Ordre $\frac{6}{13}<\frac{5}{8}<\frac{4}{7}$

10 élèves donnent cette réponse qui peut être obtenue avec la règle de comparaison des dénominateurs : plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite. Parmi ces 10 élèves, un seul (F_7) donne aux premières questions une réponse cohérente avec l'utilisation de cette règle : $\frac{3}{7}>\frac{5}{9}$ $\frac{3}{5}>\frac{5}{8}$ $-\frac{32}{17}<\frac{43}{19}$; les deux premières réponses ont d'ailleurs été corrigées : c'est l'ordre inverse qui avait été donné dans un premier temps.

Autres réponses

Les autres classements sont beaucoup plus rares et pourraient provenir d'erreurs de calcul ou de réponses au hasard : 5 élèves répondent $\frac{4}{7}<\frac{6}{13}<\frac{5}{8}$ dont 4 dans la classe D ; 2 élèves de la classe H répondent $\frac{5}{8}<\frac{6}{13}<\frac{4}{7}$
Enfin, on trouve des égalités : 2 élèves de la classe F écrivent $\frac{4}{7}=\frac{5}{8}>\frac{6}{13}$ (est-ce l'écart entre 4 et 7 d'une part, 5 et 8 d'autre part qui a joué ?) ; F_2 écrit $\frac{4}{7}=\frac{5}{8}<\frac{6}{13}$; E_8 $\frac{4}{7}<\frac{5}{8}=\frac{6}{13}$; enfin C_2 répond $\frac{4}{7}=\frac{5}{8}=\frac{6}{13}$

4.4. L'axe gradué

Le placement sur l'axe gradué est l'exercice le moins bien réussi dans toutes les classes : le meilleur score de réussite totale est de 1/3 dans la classe I. Dans la classe G, le taux de non réponse à cette question a été important : 4/26 ; de plus beaucoup d'élèves répondent très partiellement, il en est de même dans la classe F.

Rappelons qu'il s'agissait de placer sur un axe gradué où les entiers 1, 2, 3 étaient placés (échelle 5 cm pour 1 unité) les nombres suivants : 1,5 ; -0,3 ; $\frac{13}{20}$; 0,75 ; $\frac{45}{25}$; $-\frac{3}{4}$; $\frac{14}{12}$; 0,65 ; $-\frac{1}{10}$; 1,1.

Il faut noter que 2 des classes n'étaient pas dans les mêmes conditions que les autres : la classe C et la classe F ont répondu sur des feuilles de copie (donc du papier quadrillé). Dans la classe C, les élèves ont respecté l'échelle proposée (6 cm pour 1 unité), parfois en traçant l'axe en biais, ce qui fait que le problème n'était finalement pas très différent : ils ne se sont pas servi des carreaux puisque l'unité ne comportait pas un nombre entier de carreaux. Dans la classe F, par contre, les élèves ont gradué à leur guise et se sont servis des carreaux ; mais 11 d'entre eux n'ont pas gradué régulièrement en entiers, et pour 4 autres, la graduation n'était que très approximativement régulière ! C'est d'ailleurs dans cette classe qu'on a le plus faible pourcentage de décimaux placés correctement. Les résultats sont résumés dans le tableau n° 4 :

classe	A	B	C	D	E	F	G	H	I	autres	total
tout bien placé	9	2	3	2	0	3	1	5	9	0	34
8/10 bien placés	10	12	3	10	4	2	2	7	8	2	60
% au moins 8	65,5	60,9	27,3	50	16	19,2	11,5	48	70,8		40,7
décimaux positifs	21	16	15	13	5	11	7	16	19	1	124
% décimaux	72,4	69,6	68,2	54,2	20	42,3	26,9	64	79,2		53,7
1,5 bien placé	29	23	17	24	17	21	10	23	23	7	194
% 1,5	100	100	77,3	100	68	80,8	38,5	92	95,8		84
erreurs/négatifs	1	1		1		4	3	5	0	1	16
-1/10 bien placé	23	13	9	14	2	5	5	12	14	4	101
13/20 = 0,65	17	12	4	13	4	3	5	10	16	3	87
"modèle cm"	2	7	4	2	2	3	4	5	3	1	33
intervalles entiers non resp.	4	4	2	2	10	2	9	5	1	1	40
	13,8	17,4	9,1	8,3	40	7,7	34,6	20	4,2		17,3
non réponse	0	0	0	0	1	2	6	1	0	0	10

Tableau n° 4. Axe gradué.

En plus de la réussite globale, nous regardons les points suivants :

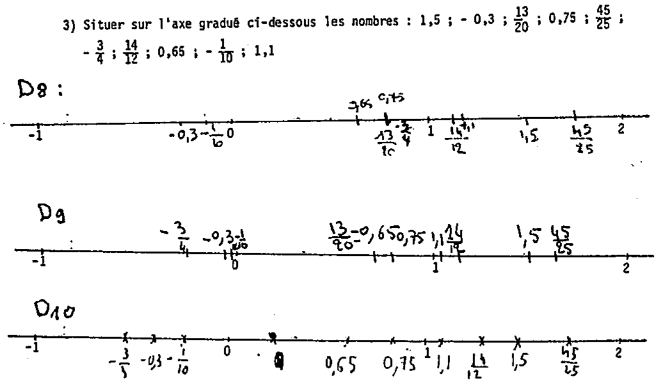
- *erreurs dues aux négatifs* : elles ne sont pas très nombreuses, mais présentes dans presque toutes les classes. Cependant, dans la classe E, seuls 2 élèves placent correctement $-\frac{1}{10}$; les réponses à cette question ne sont d'ailleurs pas beaucoup plus brillantes dans les classes F et G. Nous avons considéré comme erreurs dues aux négatifs deux types d'erreurs : le placement à partir de -1 : $-\frac{1}{10}$ placé à $\frac{1}{10}$ de -1, ou le placement d'un nombre à la place de son opposé (ce peut être le nombre demandé, par exemple -0,3, mais indiqué par l'élève 0,3 alors qu'il est placé sur la partie négative de l'axe). Pour un élève, nous n'avons pas compté l'erreur précédente parce que tous les points étaient parfaitement placés sur l'axe : nous avons considéré qu'il s'agissait d'un lapsus. Remarquons que si un élève a écrit 0,3 et qu'il l'a placé correctement sans autre erreur, nous avons considéré la réponse comme correcte ; ce cas est assez rare. Il y a d'autres erreurs sur le placement des nombres négatifs, plus difficiles à interpréter, au total les erreurs sur les négatifs sont donc bien plus nombreuses que ce qui est indiqué là.

- *élèves ayant bien placé les décimaux* : nous avons ici comptabilisé les élèves qui utilisent correctement l'échelle, au moins avec un placement approximatif, sans tenir compte des erreurs dues au signe : par exemple si 0,75 est placé en -0,75, nous avons considéré ici que c'était un placement correct. Par contre, dans ce même cas, nous avons considéré que l'ordre sur les décimaux était incorrect. On peut ainsi trouver des élèves qui ont fait un placement correct des décimaux avec un ordre incorrect, et bien sûr réciproquement des élèves qui ont donné un ordre correct et un placement incorrect. Nous avons en fait indiqué dans le tableau, sous la rubrique "décimaux placés", le nombre d'élèves qui font au plus une erreur ou un oubli sur les décimaux ; sous la rubrique "ordre décimaux", le nombre d'élèves qui ont rangé dans un ordre correct tous les décimaux qu'ils ont placés à condition qu'ils en aient placé au moins 4. Nous n'avons considéré comme décimaux que les nombres donnés en écriture à virgule : -0,3 0,65 0,75 1,1 1,5 ; une proportion relativement importante d'élèves ont traduit les fractions en écriture décimale, mais c'est loin d'être le cas de tous et des élèves ont un traitement différent pour $-\frac{1}{10}$ et les décimaux.

Dans toutes les classes, il y a un décalage entre la réussite globale et la réussite sur les décimaux ; il est particulièrement important dans la classe F où beaucoup d'élèves n'ont pas placé les fractions. Remarquons que des élèves respectent l'ordre des décimaux sans les placer correctement : c'est particulièrement net dans la classe G. Il faut noter que les décimaux -0,3 ; 0,65 ; 0,75 ; 1,1 ; 1,5 étaient faciles à ordonner. Quand des élèves n'ont pas fourni l'ordre correct, c'est le plus souvent soit par une erreur de signe, soit parce qu'ils en avaient placé trop peu.

- *élèves ayant bien placé 1,5* : la réussite est assez bonne dans presque toutes les classes sauf dans la classe G où il y a beaucoup de non réponse à cet exercice et des placements de 1,5 sans respecter l'échelle.

- *placement exact ou approximatif* : certains élèves marquent sur leur axe une graduation en dixièmes ; ils sont peu nombreux et on les trouve surtout dans les classes A, F, D et B. Qu'ils marquent ou non une graduation, certains élèves marquent les points, en respectant exactement l'échelle et donc en faisant usage de leur règle graduée ; d'autres ont fait un placement approximatif "à vue d'œil". Dans les classes A et I, le placement est presque toujours exact et s'il y a des erreurs, elles sont nettes. Dans les autres classes, la plupart des élèves placent les nombres de façon approximative : nous avons finalement considéré comme correct un placement approximatif où l'échelle est à peu près respectée "à l'œil" et comme incorrect un placement qui met un ordre sur les nombres sans se préoccuper de l'échelle. La limite entre les deux est parfois difficile à trouver. Par exemple nous avons considéré que D_8 avait placé correctement les décimaux et que ce n'était pas le cas pour D_9 et D_{10}.



- *élèves ayant remarqué que* $\frac{13}{20} = 0,65$: cette question est réussie par plus de la moitié des élèves dans 4 classes : A, B, D, I et par moins d'un élève sur 5 dans les classes C, E, F, G. Certains élèves oublient $\frac{13}{20}$ ou 0,65 : dans ce cas on peut penser qu'ils ont peut-être vu l'égalité et n'ont pas placé 2 fois le même nombre ; nous n'avons fait cette hypothèse que dans le cas où tout le reste était placé, cela ne s'est produit que 1 ou 2 fois. Pour $\frac{13}{20}$, l'erreur la plus fréquente est un placement vers 0,6. Pour certains élèves, il s'agit manifestement d'une erreur de calcul : $\frac{13}{20} = 0,605$ ou $\frac{13}{20} = 0,55$.

- *élèves utilisant un modèle de type "centimètre"*, c'est à dire se référant d'une manière ou d'une autre aux mm pour les dixièmes : il y en a dans toutes les classes et particulièrement en B (5 élèves sur 23). Bien que cela se produise parfois (cf C_{18}, C_{22}, F_{16}, G_7 ou E_{18}), la référence aux millimètres n'est en général pas systématique, elle peut même intervenir avec des placements corrects ; nous n'avons cependant retenu que les cas où elle était suffisamment nette et où il était improbable qu'il s'agisse d'un placement approximatif sans prise en compte réelle de l'échelle.

Nous allons regarder de plus près les réponses des élèves qui font cette erreur :

A_{20} : $-\frac{1}{10}$ placé 1 cm avant 0, -0,3 placé 3 cm avant 0, $\frac{13}{20} = 0,65$ placé à 6,5 cm de 0 ; 1,1 et 1,5 sont placés correctement, les autres points sont placés de façon approximative.

A_{27} a gradué son axe en 1/2 cm (donc 12 dans 1 unité) et a placé $-\frac{1}{10}$ à la 2ème graduation (1 cm) avant 0, $-\frac{3}{4}$ à la 3ème, -0,3 à 3 cm avant 0 ; 1,5 est placé correctement mais 1,1 est 1 cm après 1 et 0,65 et 0,75 sont placés respectivement 6,5 mm et 7,5 mm après 0.

B_1 : -0,3 à 3 mm de 0 ; 0,1 à 1mm de 0 ; 1,1 à 1 mm de 1 ; 1,8 à 2 mm de 2; 0,75 à 5 mm de -1 et 0,75 à 5 mm de 1 ; 0,65 1 cm avant 0,75 et 1,1666 entre 1,5 et 1,8

B_3 dessine une graduation en dixièmes et place correctement 8 nombres sur 10, mais place $-\frac{1}{10}$ 1 mm avant 0 et 1,1 à 1,1 cm à gauche de 0.

B_9 place -0,3 à 3 mm à gauche de 0 ; 0,65 et 0,75 respectivement à 6,5 et 7,5 mm à droite de 0 mais $-\frac{1}{10}$, remplacé par $\frac{1}{10}$ à 1,6 cm à droite de 0 ; 1,1 et 1,5 sont correctement situés.

B_{14} place -0,3 à 3mm à gauche de 0 ; pour les autres nombres, il a plutôt un placement approximatif.

B_{24} place les décimaux négatifs -0,75 -0,3 -0,1 respectivement à 7,5 3 et 1 millimètre à gauche de 0 ; les décimaux positifs sont placés de façon approximative

B_{25} place -0,75 et -0,3 respectivement 7,5 et 3 millimètres avant 0 ; les décimaux positifs : 0,65 0,75 1,1 1,5 et 1,8 sont placés en respectant approximativement l'échelle.

C_8 place correctement 1,5 mais 0,65 = $\frac{13}{20}$ à 6,5 mm de 0 ; les autres nombres ne sont pas placés.

C_{10} place correctement -0,3, $-\frac{1}{10}$ et 1,5 mais 0,65 = $\frac{13}{20}$ et 0,75 respectivement à 6,5 et 7,5 mm de 0, et aussi 1,1 à 1,1 cm de 0.

C_{18} place 0,65 et 0,75 respectivement à 6,5 et 7,5 mm de 0 ; 1,1 à 1mm de 1 et il place même 2 fois 1,5 : à 1,5 cm de 0 et à 5 mm de 1 ! Les autres nombres ne sont pas placés.

C_{22} place les entiers -1, 0, 1 avec l'échelle donnée (6 cm) mais il place un autre 1 à 1 cm de 0, et c'est avec cette échelle qu'il place -0,3, 0,65 = $\frac{13}{20}$, 0,75, 1,5 ; les autres nombres manquent.

C_{25} place $-\frac{1}{10}$ à 1 mm de 0, un premier 0,65 très près de 0, un deuxième presque correct, 0,75 ; 1,1 ; $\frac{14}{12}$; 1,5 correctement.

D_{12} place $-\frac{3}{4}$ et $-\frac{1}{10}$ respectivement à 7,5 mm et 1 mm à gauche de -1 mais -0,3 est à gauche de 0 (5 mm environ) ; 1,1 est à 1 mm de 1 mais les autres nombres sont placés en respectant approximativement l'échelle.

D_{21} marque une graduation en dixièmes qui lui permet de placer correctement -0,3, $-\frac{3}{4}$ = -0,75 ; 0,605 (=13/20 !) ; 0,65 ; 0,75 et 1,5, mais il place 1,1 à 1 mm de 1, $-\frac{1}{10}$ à 2 mm à gauche de 0 et 0,1 à 1,5 mm à droite !

D'_{26} place 1,1 à 1 mm de 0, 0,3 à 6 mm à gauche de 0 $-\frac{3}{4}$ = 0,75 et 1,5 sont placés à peu près correctement ; les autres nombres n'apparaissent pas.

E_{11} place correctement 1,5 mais $-\frac{3}{4}$ et -0,3 respectivement à environ 7,5 mm et 3 mm à gauche de 0 ; 1,1 et $\frac{45}{25}$ à 1 mm et 8 mm à droite de 1. Les placements de $\frac{1}{10}$, 0,6, 0,65, 0,75 sont difficiles à expliquer.

E_{18} fait une graduation irrégulière pour placer -1, 0, 1, mais à partir de 0 et de 1, il fait une graduation en mm et place de cette façon -0,7, -0,3, 0,6, 0,75, 1,5, 1,8.

E_{19} a une graduation irrégulière pour les entiers, il a placé 4 nombres de façon approximative (sans tenir compte du signe) mais à partir de 1, il a fait une graduation en mm pour placer 1,1 et 1,5.

E_{21} a placé $-\frac{3}{4}$ et -0,3 à 7,5 et 3 mm à gauche de 0 ; $\frac{14}{12}$ à 1mm de 1 ; pour $\frac{1}{10}$, 0,6, 0,65, 0,75, c'est moins net mais les placements correspondent presque aux mesures en mm, $\frac{14}{12}$ est à 2 mm de 1 ; un premier placement de 1,5 à 5 mm de 1 est barré et remplacé par un placement à peu près correct (mais l'échelle sur les entiers n'est pas régulière.

F_7 fait une graduation en mm à partir de 0 et place -0,3 à 3 mm de 0 ; il place aussi 1,1 à 1 mm de 1 ; 0,65 et 0,75 sont entre 1,1 et 1,5 mais la distance à 1 ne paraît pas significative ; 1,5 est bien placé.

F_{16} place 0,3 à 3 mm de 0, 0,75 à 7,5 mm de 0 et 1,5 à 1,5 cm de 1. Il ne place rien d'autre.

F_{18} place -0,3 à 3 mm à gauche de 0 et 1,5 à 5 mm à droite de 1, le reste n'est pas placé.

G_6 place correctement 1,5 mais 0,75 est à 7,5 mm de 0 ; -0,3, noté 0,3 est à environ 5 mm à gauche de 0 ; le reste n'est pas traité.

G_7 place -0,3 à 3 mm à gauche de 0, 0,65 et 0,75 à 6,5 mm et 7,5 mm à droite ; 1,1 et 1,5 à 1,1 cm et 1,5 cm à droite de 1 ; les fractions ne sont pas placées.

H_1 place $-\frac{1}{10}$ à 1 mm à droite de -1, -0,3 à 3 mm à gauche de 0 et 1,1 à 1 mm de 1 ; 1,5 est bien placé, 0,65 et 0,75 approximativement, $\frac{13}{20}$ et $\frac{14}{12}$ sont après 1,5, $-\frac{3}{4}$ et $\frac{45}{25}$ ne sont pas placés.

H_2 place tout de façon approximativement correcte, sauf 1,1 à 1 mm de 1.

H_{17} fait la même chose et place de plus $\frac{13}{20}$ avant 0,65.

H_{22} fait des erreurs sur les négatifs et les fractions et place 1,1 à 1 mm de 1.

I_{11} place -0,3 et $-\frac{1}{10}$ à 3 mm et 1 mm à gauche de 0, 1,1 à 2 mm à droite de 1 ; pour le reste, c'est moins net : -0,75 est à 1,5 cm de 0 ; 0,65 et 0,75 sont respectivement 1 cm et 1,5 cm après 1, 1,8 est 7 mm après 1,5.

Même pour des élèves qui ont une bonne réussite à cet exercice, la tentation d'utiliser la règle graduée telle quelle est grande : des élèves comme A_{12} ou A_{23} ont placé correctement presque tous les points et situé 1,1 à 1 cm de 1 (peut-être s'agit-il d'une évaluation approximative d'un dixième. Pour d'autres c'est encore plus net : nous avons vu que B_3 dessine une graduation correcte et place bien 8 points sur 10 mais recourt au "modèle cm" pour les 2 autres. H_2 et H_{17} le font seulement pour 1,1.

- *élèves ne plaçant pas certains nombres dans l'intervalle entre 2 entiers correct* : on en trouve dans toutes les classes et particulièrement en E (10/25) et en G (10/26). Se trouvent nécessairement dans ce cas les élèves qui ont mis un nombre à la place de son opposé. Les autres erreurs de ce type sont le plus souvent dues aux fractions. On trouve aussi quelques élèves qui oublient la partie entière de nombres non entiers. C'est parfois le cas d'élèves ayant une bonne réussite par ailleurs comme B_{12} qui place 1,1 à la place de 0,1 et le reste correctement ou C_1 qui n'a pas eu assez de place pour faire son axe gradué jusqu'à 2 (il est dans la classe où les élèves ont redessiné l'axe gradué sur leur copie avec la même échelle) et qui a placé $\frac{14}{12}$, 1,5 et $\frac{45}{25}$ entre 0 et 1 en décalant exactement d'une unité.

4.5. L'intercalation

Il s'agissait de donner, si possible, un ou plusieurs nombres compris entre $\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{7}$; entre 1,39 et 1,4 ; entre 3,1 et 3,12 ; entre $\frac{31}{7}$ et 4,42. Les résultats sont rassemblés dans le tableau n° 5

Tableau 5. Intercalation

classes	A	B	C	D	E	F	G	H	I	autres	total
effectif	29	23	22	24	25	26	26	25	24	7	231
tout correct	11	4	1	1	4	2	0	7	9	1	40
% tout correct	37,9	17,4	4,5	4,2	16,0	7,7	0,0	28,0	37,5	14,3	17,3
3/4 corrects	14	4	7	7	1	3	4	9	6	2	57
% 3 corrects au moins	86,2	34,8	36,4	33,3	20,0	19,2	15,4	64,0	62,5	42,9	42,0
2/4 corrects	3	7	8	5	7	1	11	3	6	1	52
1/4 correct	1	6	3	6	3	4	2	4	3	1	33
0/4 correct	0	2	0	5	3	8	1	0	0	1	20
non réponse totale	0	0	3	0	7	8	8	2	0	1	29
rep. corr. 3/7 4/7	22	8	12	12	7	8	9	21	17	2	118
%	75,9	34,8	54,5	50,0	28,0	30,8	34,6	84,0	70,8	28,6	51,1
rep. corr. 1,39 1,4	28	16	13	16	12	6	13	18	19	5	146
%	96,6	69,6	59,1	66,7	48,0	23,1	50,0	72,0	79,2	71,4	63,2
rep. corr. 3,1 3,12	29	16	16	16	13	7	14	18	23	6	158
%	100	69,6	72,7	66,7	52,0	26,9	53,8	72,0	95,8	85,7	68,4
(dont 3,11 seul)	16	9	15	10	9	5	10	10	17	5	106
% sur corr. 3,1 3,12	55,2	56,3	93,8	62,5	69,2	71,4	71,4	55,6	73,9	83,3	67,1
rep. corr. 31/7 4,42	15	9	4	6	4	2	0	7	10	2	59
%	51,7	39,1	18,2	25,0	16,0	7,7	0,0	28,0	41,7	28,6	25,5
pour 3/7 4/7											
3,i/7	8	1	9	3	1	2	4	17	1	1	47
decimaux ≠ de 0,5	7	7	2	7	5	4	1	5	9	2	49
1/2 ou 0,5 seul	1	1	1	0	1	0	1	0	3	0	8
fraction autre que 1/2	6	1	0	2	0	2	3	0	4	0	18
pour 31/7 et 4,42											
non réponse partielle	7	4	2	5	7	9	9	5	5	1	54
impossible	1	4	1	4	4	1	4	0	5	1	25
% N.R. part. ou impos.	27,6	34,8	13,6	37,5	44,0	38,5	50,0	20,0	41,7	28,6	34,2
modèle "entier"	0	4	3	1	4	8	3	2	0	1	26
% modèle entier	0,0	17,4	13,6	4,2	16,0	30,8	11,5	8,0	0,0	14,3	11,3
taux de reussite	80.2	51.1	50	46.9	36	22.1	36.5	65	71.9		

Les réussites diffèrent selon les classes et selon les exercices. Les exercices les mieux réussis sont ceux qui portent sur les décimaux, le moins bien celui qui mêle fractions et décimaux. L'ordre de réussite des exercices est pratiquement le même dans toutes les classes : 3-2-1-4. Seule la classe H réussit mieux l'exercice 1. Remarquons cependant que si les élèves réussissent mieux l'exercice portant sur 3,1 et 3,12, ils ne proposent le plus souvent que 3,11 : 52 élèves seulement sur les 231 qui ont passé l'épreuve donnent d'autres réponses correctes.

La difficulté d'utiliser des décimales qui ne sont pas données est encore bien illustrée par les réponses de I_{12} que nous reproduisons ci-dessous. Il semble que le fait de pouvoir donner beaucoup de décimales grâce à la calculatrice n'aide pas pour le cas où on fait le calcul de tête.

entre $\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{7}$: $\frac{3}{7}$ = 0,4285714 $\frac{4}{7}$ = 0,5714285 nombre compris : 0,5042357
entre 1,39 et 1,4 :
entre 3,1 et 3,12 : nombre compris 3,10
entre $\frac{31}{7}$ et 4,42 : $\frac{31}{7}$ = 4,42

Nous allons examiner les erreurs pour chaque question.

a) entre 3/7 et 4/7

Cette question est réussie par près de la moitié des élèves (49,78%), mais la réussite est en grande partie due à la procédure qui consiste à faire abstraction des dénominateurs et à choisir des nombres entre 3 et 4, sachant qu'il s'agit de septièmes, c'est à dire à proposer des nombres de la forme $\frac{3.i}{7}$ C'est le cas de 47 élèves sur les 115 qui fournissent une réponse correcte, soit 40,9%. Les autres réponses correctes sont le plus souvent des décimaux (49 sur 115) et assez rarement des fractions (17 sur 115, soit 14,8%). Les erreurs sont les suivantes :

- impossible : 22 élèves
- non réponse partielle : 36 élèves
- répètent une des bornes : 3 élèves
- donnent des fractions fausses : 10 élèves ; l'erreur peut être vénielle comme pour B_{17} ou plus grave comme pour C_{17}.

B_{17} a proposé $\frac{35}{10}, \frac{36}{10}, \frac{37}{10}, \frac{38}{10}$ sans doute au lieu de $\frac{35}{70}$ ...

C_{17} a proposé $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

- donnent des décimaux faux : 15 élèves ; 1 autre ne donne pas de réponse mais écrit $\frac{3}{7}$ = 0,4 ; $\frac{4}{7}$ = 0,5 ; plusieurs élèves proposent des décimaux faux à cause de cette même erreur qui consiste à identifier la fraction avec sa valeur décimale approchée à $\frac{1}{10}$ près. D'autres l'identifient avec la valeur approchée à $\frac{1}{100}$ près et proposent 4,42 parmi leurs réponses. Certains ont oublié le dénominateur et proposé des décimaux entre 3 et 4.

b) entre 1,39 et 1,4.

C'est en fait la question la mieux réussie : 63,2% de réponses correctes au total et plus de 48% de réponses correctes dans toutes les classes, sauf la classe F. De plus les élèves proposent presque toujours plusieurs réponses.

Les erreurs sont les suivantes :

- impossible : 17 élèves
- non réponse partielle : 20 élèves
- répètent une des bornes : 2 élèves
- réponse 1,40 : 3 réponse 1,390 : 1 élève
- "modèle entier" : 7 élèves ; il s'agit d'élèves qui comparent les décimaux de même partie entière en comparant les parties décimales comme des entiers et qui proposent 1,38 ; l'un d'eux écrit même : 1,38 ; 1,37 ; ... 1,3.
- autres erreurs : 6 élèves. Notons parmi ceux-là 2 élèves de la même classe qui intercalent un 0, procédure que nous avions repérée avant apprentissage et qui proposent respectivement : 1,031 ; 1,032 ; 1,033 ; 1,034 ; 1,035 ... pour H_{10} et 1,039 ; 1,040 pour H_{21}.

F_{25} écrit 1,4 et 1,39 sous forme de fraction et propose :

$$\frac{14}{10}; \frac{15}{11}; \frac{16}{12}; \frac{17}{13}; \frac{17,1}{13}; \ \dots \ \frac{139}{100}$$

il adopte cette procédure également pour 3,1 et 3,12 et pour $\frac{31}{7}$ et 4,42 ses réponses de la forme $\frac{3.i}{7}$ sont correctes pour la première question.

c) entre 3,1 et 3,12

C'est l'exercice qui a le plus fort pourcentage de réussite si l'on accepte 3,11 seul et le plus faible si l'on exige d'autres réponses. Il semble qu'il y ait sur cet exemple une difficulté particulière à passer à des nombres qui utilisent davantage de décimales et que les élèves ne le font que s'ils y sont vraiment contraints. Beaucoup d'élèves ont donné plusieurs réponses à toutes les questions et une seule à celle là. A cet égard, F_{11} est exemplaire, nous reproduisons ci-dessous ses réponses :

entre $\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{7}$: 0,43 ; 0,44 ; 0,45 ; 0,46 ; 0,47 ; 0,48 ; 0,49 ; 0,50 ; 0,51 ; 0,52 ; 0,53 ; 0,54 ; 0,55 ; 0,56 ; 0,57
entre 1,39 et 1,4 : 1,391 ; 1,392 ; 1,393 ; 1,394 ; 1,395 ; 1,396 ; 1,397 ; 1,398 ; 1,399
entre 3,1 et 3,12 : 3,11
entre $\frac{31}{7}$ et 4,42 : 4,427 ; 4,426 ; 4,425 ; 4,424 ; 4,423 ; 4,422 ; 4,421

Certes, le principe d'économie joue : on a déjà une réponse facilement, on a moins envie de se fatiguer pour en trouver d'autres comme dans le cas précédent. Mais il n'est pas sûr que ce soit la seule raison qui différencie ces exercices : il est peut-être plus facile pour les élèves de continuer à allonger la partie décimale la plus longue que d'allonger la plus courte.

Les erreurs sont les suivantes :
- impossible : 4 élèves
- non réponse partielle : 5 élèves
- répète 1 borne : 1 élève
- réponse 3,10 : 1 élève
- "modèle entier" : 24 élèves
- autres : 5 élèves

On voit que les élèves ne s'abstiennent pas sur cette question, et que l'erreur la plus fréquente consiste à considérer séparément partie entière et partie décimale et à intercaler des entiers entre 1 et 12. La plupart des élèves qui font cette erreur citent même tous les nombres possibles : 3,1 ; 3,2 ; 3,3 ... 3,10 ; 3,11 ; 3,12 ou les suggèrent en mettant des ... comme nous venons de le faire.

Parmi les autres erreurs, on retrouve celle de F_{25} déjà signalée et 2 élèves qui intercalent un 0 : H_{21} propose 3,11 et 3,011 ; H_{22} propose 3,11 et 3,08. Deux autres élèves proposent des nombres qui sortent de l'intervalle : B_{24} 3,11 et 3,1234 ; D_{16} 3,121.

Le nombre d'élèves qui utilisent le modèle entier est beaucoup plus important qu'à la question précédente : cela pourrait s'expliquer par l'ordre de présentation des nombres : les élèves sont beaucoup plus tentés d'utiliser le modèle entier entre 3,1 et 3,12 qu'entre 1,39 et 1,4 parce que $1<12$ alors que $39>4$; on peut faire l'hypothèse qu'on aurait eu davantage d'utilisation du "modèle entier" si on avait demandé d'intercaler des nombres entre 1,4 et 1,39.

d) entre 31/7 et 4,42

C'est pour cette question qu'on trouve à la fois le plus de non réponse et le plus d'erreurs :
- non réponse partielle : 58 élèves
- répètent un des nombres : 8 élèves
- impossible : 25 élèves (dont 6 justifient : 31/7 = 4,42)
- fractions fausses : 3 élèves
- décimaux faux : 44 élèves
- autres : 6 élèves (F_{25} déjà signalé, 1 élève qui a remplacé $\frac{31}{7}$ par $\frac{31}{4}$, 1 élève qui a écrit $\frac{31}{7} > 4,41 < 4,42$, 1 élève qui a traité 2 questions : entre 31 et 7 et entre 7 et 4,42, 1 élève qui a écrit 400000300000050004KM, 1 élève qui a écrit $\frac{4.421}{7}$ $\frac{4.422}{7}$).

Le nombre important de non réponse partielle traduit sans doute la difficulté des élèves à passer d'un codage à l'autre.

Que ce soient des réponses justes ou fausses, elles sont presque toujours sous forme de décimaux. Parmi les réponses justes sous forme de fraction, signalons B_{17} qui réduit en 700 èmes et H_{20} qui met 4,42 sous la forme $\frac{30.94}{7}$.

Les réponses décimales fausses sont parfois dues à des erreurs de division, on ne peut en être sûr que si la division est effectuée sur la feuille ou si l'élève écrit son résultat, par exemple $\frac{31}{7} = 4,45$ ou $\frac{31}{7} = 4,3$.

Les réponses "impossible" ne sont pas toujours dues à l'identification de 4,42 et $\frac{31}{7}$. Ainsi I_{19} écrit $\frac{31}{7}$ = 4,4285714 → pas de nombre ; on peut se demander si le fait que le nombre le plus grand ait été écrit à gauche n'a pas été pour certains élèves une raison d'impossibilité et si le mot "compris" ne s'entend pas exclusivement du plus petit au plus grand, qui correspond à l'usage le plus fréquent en classe (cf les réponses de I_{19} reproduites ci-dessous, on peut aussi y retrouver la différence entre les réponses fournies à l'aide de la calculatrice et les réponses de tête). D'ailleurs certains élèves ont écrit les signes à l'envers ; nous n'en avons pas tenu compte.

entre $\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{7}$: $\frac{3}{7}$ est égal à 0,4285714 $\frac{4}{7}$ est égal à 0,5714285 entre 0,4285714 et 0,5714285 il y a 0,43 ; 0,44 ; 0,45 ...
entre 1,39 et 1,4 : entre 1,39 et 1,4 qui est égal à 1,40 il n'y a pas de nombre
entre 3,1 et 3,12 : 3,1 < 3,11 < 3,12
entre $\frac{31}{7}$ et 4,42 : $\frac{31}{7}$ est égal à 4,4285714 donc il n'y a pas de nombre compris entre $\frac{31}{7}$ et 4,42.

4.6. Résolution d'équations et encadrements

Les élèves avaient à résoudre 3 équations : 4 x = 125 ; 12 x = 177 ; 19 x = 5.
Les résultats sont consignés dans le tableau n° 6 ci-dessous.

Tableau 6 . Equations

classe	A	B	C	D	E	F	G	I	autres	total
effectif	29	18	24	24	25	26	26	24	9	205
non réponse globale	0	0	0	0	1	1	1	0		3
résolution des 3	17	10	16	13	5	1	7	14	3	86
% résolution des 3	58,6	55,6	66,7	54,2	20,0	3,8	26,9	58,3	33,3	42,0
résolution de 2	8	5	6	5	2	13	12	8	5	64
résolution de 1	4	3	1	6	15	11	4	2	1	47
% résolut. au moins 1	100	100	95,8	100	88,0	96,2	88,5	100	100	96,1
taux réussite	81,6	79,6	84,7	76,4	45,3	51,3	62,8	83,3	74,1	70,4
résolution de la 3ème	17	10	16	13	5	1	7	14	3	86
réponse impossible	0		1	0	0	0	1	0	0	2
réponse 19/5 ou 3,8	2	3	2	3	2	4	5	5	2	28
encadr. entiers 3 fois	4	2	6	4	1	0	0	12	2	31
encadr. entiers ≥ 1fois	18	14	12	10	4	12	3	19	3	95
% encadr. entiers	62,1	77,8	50,0	41,7	16,0	46,2	11,5	79,2	33,3	46,3
bornes non entières	11	3	6	5	1	2	5	1	2	36
encadrement de x qcq		1		1	4	3	5	2	0	16
encad. à 0,01 1e ou 2e	21	9	12	3	0	3	2	15	3	68
encadr. à 0,01 3ème	9	2	4	2	0	0	0	10	1	28
≥ 1 encadr. à 0,01	21	9	12	3	0	3	2	16	3	69
% encadr. à 0,01	72,4	50,0	50,0	12,5	0,0	11,5	7,7	66,7	33,3	33,7
erreurs division	7	0	3	4	6	3	5	2	1	31

Les équations choisies ne font intervenir que des nombres positifs. Les 2 premières ont pour solution des décimaux plus grands que 1 (31,25 et 14,75). La 3ème a pour solution un nombre plus petit que 1 non décimal, on pouvait attendre des réponses $\frac{19}{5}$ ou 3,8. Cela s'est produit dans toutes les classes.

Nous avons considéré que la réponse d'un élève était correcte quand elle était exprimée correctement sous forme de fraction ou si la division correcte était indiquée, même s'il y avait ensuite une erreur de division ; en effet certains élèves ne donnent la réponse que sous forme fractionnaire.

On demandait aussi des encadrements par des entiers puis par des décimaux à $\frac{1}{10}$ près. Certains élèves ont peut-être manqué de temps dès cette question (un élève n'a pas du tout abordé le III). Pour les encadrements entiers, nous avons donné dans le tableau le pourcentage d'élèves ayant fourni au moins un encadrement entier correct, même si la solution de l'équation était incorrecte. De même pour les encadrements à $\frac{1}{100}$ près, nous avons donné le pourcentage d'élèves ayant fourni au moins un encadrement à 0,01 ou 0,001 près correct. Nous allons maintenant regarder les réponses à chaque question et les différences éventuelles entre les classes.

4 x = 125

C'est la première équation proposée, elle a été traitée par tous les élèves qui ont abordé la question. Sur les 205 élèves qui ont passé le test III, 202 ont abordé la résolution d'équations. Parmi eux,

- 185 ont répondu tout à fait correctement, soit 90,2% du total

- 12 ont donné l'opération correcte mais fait une erreur de division, ce qui fait 96,1% d'élèves qui ont utilisé une méthode correcte. Les erreurs de division sont les suivantes : 3,125 (6 fois) ; 21,25 ; 3,1241 ; 31,2 ; 31,125 ; 31,205 ; 33,75.

- 2 élèves ont répondu $\frac{4}{125}$ (C_{14} et G_{25})

- 1 élève fait 125 - 4 (E_{23}) ; il a utilisé cette technique pour les 3 équations.

- 1 élève répond x = Ø (E_6).

Il n'y a donc finalement que 4 réponses erronées.

12 x = 177

Cette fois les non réponse sont beaucoup plus importantes (47) surtout dans les classes E (15) et F (12) qui ont sans doute manqué de temps.

On compte 135 réponses entièrement correctes, plus 18 élèves qui indiquent l'opération correcte et qui font une erreur de division ; les erreurs de division sont plus variées : 4,75 ; 14,78 ; 14,075 ; 16,75 ; 14,705 ; 14,615 ; 13,706 ; 14,416 ; 1,475 ; 14,58 ; 13,1733... ; 14,72 ; 14,7 ; 14 ; 14,33... ; et 2 fois 9,75 qui correspond sans doute à 117 : 12; en effet 2 autres élèves comptés parmi les réponses correctes ont résolu l'équation 12 x = 117.

Il reste 5 autres erreurs :

- 12/177 (C_{14}) ; remarquons que G_{25} n'a pas répondu à cette question ni à la troisième.

- 117 - 12 (E_{23}) comme pour la 1ère équation

- 1 élève (B_{15}) dit que c'est impossible (il répond 3,8 à la 4ème mais avait bien résolu la 1ère équation.

- D_8 écrit 12 x 40 = 177

- E_5 écrit 12 x 0,2631538 = 177 (confusion avec la 3ème équation).

19 x = 5

On compte maintenant 82 non réponse (dont 17 dans la classe E et 21 dans la classe F) et un élève qui répond simplement "nombre rationnel".

Il y a 81 réponses correctes, plus 5 réponses correctes suivies d'une erreur de division (C_4 écrit 5 : 19 = 0,555... : il a sans doute divisé par 9 ; C_{23} : 0,206 ; C_{25} : 0,2063 ; D_{11} : 26,3 ; D_{22} 0,2678) ; B_{18} répond 0,3 et B'_{29} 0,31 sans poser d'opération, ce qui fait qu'on ne peut pas savoir s'il s'agit d'une erreur de division ou d'une autre erreur.

- 26 élèves répondent $\frac{19}{5}$ ou 3,8 (dont C_{14} qui avait fait aussi les autres divisions à l'envers) ; il faut leur ajouter 1 élève qui répond 5 : 19 = 3,8 et 1 qui répond 3,5 (sans doute 19 : 5 avec erreur de calcul.

- 3 élèves font une soustraction : E_{23} répond 5-19 ; G_{21} et G_{23} répondent
19 - 14 = 5.

- 1 élève multiplie par l'opposé et répond -95 (-19x5) : G_{16}

- 2 élèves répondent "impossible".

Les résolutions d'équations simples sont donc très bien réussies, au moins dans le cas où on est amené à faire une division avec diviseur < dividende.

On constate que le taux de non réponse augmente nettement pour la 3ème équation, et le manque de temps n'explique pas entièrement cela.

D'autre part les élèves répugnent à diviser un nombre par un nombre plus grand : 28 élèves divisent 19 par 5 au lieu de 5 par 19. Parmi eux C_{14} a fait toutes les divisions à l'envers, mais les 27 autres avaient presque tous résolu correctement les 2 premières équations ; 2 élèves répondent que c'est impossible (ils avaient répondu correctement pour les 2 premières équations) et 3 élèves changent de technique : 2 passent à la soustraction et 1 multiplie par l'opposé.

Encadrements par des entiers

Sur les 205 élèves interrogés, 49 ne répondent pas à la question, 31 fournissent 3 réponses correctes, 16 fournissent 2 réponses correctes et 1 non réponse, 37 fournissent 1 réponse correcte et 2 non réponse. Il reste 72 élèves qui font des réponses erronées (même s'ils ont aussi fait des réponses correctes) :

- 2 élèves donnent les 2 premiers encadrements corrects et le 3ème à 1/10 près : $0,2 \leq x \leq 0,3$

- 4 élèves donnent un encadrement à 2 près : $30 \leq 31{,}25 \leq 32$ ou $13 \leq 14{,}75 \leq 15$

- 1 élève écrit $30 \leq 31{,}25 \leq 31$

- 27 élèves donnent un encadrement dont les bornes diffèrent de 1 mais ne sont pas entières, le plus souvent 31,25 - 32,25, quelquefois 31,24 - 32,24 ou 31,23 -32,23 ; 5 élèves de la classe A donnent leur encadrement sous forme de fraction, par exemple $\frac{125}{4}$ - $\frac{129}{4}$

- 1 élève donne un encadrement dont les bornes diffèrent de 2 : $\frac{165}{12}$ et $\frac{189}{12}$; $-\frac{14}{19}$ et $\frac{28}{19}$ (avec erreur de calcul).

- 5 élèves donnent un encadrement dont les bornes diffèrent d'un peu plus de 1, par exemple 31,25 et 32,26 (2 cas) ou 31,24 et 32,26 (3 cas).

- 4 élèves donnent un encadrement dont les bornes diffèrent de moins de 1 : 31,25 et 31,26 ou $\frac{125}{4}$ et $\frac{126}{4}$.

- 1 élève fait quelquechose du même genre mais il utilise les signes d'inégalité à l'envers (dans toute sa copie), il écrit exactement :

$$\frac{126}{4} \leq \frac{125}{4} \leq \frac{123}{4} + 1 \quad ; \quad \frac{178}{12} \leq \frac{177}{12} \leq \frac{175}{12} + 1 \qquad 14{,}83 \leq \frac{177}{12} \leq 13{,}83$$

$$\frac{20}{5} \leq \frac{19}{5} \leq \frac{17}{5} + 1 \qquad 4 \leq \frac{19}{5} \leq 3{,}6$$

- 1 élève donne un encadrement dont les bornes diffèrent de 0,5 : 31. et 31,50.

- 1 élève écrit pour le 3ème : $0{,}210 \leq 0{,}263... \leq 0{,}280$

- 25 élèves donnent des encadrements qui n'ont rien à voir avec la question mais dont les bornes diffèrent quand même de 1.

- 2 élèves donnent des encadrements qui n'ont rien à voir avec la question et dont les bornes ne diffèrent pas de 1.

- 4 élèves écrivent des inégalités fausses du genre $3 \leq 1 \leq 3+1$

Les principales erreurs consistent donc à donner des encadrements avec des bornes qui diffèrent de 1 mais ne sont pas entières ou des bornes entières qui ne diffèrent pas de 1 ou même à encadrer à 1 près autre chose que la solution de l'équation !

Encadrements à 10^{-2} près

Sur les 205 élèves interrogés, 101 ne répondent pas du tout à la question, 24 répondent correctement dans les 3 cas, 11 font 2 réponses correctes et 1 non réponse, 15 font 1 réponse correcte et 2 non réponse. Restent 54 élèves qui font au moins une erreur ou inexactitude, le plus souvent il s'agit d'un encadrement qui n'est pas à 10^{-2} près, ou d'un encadrement d'autre chose que la solution de l'équation.

- 2 élèves font en fait sans doute un lapsus : A_{18} écrit $d_1 = 3{,}25$ $d_2 = 3{,}26$ et répond correctement à toutes les autres questions sur équations et encadrements ; D'_{27} donne $31{,}25 \leq 31{,}25 \leq 32{,}25$ et $14{,}70 \leq 14{,}75 \leq 15{,}70$ pour les encadrements entiers et $14{,}70 \leq 14{,}70 \leq 14{,}71$ pour les encadrements à 0,01 près, il ne traite pas le 3ème cas.

- 2 élèves font bien des encadrements à 0,01 près mais mettent les signes à l'envers

- 3 élèves font des erreurs de division pour l'encadrement (en ayant exprimé le résultat sous forme de fraction).

- 1 élève fait ses encadrements à 0,02 près

- 12 élèves font au moins un des encadrements à 10^{-3} près, l'un d'eux utilise de plus les signes à l'envers.

- 2 élèves font au moins un des encadrements à 10^{-4} près

- 6 élèves font au moins une fois un encadrement à 0,1 près

- 2 élèves font des encadrements à 0,03 ou 0,04 ou 0,05 près

- 4 élèves encadrent bien la racine de l'équation mais avec des encadrements quelconques : par exemple I_{23} écrit $31{,}10 \leq 31{,}25 \leq 31{,}30 + 1$; $14{,}73 \leq 14{,}75 \leq 15{,}05$; $3{,}4 \leq 3{,}8 \leq 4{,}1$

- 7 élèves font des encadrements à 10^{-2} près mais encadrent un autre x

- 4 élèves encadrent un autre x avec $d_2 - d_1 \neq 0{,}01$

- 2 élèves écrivent des encadrements à 0,01 près mais faux

- 4 élèves écrivent des fractions en 100èmes : par exemple B_{19} écrit :

$$\frac{3100}{100} \leq 31{,}25 \leq \frac{3200}{100} \;;\; \frac{14}{100} \leq 14{,}75 \leq \frac{15}{100} \;;\; \frac{0}{100} \leq 0{,}26 \leq \frac{1}{100}$$

après avoir donné des encadrements entiers corrects

- 1 élève, B_{17}, après un premier encadrement correct (racine exprimée en écriture décimale) multiplie les dénominateurs par 100 et écrit :

$$\frac{177}{12} \leq \frac{177}{12} \leq \frac{178}{1200} \; ; \; \frac{5}{19} \leq \frac{5}{19} \leq \frac{6}{1900}$$ après avoir répondu

$$\frac{177}{12} \leq \frac{177}{12} \leq \frac{178}{12} \text{ et } \frac{5}{19} \leq \frac{5}{19} \leq \frac{6}{19}$$ à la question précédente.

- 6 élèves font d'autres erreurs :

A_{24} propose $d_1 = 32{,}251$ et $d_2 = 32{,}252$

D_1 écrit $1 \leq 15 \leq 100$

D'_{30} avait répondu $a \leq 0 \leq a+1$ au b) et pour le c) déclare : $d_1 < x \leq d_2$: $31 \leq 31{,}25 \leq 31{,}50$ $\quad d_2 - d_1 = \frac{1}{100}$: impossible

E_{17} répond aussi $31{,}50 < \frac{125}{4} < 31{,}00$; on ne peut pas trouver à 0,01 près ; il ne répond pas dans les autres cas (faute de temps, dit-il)

F_{17} écrit simplement $\frac{1}{3} \leq 31{,}25 <$

I_9 propose $d_1 = 31{,}25$ et $d_2 = 32{,}25$ (il avait répondu 31 et 32 au b).

4.7. Problèmes

Ces problèmes arrivaient en fin de questionnaire, ce qui a amené beaucoup de non réponse, surtout dans les classes E et F où seuls quelques élèves ont traité une partie du problème des carrés et aucun élève n'a abordé la question sur les rectangles, et dans une moindre mesure les classes C et G. Les résultats sont consignés dans le tableau n° 7 ci-dessous.

Tableau 7. Carrés - Rectangles

classe	A	B	C	D	E	F	G	I	autres	total
Effectif	29	18	24	24	25	26	26	24	9	205
carrés										
non réponse globale	2	1	11	1	17	20	9	1	2	64
3 réponses correctes	18	8	2	8	0	1	0	11	2	50
% sur participants	66,7	47,1	15,4	34,8	0,0	16,7	0,0	47,8	28,6	35,5
2 réponses correctes	4	3	1	6	0	0	0	5	1	20
1 réponse correcte	2	3	4	7	4	3	5	4	3	35
≥ 1 réponse % sur total	82,8	77,8	29,2	87,5	16,0	15,4	19,2	83,3	66,7	51,2
≥ 1 réponse % sur part.	88,9	82,4	53,8	91,3	50,0	66,7	29,4	87,0	85,7	74,5
division par 4	0	2	7	1	2	2	11	2	0	27
25/4 traité comme 25	0	2	4	0	0	1	3	0	0	10
division par 2	2	0	1	0	0	0	1	4	0	8
"non" pour 27	4	4	0	6	1	1	1	1	0	18
réponse correcte 27	19	8	3	12	0	1	0	13	3	59
% sur participants	70,4	47,1	23,1	52,2	0,0	16,7	0,0	56,5	42,9	41,8
rectangles										
non réponse globale	10	3	20	13	25	26	17	4	7	125
3 réponses correctes	6	4	0	0			0	8	0	18
% sur participants	31,6	26,7	0,0	0,0			0,0	40,0	0,0	22,5
2 réponses correctes	5	1	0	4			3	8	1	22
1 réponse correcte	6	3	1	4			0	2	0	16
≥ 1 rép. % sur effectif	58,6	44,4	4,2	33,3			11,5	75,0		27,3
≥ 1 rép. % sur particip.	89,5	53,3	25,0	72,7			33,3	90,0		70,0
proc. issues du périm.	0	2	1	1			2	0	0	6

4.7.1. Carrés

non réponse : 64 141 élèves ont donc abordé ce problème

3 réponses correctes : 50 élèves

2 réponses correctes : 20 élèves dont pour 36 et $\frac{25}{4}$: 11 élèves

pour 36 et 27 : 9 élèves

1 réponse correcte : 35 élèves dont pour 36 : 31 élèves

pour $\frac{25}{4}$: 4 élèves

Ces 4 élèves ont répondu de la façon suivante dans les autres cas : A_{24} a divisé par 2 pour 36 et 27 ; C_{21} a divisé par 2 pour 27 et n'a pas répondu pour 36 ; G_4 et G_{22} ont répondu 3x12 = 36 et 3x9 = 27.

On a 92 réponses correctes pour 36, 65 pour $\frac{25}{4}$, 59 pour 27. La meilleure performance pour $\frac{25}{4}$ s'explique par le plus grand nombre de réponse "impossible" pour 27.

Les erreurs les plus fréquentes sont les suivantes :

- *réponse "non" ou "impossible"* : Elle diffère suivant les valeurs numériques proposées (1 seul élève pour 36, 11 élèves pour $\frac{25}{4}$, plus un élève qui répond non puis donne une valeur approchée qui est en fait une valeur approchée de $\frac{25}{4}$, 18 élèves répondent non ou impossible pour 27). Cette façon de répondre est à relativiser par le fait que 27 élèves répondent non à la question "peut-on trouver un carré d'aire 27 cm^2 ?" mais donnent une valeur approchée ensuite, A_{15} précise *"ce serait un nombre à partie décimale illimitée"* ; 9 élèves font la même chose de façon implicite en ne répondant pas à la première question dans le cas de 27. Cela laisse penser que les réels ne sont pas des vrais nombres pour les élèves et qu'une réponse "impossible" est plutôt à interpréter comme impossible dans les décimaux - voire impossible dans les entiers.

division par 4 : C'est l'erreur la plus fréquente : 27 élèves font une division par 4 pour au moins un des carrés ; en général leurs réponses sont cohérentes et ils le font dans tous les cas où ils ont répondu, $\frac{25}{4}$ est dans ce cas souvent traité comme 25 et la réponse est alors 6,25 ou entre 6 et 7 (quelques élèves proposent cependant 1,5625 ou une réponse qui veut être celle-là à une erreur de calcul près). Seuls deux élèves font une réponse correcte dans le cas de 36 et utilisent cette procédure pour $\frac{25}{4}$ traité comme 25 et pour 27.

division par 2 : 8 élèves font une division par 2 pour un carré au moins. Dans ce cas, on peut penser qu'il s'agit d'une confusion entre multiplication et addition dans le cas où la racine carré n'est pas évidente puisque le plus souvent les élèves qui font cette erreur répondent correctement dans le cas de 36. Un de ces élèves (A_8) a même écrit 13,5x13,5 = 27.

divers :

G_{23} répond "oui, non, oui" sans donner de valeurs, B_{15} fait la même chose pour 36 et 27.

E_{22} répond "oui" pour les 3 et donne comme mesure des côtés 36, $\frac{25}{4}$ et 27 ; F_{20} fait la même chose pour 36 et 27 et répond "non" pour $\frac{25}{4}$.

E_7 propose $\frac{9}{3}$ pour 27

G_{15} et G_{24} répondent correctement pour 36 mais proposent 1,58 pour $\frac{25}{4}$ et 2,27 pour 27 : il semble qu'ils aient appuyé 2 fois sur la touche √ de la calculatrice.

G_4 et G_{22} proposent 3x12 = 36 et 3x9 = 27 avec une réponse correcte pour $\frac{25}{4}$: sans doute n'ont-ils pas compris la question : ils ont cherché des décompositions des nombres et pour $\frac{25}{4}$, ils ont d'abord pensé à $\frac{5}{2} \times \frac{5}{2}$. D'ailleurs les seuls diviseurs de 25 et de 4 sont leur racine carrée alors que ce n'est pas le cas pour 36, ni évidemment pour 27. De même D_{15} propose 4x9 = 36 et 3x9 = 27 mais rien pour $\frac{25}{4}$.

Comme valeur approchée dans le cas de 27, 12 élèves donnent "environ 5", 12 élèves disent que c'est entre 5 et 6, 2 élèves disent que c'est entre 5 et 5,5, 1 élève entre 5 et 5,25, 20 élèves donnent une approximation juste à 0,1 près (ou mieux), 11 élèves donnent une approximation à 0,1 près inexacte mais dans l'intervalle]5, 6[; A_{18} donne comme valeur $\frac{50846}{9900}$ qui est une assez bonne approximation (comment l'a-t-il obtenue ? a-t-il remis sous forme fractionnaire 5,135959... ? et dans cette hypothèse, comment a-t-il trouvé ce résultat ?) et A_{11} donne $\frac{508}{9900}$ (il a sans doute mal copié son voisin !)

4.7.2 Rectangles

Pour les rectangles de même aire et dont un côté mesure 4,5 cm, le taux de non réponse est encore plus élevé puisque c'était la dernière question du test : dans les classes E et F aucun élève n'a abordé cette question.

non réponse : 125 ; 80 élèves ont donc abordé la question.

3 réponses correctes : 15 élèves plus 3 élèves qui ont une démarche correcte mais une réponse qui ne l'est pas : I_{13} trouve bien 1,3888... pour $\frac{25}{4}$ mais répond que le rectangle n'existe pas puisque la division ne s'arrête pas, I_{10} fait la même chose avec une erreur de calcul (il trouve 1,3666...) et A_{16} fait des erreurs de division (il écrit $\frac{36}{4.5} = 18$ et $\frac{27}{4.5} = 16$; pour $\frac{25}{4}$, il remplace 4,5 par 4,25, ce qui donne $\frac{25}{4x4.25} = \frac{25}{17}$).

2 réponses correctes : 36 et $\frac{25}{4}$: 5 élèves qui n'ont pas fourni de réponse pour 27, on peut penser qu'ils ont manqué de temps.

36 et 27 : 17 élèves, dans ce cas, la difficulté vient sans doute du calcul sur les fractions, certains de ces élèves ayant fait des erreurs ou répondu "impossible" pour $\frac{25}{4}$.

1 réponse correcte pour 36 : 16 élèves ; au total 56 élèves ont donc répondu correctement dans le cas de 36 ; 24 des élèves qui ont abordé la question n'ont aucune réponse correcte.

On a 56 réponses correctes pour 36, 23 pour $\frac{25}{4}$ et 35 pour 27. Cette fois 27 est plus facile que $\frac{25}{4}$.

Erreurs **:**

procédures inspirées du cas où on donne le périmètre :

- 2 élèves font exactement comme si on leur avait donné le périmètre dans le cas de 36 et de 27 : "36 - 2x4,5 = 27, 27 : 2 = 13,5" pour $\frac{25}{4}$, C_{10} ne répond pas et D_{13} répond "impossible".

- G_{20} et G_{21} répondent respectivement 9, 3,5 et 9 en dessinant les rectangles, avec les calculs suivants pour G_{20} : 4,5 + 4,5 = 9, 9x4 = 36, 9x2 = 18, 2x9 = 18, 18 + 18 = 36 dans le cas de 36 ; 4,5 + 4,5 = 9, 9x2 = 18, 25 - 18 = 7, 7 : 2 = 3,5 dans le cas de $\frac{25}{4}$; 4,5 + 4,5 = 9, 27 - 9 = 18, 18 : 2 = 9 dans le cas de 27 (G_{21} écrit simplement : 4,5 + 4,5 = 9, 9x2 = 18, 36 : 2 = 18 dans le cas de 36 ; 4,5 +4,5 = 9, 9x2 = 18 dans le cas de $\frac{25}{4}$; 4,5 + 4,5 = 9 dans le cas de 27). On voit que la démarche n'est pas vraiment cohérente pour les 3 cas mais qu'elle est toujours inspirée de celle qui serait correcte si on avait donné le périmètre.

- G_3 adapte au cas de l'aire la procédure qui convient pour le périmètre et écrit "2x4,5 = 9, 36 : 9 = 4, 4 : 2 =2" ; il adopte la même démarche dans les 3 cas en remplaçant $\frac{25}{4}$ par 25.

- une autre adaptation est celle de B_1 et B_5 qui divisent l'aire par 2 et le résultat par 4,5.

réponses non homogènes à une longueur :

- 3 élèves (B_{24}, G_{12} et G_{15}) proposent 4,5 x 4,5
- G_{24} fait 6x6x4,5x4,5 etc...
- B_{21} multiplie le côté du carré trouvé par 4,5
- A_{29} divise le côté du carré trouvé par 4,5

autres erreurs

- 1 élève répond simplement "oui, 4,5x6 = 25"
- I_8 trouve la bonne réponse pour 36 puis garde le 8 comme côté constant.
- I_9 répond 7,5x4,5 = 36, 2x3,125 = 6,5, 3x9 = 27
- D_{24} répond 4,5 x 35 000 KM et 4,5 x 66 000 KM !!!

<u>pour 36</u> : 1 réponse "impossible", 3 réponses 7,5, 2 réponses 4x9 = 36, 1 réponse 4,5 sur 1,5.

<u>pour 25/4</u> : 3 erreurs de calcul avec démarche correcte : I_4 fait une erreur de virgule et répond 0,1388..., un autre élève répond $\frac{25}{36}$ au lieu de $\frac{25}{18}$,

C_{13} fait $\frac{\frac{25}{4}}{4,5} = \frac{4}{25} \times 4,5$

D_{10} fait $\frac{25}{4} \times \frac{45}{10}$ et G_4 $\frac{5,5}{0,8} \times 4,5 = \frac{24,75}{3,6}$ c'est à dire des multiplications avec pour le deuxième de plus des erreurs de calcul et de méthode.

4 réponses "impossible"

4 réponses diverses (0,1, 0,5, $\frac{1045}{40}$, $\frac{4}{25}$)

B_{10} repropose 2,5 x 2,5

D_{16} dessine un rectangle de 4,5 sur 6 pour $\frac{25}{4}$ et de 4,5 sur 5 pour 27 (il voulait peut-être faire le contraire ?).

<u>pour 27</u> : en plus de D_{16} déjà cité, 1 réponse "impossible" et 2 réponses "4,5x7,7 = 27" (B_8 et B_{11}).

4.8. Différences suivant les classes

Bien que les conditions de passation n'aient pas été les mêmes, on peut relever des différences nettes entre les classes, les performances ne se répartissent pas toujours dans le même ordre. Pour rendre compte des différences, nous avons décidé de répartir les classes en 4 niveaux pour chaque question. Les niveaux ont été établis de façon empirique mais en essayant de mettre les coupures à un endroit significatif correspondant à un écart net dans les résultats. Rappelons que les conditions de passation n'ont pas été les mêmes, il ne s'agit en aucun cas de hiérarchiser les classes, mais de voir si l'ordre des réussites aux questions est le même dans toutes les classes et l'ordre des classes le même pour toutes les questions, ou si l'on peut mettre en évidence des profils de classes différents qui dépendraient de l'enseignement.

4.8.1. Opérations

Dans les classes A, D, H, I, les deux tiers des élèves au moins ne font aucune erreur sur la partie numérique et près de 90% en font au plus une. Dans les classes B, E, G, environ 80% des élèves font au plus une erreur et de 42% à 56% n'en font aucune. La classe F a un résultat plus faible : 28% des élèves ne font aucune erreur mais plus de 57% en font au plus une. Seule la classe C a une performance très faible sur cette question : 80% des élèves font au moins 2 erreurs et seulement 13,6% d'entre eux ne font aucune erreur. Le professeur de la classe C nous a mentionné qu'elle était considérée comme la plus faible de l'établissement et que le cours sur les rationnels a suivi celui sur les réels.

Si l'on répartit les classes sur 4 niveaux, en se fondant à la fois sur les taux de réussite totale et sur un indice de réussite (qui correspond au nombre moyen d'exercices réussis par élève) calculé par $\frac{6a+5b+4c+3d+2e+f}{n}$ où a, b, c, d, e, f sont respectivement les nombres d'élèves ayant réussi 6, 5, 4, 3, 2, 1 exercice et n le nombre d'élèves de la classe, cela donne :

- niveau 1 : A, D, H, I,
- niveau 2 : B, E, G,
- niveau 3 : F
- niveau 4 : C.

4.8.2. Comparaisons.

Pour la classe I, la réussite plus importante à la 4ème question est sans doute due à l'utilisation massive de la procédure division : le professeur nous indique qu'il a introduit les rationnels comme quotient d'entiers relatifs et que ses élèves utilisent une calculatrice. D'ailleurs c'est la seule classe où il y a très peu de différence de réussite entre les 3 premiers exercices et le 4ème.

La classe D utilise majoritairement le produit en croix qui n'est pas très adapté au 4ème exercice.

Dans les autres classes, quand les réponses sont justifiées, la procédure la plus répandue est la réduction au même dénominateur mais elle fait chuter pour la 4ème question les performances de près de la moitié des élèves qui ont réussi aux 3 premières questions : elle devient trop coûteuse et les élèves échouent dans le calcul ou adoptent les règles de comparaison dérivées des entiers que nous évoquions plus haut. Pour la classe G, la chute entre les 3 premières questions et la 4ème est moins importante, les élèves utilisent massivement la réduction au même dénominateur aux 4 questions dont un certain nombre avec succès. Nous avons d'ailleurs remarqué que les élèves de cette classe respectaient souvent l'ordre des nombres tout en les plaçant mal sur l'axe gradué.

Nous avons choisi de privilégier la réussite au 4ème exercice pour distinguer les niveaux 2 et 3, puisque nous avons vu que la réussite aux trois premiers peut être obtenue avec des régles de comparaisons fausses.

Si l'on répartit les classes en 4 niveaux selon ce critère, on a :

- niveau 1 : I, G, A	réussite au 4	$\geq$ 44,8%	aux 3 premiers	$\geq$ 70,8%
- niveau 2 : B, E,	44% $\geq$ r 4	$\geq$ 39%	r 123	$\geq$ 60%
- niveau 3 : D, H,	33% $\geq$ r 4	$\geq$ 28%	r 123	$\geq$ 66%
- niveau 4 : C, F.	r 4	$\leq$ 13,6%	55% $\geq$ r 123	$\geq$ 38%

On voit que H a des performances moins bonnes sur l'ordre que sur les opérations. Les élèves de cette classe utilisent massivement la réduction au même dénominateur peu performante pour le dernier exercice. Ils sont cependant les plus nombreux à utiliser le fait qu'un négatif est inférieur à un positif.

4.8.3. Axe gradué

Nous avons déjà dit que les classes n'étaient pas toutes dans les mêmes conditions, particulièrement les classes E et F pour cet exercice (les élèves travaillaient sur leur copie quadrillée et non sur le papier blanc fourni avec axe prégradué en entiers). Nous pouvons cependant enregistrer des différences de performance assez nettes :

Si l'on considère le nombre d'élèves ayant placé correctement au moins 8 points, on aurait une répartition du type :

niveau 1 : I (75%)

niveau 2 : A (51,7%) B (56,5%) H (56%) D (45,8%)

niveau 3 : C (31,8%)

niveau 4 : F (19,2%) E (16%) G (15,4%)

Si l'on ne considère que le placement des décimaux positifs, on a une amélioration pour toutes les classes, surtout pour la classe F qui n'avait que très peu abordé les fractions et dans une moindre mesure pour les classes G, A et C (en valeur relative) :

niveau 1 : I (91,7%) A (75,9%)

niveau 2 : B (65,2%) H (64%) D (62,5%)

niveau 3 : C (45,5%) F (50%)

niveau 4 : G (38,5%) E (28%)

Nous retenons cette deuxième répartition. Il faut noter de plus que dans les classes A et I, les placements sont le plus souvent exacts alors qu'ils sont la plupart du temps approximatifs dans les autres classes.

4.8.4. Intercalation

Nous avons déjà remarqué que pour cette question, l'ordre de réussite des exercices est le même dans presque toutes les classes. Seule la classe H réussit mieux le premier exercice mais c'est avec une procédure très majoritaire du type $\frac{3.i}{7}$ et la réussite chute pour le 4ème exercice. Par contre les niveaux de réussite ne sont pas les mêmes. On peut calculer, pour chaque classe, le taux de réussite t (correspondant au pourcentage d'exercices-élèves réussis et proportionnel au nombre d'exercices réussis par élève) de la façon suivante : on pose $t = 100 * \frac{a+2b+3c+4d}{4n}$ où a, b, c, d sont respectivement les nombres d'élèves ayant réussi 1, 2, 3 ou 4 exercices et n le nombre d'élèves de la classe. Ce taux permet de définir les niveaux suivants :

niveau 1 : A (80,2) I (71,9) H (65)

niveau 2 : B (51,1) C (50) D (46,9)

niveau 3 : G (36,5) E (36)

niveau 4 : F (22,1).

Il ne correspond pas tout à fait au classement qu'on obtiendrait en considérant le nombre d'élèves qui ont réussi au moins 3 exercices, compte tenu du fait que la classe F compte une majorité d'élèves n'ayant aucune réponse correcte. Cela ne correspond pas non plus au classement obtenu à partir du 4ème exercice : B monterait d'un niveau tandis que H et G baisseraient d'un niveau. Ce classement est par contre cohérent avec celui qu'on obtiendrait en considérant les questions les mieux réussies, celles sur les décimaux: niveau 1 réussite supérieure à 80%, niveau 2 de l'ordre de 66%, niveau 3 de l'ordre de 50%, niveau 4 de l'ordre de 25%.

4.8.5. Comparaison des classes sur la partie technique

Si l'on rassemble dans un tableau les niveaux obtenus à chaque question, on obtient pour la partie II :

classe	A	B	C	D	E	F	G	H	I
opérations	1	2	4	1	2	3	2	1	1
comparaisons	1	2	4	3	2	4	1	3	1
axe gradué	2	2	3	2	4	4	4	2	1
intercalation	1	2	2	2	3	4	3	1	1

tableau n° 8

Ce tableau fait apparaître des différences entre les classes qui ne correspondent pas aux différences de retard scolaire. Rappelons que de ce point de vue l'échantillon se coupait assez nettement en deux : dans les classes A, D, F, I moins de 17% des élèves ont du retard, dans les classes B, C, E, G c'est le cas de plus de 48% des élèves ; dans la classe H, trop peu d'élèves ont donné leur date de naissance pour qu'on puisse la situer.

Les classes I et A ont de très bons résultats partout, la classe B a d'assez bons résultats partout, la classe F a d'assez mauvais résultats partout, les autres classes sont plus irrégulières.

La classe D a d'assez bons résultats partout sauf sur les comparaisons : les élèves de cette classe utilisent majoritairement le produit en croix pour comparer 2 nombres et cette procédure s'adapte mal à la comparaison de 3 nombres.

Les classes E et G d'une part, C d'autre part ont des profils pratiquement inversés : E et G ont une bonne réussite sur la partie qui peut se traiter par réduction au même dénominateur et une mauvaise sur l'axe gradué et l'intercalation, C au contraire réussit mieux l'intercalation et dans une moindre mesure l'axe gradué mais a une piètre performance quand il s'agit d'utiliser la réduction au même dénominateur. Ce sont toutes les 3 des classes de collèges de banlieue parisienne considérées comme assez faibles, les différences de profil sont certainement liées à l'apprentissage dont nous savons malheureusement fort peu de choses : le professeur de la classe C nous a indiqué que l'apprentissage des réels avait été fait avant celui des rationnels qui ont donc été présentés comme étant les réels qui sont quotients de 2 entiers. C'est aussi le cas de la classe I.

Nous avons déjà remarqué que les procédures utilisées pour les comparaisons sont différentes suivant les classes et qu'elles ont surtout une influence sur la réussite à la quatrième question.

4.8.6. Equations - Encadrements - Carrés

Nous avons établi des niveaux sur cette partie bien que, comme nous l'avons déjà signalé, dans certaines classes les élèves aient peut-être manqué de temps pour traiter les problèmes sur les carrés et les rectangles, peut-être aussi étaient-ils fatigués en fin de test. Ils sont à prendre avec encore plus de précautions que précédemment. Pour la résolution d'équations, nous nous appuyons sur le taux de réussite $\frac{3a+2b+c}{3n}$ qui correspond au pourcentage moyen d'exercices réussis par élève.

niveau 1 : A (81,6%), B (79,6%), C (84,7%), D (76,3%), I (83,3%)
niveau 2 : G (62,8%)
niveau 3 : E (45,3%), F (51,3%)

Pour les encadrements nous prenons en compte à la fois les encadrements par des entiers et ceux à 0,01 près (nous donnons entre parenthèses les pourcentages d'élèves ayant réussi au moins un encadrement par des entiers et ceux ayant réussi au moins un encadrement à 10^{-2} près)

niveau 1 : A (62,1% 72,4%), B (77,8% 50%), I (79,2% 66,7%)
niveau 2 : C (50% 50%)
niveau 3 : D (41,7% 12,5%), F (48% 12%)
niveau 4 : E (16% 0%), G (11,5% 7,7%).

Pour les carrés, nous nous appuyons sur la moyenne de réponses correctes pour les élèves ayant abordé la question : A (2,37) I (2,04) B (1,94) D (1,87) C (1,09) F (1,0) E (0,5) G (0,29). En réalité les classes E et F ont très peu participé (8 et 6 élèves) et les classes C et G assez peu également (13 et 17). Dans ces deux dernières classes les mauvaises réponses sont souvent dues à l'utilisation de la division par 4.

Pour les rectangles, seules les classes A, B, I ont une participation supérieure à 60%, les classes A et I ont de bons résultats à cette question.

Si l'on rassemble dans un tableau les niveaux obtenus, on obtient :

classe	A	B	C	D	E	F	G	I
équations	1	1	1	1	3	3	2	1
encadrements	1	1	2	3	4	3	4	1
carrés	1	1	2	1	3	2	4	1

Tableau n° 9

Les classes qui ont un mauvais résultat sur l'axe gradué en ont aussi un mauvais sur les encadrements. La classe C est en niveau 3 sur l'axe gradué et en niveau 2 sur les encadrements, c'est l'inverse pour la classe D mais rappelons que la classe C a fait l'exercice de l'axe gradué sur du papier quadrillé ce qui apportait une difficulté supplémentaire et que les élèves n'ont pas toujours disposé d'assez de temps pour les encadrements.

Si l'on compare les réponses données à la partie sur les définitions et les performances aux autres questions, on s'aperçoit que pour la classe I, la définition d'un rationnel comme division qui est principalement donnée fonctionne comme outil, ce qui permet aux élèves de comparer plus facilement 3 nombres comme de les placer sur un axe gradué ou de fournir des encadrements. Dans la classe A les rationnels sont définis à la fois comme couple et comme division, les résultats sont bons partout. Dans la classe F, les définitions tournent surtout autour de la notion de couple, c'est la seule classe où les définitions données ont principalement un caractère objet et très peu un caractère outil et c'est la classe qui a les performances les moins bonnes alors que les conditions d'âge des élèves ne sont pas défavorables. Il est à noter que la définition des fractions en référence à la division est la plus fréquente dans beaucoup de classes mais elle n'est utilisée comme outil que par très peu d'élèves hors de la classe I.

4.9. Conclusion.

De cette étude, il ressort que les erreurs des élèves ne se répartissent pas de la même manière suivant les classes et que ces différences ne se ramènent pas à des différences de niveau entre les classes (en admettant que le niveau peut être reflété par le retard scolaire des élèves). Nous avons vu dans le questionnaire A que des élèves de CM2 qui avaient reçu un enseignement différent avaient de meilleures performances sur l'ordre et l'intercalation que des élèves de sixième de même recrutement social et de même retard scolaire. Dans le questionnaire B, il s'avère que les résultats ne sont pas hierarchisés de la même manière dans toutes les classes, il semble se dégager des profils de classe qui correspondent à une réussite meilleure à certaines questions plutôt qu'à d'autres. Ces différences de profil ne peuvent s'expliquer que par des différences dans l'enseignement reçu, ce qui nous amène les réflexions suivantes :

- Dès le début de l'enseignement, les élèves se forgent des représentations sur les notions nouvelles en essayant d'adapter de façon la plus économique possible les modèles dont ils disposent déjà : ainsi sur les décimaux et rationnels, les élèves adaptent les règles de fonctionnement qu'ils utilisent avec succès sur les naturels. Ces règles d'action que les élèves utilisent pour traiter des nombres décimaux ou des nombres en écriture fractionnaire et qui sont issues de leurs connaissances sur les entiers, subsistent à la fin de 4ème après l'enseignement des rationnels, particulièrement dans des situations plus complexes que de coutume qui révèlent le manque de maîtrise des algorithmes (ranger 3 fractions par exemple) et dans les situations d'intercalation. L'enseignement doit donc permettre de mettre en défaut ces modèles erronés : pour cela il est nécessaire que les élèves disposent de moyens de contrôle extérieurs au cadre numérique afin de relever d'éventuelles contradictions.
- Dans la majorité des classes de 4ème, la partie technique portant sur les opérations, comparaisons et même résolution d'équations est bien réussie. Les élèves ont des algorithmes comme la réduction au même dénominateur et dans l'ensemble, ils savent les utiliser dans les situations typiques : opérations sur les fractions, comparaisons de 2 fractions, résolution d'une équation $ax = b$ avec $a < b$. Les différences observées entre les classes laissent penser que dans la plupart d'entre elles, on a insisté sur cette habileté technique. Les résultats moins bons dans les classes C et F montrent qu'il est nécessaire d'avoir un entraînement sur cette partie. Cependant, sur d'autres questions, d'autres techniques peuvent être plus performantes que la réduction au même dénominateur et il faut que les élèves puissent y recourir également, un surentraînement à la réduction au même dénominateur peut rendre indisponible d'autres techniques de calcul qui relèvent d'autres représentations des nombres rationnels. Par exemple dans la classe G, il y a un décalage de réussite important entre ce qui peut se faire par réduction au même dénominateur - opérations, comparaisons - et d'autres questions comme l'intercalation ou le placement sur l'axe gradué. En fait dans cette classe la différence de réussite est grande entre les questions algorithmisables et celles qui ne le sont pas (la résolution d'équations simples est assez bien réussie).
- Les techniques enseignées n'ont pas la même efficacité dans toutes les situations : pour comparer, le produit en croix amène plus d'erreurs, même pour 2 fractions parce qu'on peut conclure en sens inverse, pour la comparaison de 3 fractions il devient vraiment inadapté, la réduction au même dénominateur devient elle aussi coûteuse sauf si les dénominateurs sont particulièrement simples, c'est la division qui est la plus efficace dans ce cas. Il nous parait donc important que les élèves disposent de plusieurs techniques également disponibles et qu'ils puissent recourir à la plus commode. Or, dans les tests on voit très peu d'élèves utiliser 3 techniques différentes pour les comparaisons, et un seul songe à intercaler 0,5 entre $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{9}$.
- Nous avions vu qu'en CM2 et 6ème les fractions et écritures à virgule n'avaient pas toujours statut de nombre et qu'elles étaient parfois vues comme des codages d'actions. En fin de 4ème, pour la majorité des élèves, les propriétés des nombres sont encore souvent attachées à leur écriture et il est difficile de changer d'écriture. Certes on n'attend pas que les élèves puissent passer de l'écriture décimale illimitée d'un rationnel non décimal à son écriture fractionnaire mais le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale illimitée est loin d'être disponible pour la plupart des élèves : dans la question sur l'intercalation, l'exercice qui fait intervenir les deux types d'écriture ($\frac{31}{7}$ et 4,42) est le moins bien réussi dans presque toutes les classes, la réussite n'atteint 50% que dans la classe A et elle tombe même à 0 dans la classe G.
- Le placement de nombres sur un axe gradué demande un apprentissage spécifique. Nous avions vu que cette question était très mal réussie en CM2 et en 6ème. Elle est encore source de nombreuses erreurs en 4ème. L'utilisation abusive des cm et mm nous semble provenir de l'introduction des nombres décimaux à partir des

changements d'unité dans les mesures de longueur faites avec les unités légales. Un moyen de remettre en cause ce modèle nous semble être la mise en place d'une dialectique entre la construction des nombres et celle d'une mesure des longueurs (au sens d'application mesure) à partir d'un segment unité quelconque. Le placement sur l'axe gradué nécessite de plus de relier l'abscisse à la mesure d'une longueur. Le placement sur une graduation nous parait de nature à pouvoir aider les élèves à conceptualiser la notion de nombre non entier indépendamment de l'écriture.

Finalement, il nous paraît important que les élèves puissent disposer le plus rapidement possible de deux points de vue (au moins) complémentaires sur les nombres rationnels, celui qu'on pourrait qualifier d'algébrique qui consiste à voir le rationnel représenté par toute une famille de fractions équivalentes et qui fait appel à la technique de réduction au même dénominateur et celui qu'on pourrait qualifier d'analytique qui consiste à voir le rationnel comme résultat d'une division de deux entiers avec l'écriture décimale illimitée qui donne des approximations décimales aussi précises qu'on veut, la fraction étant une écriture finie du résultat exact. La cohérence des deux points de vue peut se trouver dans la résolution des équations du premier degré qui nous paraît devoir être au centre de la construction dès le début, le quotient de a par b est en effet la solution de l'équation $bx = a$ et aussi de toutes les équations $cbx = ca$ où c est un entier non nul.

En fait il conviendrait de plus de décomposer le point de vue algébrique en au moins trois conceptions. La première se réfère aux couples d'entiers et à la relation d'équivalence de façon formelle, la seconde à la commensuration : a/b est vu comme "a pour b" par exemple 3 pour 4, ainsi, si u et v sont des longueurs et si $3u = 4v$, $\frac{3}{4}$ est la mesure de v quand on prend u comme unité et vérifie l'équation $4x = 3$, c'est-à-dire $\frac{3}{4}$ est le nombre qui multiplié par 4 donne 3. La troisième conception se réfère aux partages et aux reports et privilégie l'inverse des entiers: b est tel que $b \times \frac{1}{b} = 1$ et $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. Cette dernière conception est nécessaire pour placer les rationnels ou les décimaux sur un axe gradué.

Une interaction entre les divers points de vue nous paraît pouvoir faire avancer les élèves dans la construction du concept de nombre rationnel, en même temps qu'il permet de développer des moyens de contrôle et des techniques variées. Par ailleurs l'interaction avec le cadre géométrique par le placement sur un axe gradué, la mesure de longueurs - ou d'aires pour les produits - est une autre source de contrôle pour les élèves qui demande à être développée : les élèves ne pratiquent pas les changements de cadres tout seuls s'ils n'y sont pas entraînés et ce sont les élèves les plus faibles qui ont le plus besoin de moyens de contrôle divers.

5. Compléments

5.1. Entretiens individuels ou par deux avec les élèves.

Les entretiens qui ont eu lieu avec des élèves de CM2 ou de 6ème sont décrits dans le chapitre 3A. Ils montrent que certains élèves ont du mal à changer de cadre : même quand ils utilisent des nombres, ils ont tendance à ne pas les traiter complètement comme des nombres et à garder des procédures géométriques pour un problème posé dans le cadre géométrique. Inversement des propriétés des nombres peuvent empêcher la prise en compte de propriétés géométriques : par exemple, quand on leur demande de trouver un carré d'aire 30, certains élèves proposent 5x6.

Ils ont permis de confirmer aussi la relative fréquence d'utilisation des procédures périmétriques pour traiter des problèmes d'aire même quand les élèves distinguent aire et périmètre sous la forme vague "l'intérieur"," le bord". Ces difficultés nous semblent en relation avec les problèmes rencontrés dans le changement de cadres : ainsi le demi périmètre peut être vu comme un demi bord, parfois lié à un partage précis du rectangle, et non relié à des relations numériques ou algébriques ; de la même façon, il faut passer dans le cadre numérique pour se convaincre qu'on n'a pas compté 2 fois le "carré du coin" en représentant le nombre total de carrés contenus dans un rectangle par le produit des nombres de carrés qui se reportent respectivement dans la longueur et dans la largeur. Ces difficultés sont sans doute aussi à rapprocher de la confusion entre somme et produit dans le calcul algébrique, par exemple confusion entre $2x$ et x^2.

La plupart des élèves utilisent assez facilement la croissance d'une fonction d'une variable pour construire un algorithme de recherche, du moins quand on attire leur attention sur cette propriété. C'est plus difficile pour certains d'entre eux pour une fonction de 2 variables surtout quand il y a, comme c'était le cas dans le problème proposé, croissance par rapport à une variable et décroissance par rapport à une autre.

Si les opérations sur les décimaux sont acquises le plus souvent, les élèves sont moins sûrs d'eux en ce qui concerne l'ordre, notamment l'intercalation et plus particulièrement le passage aux centièmes. On voit apparaître chez certains élèves l'algorithme que nous avions remarqué dans les tests écrits : ajouter un zéro derrière la virgule. Quand on a travaillé avec eux le passage aux centièmes, le passage aux millièmes ne semble plus poser de problème — il est vrai que les élèves les plus lents ne sont pas toujours arrivés jusque là.

Comme nous l'avons vu aussi dans les tests écrits, la graduation d'une demi-droite en nombres décimaux pose beaucoup de problèmes et il est très difficile pour beaucoup d'élèves de placer 0,1 sur une graduation où 1 est situé à 30 carreaux de 0.

Il semble de plus, par la comparaison avec une autre classe de 6ème (observée il est vrai quelques années auparavant), qu'une meilleure maîtrise des opérations arithmétiques puisse inciter les élèves à effectuer des opérations et gêner l'acceptation par les élèves d'une recherche de solution par approximation. Il est d'ailleurs probable que l'explication de la différence entre les classes vient plutôt de la lecture du contrat didactique : ce qu'il est légitime de faire pour résoudre un problème de mathématiques.

5.2 Difficultés qui subsistent chez les élèves instituteurs

Nous avons proposé un test sur les nombres (voir annexe) à deux promotions d'élèves instituteurs dans le cadre d'un enseignement du DEUG 1er degré, l'une (17 copies) en 84 - 85, l'autre (13 copies) en 85 - 86. Pour la première, le test a eu lieu après un début d'enseignement sur les ensembles de nombres, mais les notions de cardinalité des ensembles infinis n'avaient pas encore été abordées, pour la seconde, il a eu lieu en nov. 85 avant l'enseignement correspondant. Le test de la première promotion a également été exploité par J. Robinet pour son étude sur les réels (Robinet, 1986). La deuxième promotion avait un meilleur niveau de départ en maths, comme on le verra. Les résultats sont donnés sous forme d'une addition, le premier nombre pour la première promotion, le second pour la seconde.

Ce que sont les décimaux

De la première question, on peut déduire plusieurs conceptions sur la nature des nombres décimaux :

- (I) tous les nombres qui peuvent s'écrire avec une virgule sont décimaux (donc tous les réels), réponse oui partout : 2 + 1
- (II) tous les nombres réels sont décimaux sauf les entiers (réponse non pour 13 et $\frac{117}{3}$ oui ailleurs) : 2 + 2
- (III) les décimaux sont ceux qui ont une écriture finie (fractions acceptées mais écritures décimales infinies rejetées) : 2 + 0
- (IV) les décimaux sont les entiers ou ceux qui ont une écriture à virgule (rejet des fractions) : 0 + 1 + 1 qui accepte les tiers (2ème promotion)
- (IV bis) les décimaux sont ceux qui sont écrits avec une virgule ou sous forme de fraction qui tombe juste (rejet de $\frac{19}{3}$, non réponse pour $\frac{117}{125}$)
- (V) les décimaux sont ceux qui ont une écriture à virgule finie au sens strict (rejet des entiers et des fractions : aucun des nombres proposés n'est décimal) : 1 + 0
- (VI) classements disjoints : "entiers", décimaux", "suites décimales" ou "réels" : 1 + 1 (qui n'a pas terminé et ne répond pas pour $\frac{215}{64}$ et 17,99999...)
- (VII) conception correcte mais rejette 17,99999... : 6 + 4 (+2 de la deuxième promotion pour qui la division doit tomber juste assez vite et qui de ce fait excluent $\frac{215}{64}$)
- (VIII) conception correcte : 2 + 0

Un élève de la 2ème promotion n'est pas classé : il exclut 2,2222... mais met un point d'interrogation pour $\frac{19}{3}$ et 17,999999...

On peut penser qu'après enseignement, certains des élèves maîtres disposent de critères de divisiblité sur les dénominateurs ou savent qu'il faut continuer la division jusqu'à ce qu'on ait atteint la période, ce qui fait que les réponses se réfèrent à une conception apparemment claire, même si elle est fausse : on a des réponses cohérentes pour les nombres décimaux écrits sous forme fractionnaire. Le 17,999... est accepté par 2 étudiants (l'un a un bac F mais est en cours de DEUG A, l'autre a un bac B mais a fait un an de mise à niveau en vue d'un DEUG A ou B). L'enseignement avait été assez léger parce que les étudiants pensaient assez bien connaître ce sujet. Il a bien sûr été repris après le test. Nous n'avons pas de test avant enseignement mais on peut estimer que seuls ont progressé ceux qui étaient assez proches d'une conception correcte.

Intercalation

Les items les mieux réussis sont les deux premiers et les deux derniers, le plus mal le troisième :

- entre $\frac{1}{3}$ et 0,3333333... il n'y a pas de nombre sauf pour un étudiant de la première promotion pour qui il n'y en a pas dans **Q** mais il y en a dans **D** et dans **R** (il ne fournit pas d'exemple !)
- entre 1,8732 et 1,8733, il y a presque toujours un nombre (avec exemple) sauf pour un étudiant de la première promotion pour qui il n'y en a pas, et un autre ne fournit aucun exemple.
- entre 2,5789 et 2,579, il y a toujours un nombre avec exemple correct pour 15 étudiants de la première promotion (1 non réponse, 1 propose 2,580) et 11 de la deuxième (1 "non" et 1 réponse 2,5782)
- entre $\frac{7}{19}$ et $\frac{8}{19}$ il y a un exemple correct pour 10 étudiants de la première promotion (dont 3 fois $\frac{15}{38}$ 2 fois $\frac{75}{190}$ 1 fois $\frac{71}{190}$ 2 fois $\frac{7.1}{19}$ et des décimaux) et pour les 13 étudiants de la deuxième promotion (dont 3 fois $\frac{7.5}{19}$ et 1 fois $\frac{75}{190}$). Dans la première promotion 2 étudiants répondent oui sans exemple, 2 fournissent des exemples faux (4 pour l'un, $\frac{15}{19}$ pour l'autre), 3 répondent non.
- entre π et 3,1416, beaucoup d'exemples faux sont dûs à une mauvaise connaissance des décimales de π (6 dans la première promotion, 4 dans la deuxième). On peut aussi attribuer à cela les réponses "oui" sans exemple (resp. 3 et 1 ; un étudiant explique d'ailleurs pourquoi il ne peut pas fournir d'exemple). On a aussi dans la première promotion 3 réponse "non" et 1 réponse "non dans **Q** et **D** oui dans **R**". Il nous reste ainsi 4 exemples corrects dans la première promotion et 8 dans la seconde (davantage d'étudiants devaient disposer d'une calculette).
- entre $\frac{22}{7}$ et 3,142857, on trouve un exemple correct pour 9 étudiants de la première promotion et 6 de la seconde , 2 réponses "oui" sans exemple pour les premiers, 2 exemples faux pour les seconds, 5 réponses "non" dans chaque promotion et 1 réponse "non dans **Q** et **D** oui dans **R**". Il semble que quand on a épuisé la période, on a vraiment atteint le rationnel !

Il semble donc que la nature des nombres décimaux, leur place par rapport aux autres ensembles de nombres, la différence entre nombre et écriture d'un nombre sont des questions qui sont loin d'être réglées pour les élèves instituteurs : les fractions sont difficilement acceptées comme nombre décimal par certains alors que des écritures décimales infinies le sont. Inversement, d'autres acceptent toutes les fractions qui sont perçues comme des écritures finies mais rejettent les écritures décimales infinies sans voir qu'un même nombre peut avoir les deux types d'écriture. Rappelons que ceux que nous avons interrogés ont choisi l'option mathématiques et n'ont pas a priori un niveau plus faible que l'ensemble des futurs instituteurs.

5.3. Réponses de professeurs de collège à des questionnaires sur leur enseignement

Au cours du stage de 1985 dont nous avons déjà parlé et qui a donné lieu au questionnaire B pour les élèves, nous avions aussi demandé aux professeurs de répondre à un questionnaire concernant leur enseignement des décimaux, rationnels et réels en classe de 4ème (les programmes en vigueur étaient alors ceux de 1977). Ce questionnaire se trouve en annexe, nous avons reçu 50 réponses.

L'année suivante, nous avons proposé à d'autres professeurs en stage un questionnaire sur la place qu'ils faisaient dans leur enseignement à la graduation d'une droite ou d'une demi-droite. Le texte du questionnaire se trouve en annexe, nous avons reçu 39 réponses.

Nous utilisons ici ces questionnaires du point de vue de l'enseignement des nombres, nous y reviendrons dans le chapitre 6 pour exploiter les indications qu'ils nous donnent sur les représentations métacognitives des professeurs.

5.3.1. Enseignement des rationnels et décimaux en 4ème

a) les classes des stagiaires (question 1)

Sur les 35 classes concernées par les réponses (2 professeurs ont 2 classes de 4ème), 20 sont composées de 40% ou plus d'élèves ayant au moins un an de retard, auxquelles il faut ajouter 2 classes pour lesquelles le professeur dit qu'il y a beaucoup d'élèves en retard ou que les élèves sont plutôt en retard. Il y a 7 classes pour lesquelles le retard est compris entre 10 et 40% et 6 classes pour lesquelles il est inférieur ou égal à 10%.

b) les manuels utilisés (question 2)

Le manuel le plus utilisé par les élèves des stagiaires est le Durrande distribué par T.V. (cité 18 fois sur les 45 réponses à cette question), viennent ensuite le Louquet de chez Colin (7 fois), le Cédic (6 fois), le Hachette collection M et le Mauguin de chez Istra (4 fois), le Nathan et le Monge de chez Belin (2 fois), le Bordas (1 fois), un professeur déclare ne pas donner de livre de cours à ses élèves mais seulement un livre d'exercices.

La plupart des professeurs déclarent utiliser d'autres sources d'information pour préparer leur cours – autres manuels (31) ou documents IREM (4) – ou leurs exercices (autres manuels, 29, documents IREM, 2). Seize professeurs citent 2 livres et 15 en citent au moins 3 ou disent "tous les livres", "le plus possible". Trois professeurs n'utilisent aucun livre pour préparer leur cours et 1 n'en utilise aucun non plus pour les exercices. Douze professeurs n'utilsent que le livre des élèves (ou aucun livre), il s'agit du Durrande pour 7 d'entre eux. Cinq professeurs ne répondent pas à la question.

c) place dans le travail de l'année (questions 3 et 4)

A peu près le même nombre de professeurs traitent les nombres en une fois (17) ou en plusieurs fois (24), compte-tenu du fait que les réponses plusieurs fois ne sont pas toujours claires et peuvent simplement indiquer une alternance avec un autre sujet comme la géométrie. Six professeurs déclarent les traiter sur toute l'année : certains précisent *"je les introduis dès le début du premier trimestre et on les reprend en exercice toute l'année".* Deux professeurs ne répondent pas (ils n'ont pas de 4ème depuis longtemps) et 2 ne traitent que les rationnels en 4ème.

Le temps consacré varie de 3 semaines à 2 trimestres ! Le plus fréquent est 2 mois de classe et la plupart des temps cités sont entre 1 mois et 3 mois de classe.

d) présentation choisie (questions 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)

- Très majoritairement, les professeurs traitent les rationnels avant les réels (43 contre 5 qui font le contraire, 2 ne traitent que les rationnels). Parmi les 5 qui introduisent **Q** comme une partie de **R**, 2 le font pour la première fois cette année et 1 trouve que ça marchait mieux dans l'autre sens. De même ils traitent les opérations avant l'ordre (36 contre 6 qui font le contraire, 6 qui traitent les 2 en même temps et 2 traitent addition puis ordre puis multiplication), et ceci quelle que soit la présentation choisie (parmi les 5 qui traitent les réels d'abord, 4 abordent les opérations avant l'ordre et 1 en même temps).

- Peu de professeurs répondent à la question concernant la place faite aux décimaux dans cet enseignement : 4 accordent peu de place, 1 fait des révisions, 2 parlent des fractions décimales, 3 utilisent les décimaux pour encadrer des réels, 2 donnent une grande place en exercices et 1 accorde une très grande place aux décimaux pour l'extension aux réels.

- L'importance accordée aux problèmes de mesure est très différente d'un professeur à l'autre : quelques-uns n'y accordent aucune importance, ni en cours ni en exercice, pour d'autres au contraire c'est très important et cela fait partie intégrante du cours. La plupart des professeurs en parlent peu dans le cours mais beaucoup déclarent les utiliser pour introduire les fractions et la majorité des professeurs les utilisent dans les exercices, au moins avant le cours, le plus souvent avant et après le cours.

- Pour 33 professeurs sur 50, le mot fraction désigne l'écriture d'un rationnel, pour 3 c'est aussi une division, pour 1 c'est aussi la solution d'une équation, pour 9 c'est à la fois un couple et l'écriture d'un rationnel, certains précisent d'abord couple ou suivant le moment du cours, 2 professeurs n'utilisent pas ce mot en classe, pour l'un d'eux c'est un couple, pour l'autre c'est un élément d'une classe d'équivalence. Un professeur ne répond pas à la question.

- La plupart des professeurs pensent qu'il est important de distinguer nombre et écriture d'un nombre (32 oui, 3 non, 7 réponses nuancées, 8 non réponse). Certains précisent que c'est parce qu' un nombre peut s'écrire de plusieurs façons, en particulier les rationnels. Les réponses nuancées sont parfois des oui qui sont presque des non ou des non qui ressemblent à des oui : *"important, non, mais il faut le signaler à l'occasion", "oui, mais pour les élèves, s'il y a confusion, je rectifie sans plus" "non, s'il est bien acquis qu'un nombre a plusieurs écritures".* Quand les professeurs émettent des réserves, c'est plutôt dans le sens "oui" avec les bons élèves, "non" avec les faibles : *"non, niveau des élèves !" "cela me paraissait très important quand j'avais des classes fortes aptes à comprendre en majorité. Je ne peux pas faire la distinction dans certaines classes qui finissent par tout mélanger et surtout se paniquer" "non dans des classes faibles comme celles que j'ai eues, sinon oui"* ou *"bien sûr, cela me parait important mais cela ne préoccupe guère les élèves".*

- Presque tous parlent des suites décimales illimitées (44 oui, 3 non), principalement en cours, le plus souvent pour introduire **R**, parfois **Q**.

- Les irrationnels cités sont presque exclusivement π (41 fois) et $\sqrt{2}$ (35 fois), parfois $\sqrt{3}$ (5 fois), une $\sqrt{\ }$ ou la diagonale d'un carré sans préciser (4 fois), ou une suite décimale illimitée non périodique (4 fois). On donne peu ou très peu d'exercices sur les irrationnels, voire aucun.

- Il y a peu de travail sur les approximations décimales des réels : 7 personnes seulement y consacrent un chapitre spécial de leur cours. Quand il y a des réponses sur les exercices, c'est "peu", "très peu" ou "quelques exercices". Seules 5 personnes en mettent beaucoup dont 1 signale qu'il utilise les calculatrices, et 3 autres surtout à propos des rationnels ; un professeur réserve plutôt cela pour la 3ème. Quelqu'un dit "j'ai fait, les élèves n'ont pas compris, je ne fais plus".

- Pour les résolutions approchées d'équations, il y a 33 réponses : 5 personnes accordent une place importante en exercice, 11 peu ou très peu de place, 11 n'accordent aucune place, 6 personnes réservent cela à la 3ème. Une personne parle de 3x =2 pour introduire **Q** et 4 autres d'identités remarquables : elles voulaient sans doute parler de solutions exactes d'équations.

- Pour les représentations graphiques, la plupart des professeurs qui répondent ne leur consacrent aucune place (16) ou une petite place (9). Seuls 7 d'entre eux consacrent une place importante ou non négligeable. La plupart du temps, il s'agit de la graduation de la droite en rapport avec l'ordre dans **Q** ou **R** et les encadrements. Une personne signale la représentation d'une fraction dans le plan. Un professeur dit qu'il attache une place importante plutôt en 6ème et un autre dit que c'est en 3ème. Il semble donc que personne ne s'autorise à utiliser des représentations graphiques de fonctions dans des problèmes avant que celles-ci n'apparaissent explicitement dans le programme comme objet d'enseignement (représentations de fonctions affines en 3ème) alors que le repérage dans le plan est au programme de 6ème.

e) les points que les professeurs trouvent difficiles à présenter (question 17)

Vingt et un professeurs ne répondent pas à cette question, 3 répondent "non" et 1 "ça dépend du niveau". Pour un autre "les élèves ont besoin d'exemples concrets" (sans doute veut-il dire que c'est difficile d'en trouver. Pour les 24 autres, ce sont le plus souvent soit les réels (13 fois) et en particulier l'introduction des réels, (qui sont trop abstraits à part π), l'existence des réels ou des irrationnels et leurs opérations alors qu'on calcule souvent dans **Q**, la différence entre un réel et un rationnel (2 fois), ou entre un rationnel et un décimal, ou le passage fractions, rationnels, réels, soit ce qui tourne autour de la relation d'équivalence des fractions (8 fois) ou le passage aux négatifs (3 fois), par exemple $\frac{-3}{2} = \frac{3}{-2}$. Deux personnes parlent des règles de calcul algébrique, mais la question est ambigüe : certains professeurs signalent ce qu'ils trouvent difficile à présenter, en tenant compte éventuellement du niveau des élèves, les autres se placent du point de vue des difficultés des élèves : *"assimilation de la distributivité en général, beaucoup d'élèves confondent les règles de la multiplication et de la division".* Certes, les deux points de vue sont liés mais les réponses se situent souvent de l'un ou de l'autre.

f) les difficultés des élèves (questions 18, 19, 20)

Nous regroupons les réponses aux questions 18 et 19 puisque les répondants les ont peu distinguées. Quelques-uns font cependant la différence et s'étonnent de difficultés sur les techniques opératoires "difficulté étonnante sur $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ puis déplacement de la difficulté vers l'addition et refus de règles de base simples $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ au profit de $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$". Un professeur signale la difficulté d'acquisition véritable : *"Depuis 18 ans que j'enseigne les rationnels, il me semble avoir progressé dans la notion de "fraction" ; j'ai consacré de plus en plus de temps à la technique des opérations. Les résultats sont satisfaisants à la fin du cours <u>mais</u> 2 mois plus tard au moment de l'utiliser pour un autre cours (physique, atelier etc...) les collègues constatent que 80% des élèves n'ont pas définitivement assimilé les techniques opératoires."*

Les erreurs signalées sont des erreurs de calcul, beaucoup précisent : la réduction au même dénominateur (13), la simplification (13) - erreurs, refus de simplifier ou simplification abusive, les confusions entre la multiplication et l'addition (22 dont 7 précisent que c'est au niveau des techniques), la confusion opposé - inverse (2), les erreurs de signe (5), la confusion du signe des nombres et du signe opératoire (5), les valeurs absolues. Un exemple de simplification abusive dans le calcul algébrique : simplifier par x dans $\frac{2x-1}{x+3}$.

Beaucoup voient des relations entre les erreurs dans le calcul algébrique et le calcul numérique (2 réponses non, 21 non réponse), certains répondent "évident", d'autres que ce sont les mêmes erreurs. Un professeur trouve plus d'erreurs dans le calcul numérique et un autre le contraire. On trouve aussi des exemples : erreurs de signe, distributivité, priorités et parenthèses, factorisations, simplifications abusives, confusion a\S(2) et 2 a $(4x)^2 = 4\,x^2$, $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $7 + 3x = 10\,x$ lié à la non prise en compte de la priorité dans ce cas.

g) les programmes (questions 21, 22)

Ce qui manque principalement aux élèves pour la 4ème, d'après les professeurs qui répondent :
- le fait que les fractions ne sont plus utilisées en 6ème et 5ème (9)
- qu'il n'y ait pas assez de calcul algébrique, d'utilisation de la distributivité, mise en facteur, parenthèses ... en 6ème 5ème (10)
- le calcul numérique, les techniques opératoires dans **Z** et **D** (15)
- le calcul mental (6)
- l'arithmétique : PPCM, PGCD, multiples, caractères de divisibilité ... (9)

Les allègements proposés en 4ème concernent la géométrie (9) (3 proposent d'enlever les vecteurs, 2 les symétries, 1 les démonstrations, 1 l'ordre sur une droite et la partition du plan), les réels (4) à reporter en 3ème, les relations (1), les inéquations du 1er degré à une inconnue (1), 1 professeur trouve que la partie sur **Q** est trop longue, 3 personnes répondent "non", 1 "non sur l'algèbre" et 1 "pas sur **Q** et **R**. Un professeur dit simplement "sûrement" et 27 personnes ne répondent pas à cette question.

h) comment aborder une notion nouvelle (question 9)

Huit personnes ne répondent pas et un ne comprend pas la question. Pour 8 professeurs, cela dépend (1 précise du sujet, 3 des classes, 2 du contenu et des classes. 15 professeurs abordent une notion nouvelle par les problèmes, 5 par des exemples, 1 par exercices puis cours, 6 par cours et problèmes, 4 par le cours ; quelqu'un dit *"les fractions ont déjà été vues en 6ème par la notion de partage"* (cela veut-il dire qu'en 4ème on peut donc démarrer le cours ? remarquons que les fractions n'étaient pas au programme de 6ème à l'époque) et 2 répondent "non" (cela veut peut-être dire par le cours ?). On trouve quelques commentaires : *"plutôt par le cours (je trouve que cela va plus vite que par les problèmes) mais par goût je préférerais par les problèmes", "toujours à travers des problèmes dans ma classe type "aménagée", en alternance dans l'autre classe"* ; un professeur qui démarre par le cours a une organisation originale *"2 classes réunies pour une "conférence" 1h par semaine, reprise des démonstrations, exercices d'application 2h par classe, séance de travaux individualisés par 1/3 de groupe".*

Les réponses ne permettent pas vraiment de savoir s'il y a une différence quand on donne un exemple avant le cours ou qu'on aborde par un problème. Le seul texte précis est le suivant : *"partage d'un segment en 3 segments égaux, si [AB] mesure 10, combien mesurent les petits segments ? (on a fait les projections avant donc on sait partager)",*
il y a aussi *"fractions équivalentes par partage d'un disque (en utilisant le rétroprojecteur, très bien pour les sommes de fractions dans une classe faible", "
fractions de grandeurs, insuffisance des ensembles étudiés (avec rappel de la nécessité de construire **Z D Q R** par problèmes pratiques", "
partages, dénombrement, addition de partages".*
Quelques professeurs donnent des principes généraux sur leur manière de faire la classe mais il est difficile de savoir ce que cela recouvre comme pratiques concrètes : *"d'abord une étude expérimentale (quand c'est possible), puis le cours, puis des applications (exercices et problèmes)", "
en général, j'aborde les questions nouvelles par des exercices d'introduction, empruntés si possible au concret", "
à travers des exercices, le cours a une place restreinte, mais des mises au point sont fréquentes".*
Un professeur qui déclare aborder les notions nouvelles par le cours ajoute une remarque en fin de questionnaire : *"- il me semble impotant, quelle que soit la notion qu'on introduit, d'utiliser ce que les élèves connaissent, cela les sécurise et on avance plus vite qu'en introduisant une notion en leur assénant des nouveautés pour les raccrocher plus tard à ce qu'ils connaissent. - la notion de fraction paraît assez simple aux élèves lorsqu'on part du concret".*

En résumé, les professeurs ont le souci de faire comprendre les concepts aux élèves en leur montrant ou en leur faisant traiter des problèmes "concrets" qui sont censés avoir du sens pour eux, mais à travers les discours, on ne peut pas appréhender le degré de complexité des problèmes abordés, ni ce qui est réellement à la charge de l'élève dans cette résolution, ni quelle articulation est faite entre le cours et les exercices résolus par les élèves avant.

i) attentes par rapport au stage

La moitié des participants se sont exprimés (26). Ils attendent d'abord un éventail critique des différentes présentations possibles, une clarification des présentations possibles (5), une présentation accessible aux élèves ou des moyens d'adapter le programme aux élèves par des présentations plus simples (5), ou <u>une</u> présentation (4), en gardant un certain recul *"une présentation possible du cours puis analyse critique"* ou carrément *"ligne de*

conduite pour présenter mes cours" (2) *"savoir exactement ce qu'il faut faire et dire"*, une définition des objectifs à atteindre (4), des moyens de subvenir aux erreurs type (1), une réflexion et un échange entre "pratiquants" (2) ou *"savoir ce qui se fait ou peut se faire hors de ma classe"* qui rejoint la première et la dernière des attentes.
Des réponses (3) restent vagues et donc difficiles à classer *"apprendre à présenter correctement Q et R", "avoir un cours structuré", "confirmer la progression de la présentation rationnels ——> réels".*
D'autres (2) sont au contraire très précises *"recherche d'une présentation cohérente du calcul algébrique et des réels rationnels à partir de la géométrie (nouveaux programmes)"* avec des questions vraiment de didactique "
1. informations sur les structures mathématiques qui président à la construction de Q ou de R.
2. réflexions et informations sur les conséquences des choix du professeur dans l'introduction, manipulation des rationnels et des réels, les opérations sur la suite du programme de 3ème et surtout de 2ème cycle.
3. en conséquence, inventaire des pièges théoriques de telle ou telle approche par rapport à la suite des études des élèves".

En conclusion, l'enseignement des rationnels et décimaux dans les classes de collège semble utiliser très peu de jeux de cadres (pas de représentations graphiques, la seule interaction avec la géométrie se fait par la graduation de la droite, et encore cela n'a-t-il le plus souvent qu'une place restreinte, limitée à ce qu'en dit le programme, encore réduite pour des élèves en difficulté). Ceci est peut-être dû au fait que, pour beaucoup d'enseignants, on ne se croit pas autorisé à aborder des notions qui figurent à un programme ultérieur (comme représentation graphique) parce qu'on n'envisage pas d'aborder une question sans la traiter de façon générale et définitive, d'utiliser comme outil implicite des notions qui seront explicitées plus tard : on se se permet pas d'encadrer des racines d'équations qu'on ne sait pas résoudre, ce qui est pourtant très utile. La lecture des programmes, présentés de façon linéaire encourage cette façon de faire, en effet on introduit des techniques au niveau n pour s'en servir au niveau n+1 : on fait de l'arithmétique PPCM, PGCD en 5ème et on s'en sert pour réduire des fractions au même dénominateur en 4ème ; on introduit les réels et on donne éventuellement des développements décimaux illimités pour motiver leur introduction en 4ème mais on attend la 3ème pour faire des approximations décimales de racines carrées, on fait du repérage en 6ème mais il faut attendre la 3ème pour voir des représentations graphiques de fonctions et ce ne sont que des fonctions affines.

On donne des exemples pour motiver les élèves, mais on n'a pas le temps de (ou pas assez confiance pour) leur donner des vrais problèmes complexes pour lesquels ils ne disposent pas déjà explicitement de tous les outils efficaces nécessaires à la résolution. Pour les élèves en difficulté, il faut encore simplifier, trouver des présentations accessibles. Il faut renforcer les techniques puisque 2 mois après elles sont oubliées. Il est frappant de constater que toutes les difficultés signalées ou presque sont d'ordre technique : les exercices et les exemples ne semblent là que pour faire accepter, rendre naturelle la règle qu'il faudra retenir. La recherche des différents sens à construire pour la connnaissance et des situations qui permettraient de construire ce sens se pose à peine.

En fait nous avons vu dans les questionnaires pour élèves que les techniques étaient assez bien maîtrisées, il est vrai que le test a été passé dans les classes assez peu de temps après l'apprentissage.

Les professeurs constatent que les erreurs dans le domaine numérique et dans le domaine algébrique sont liées. Pourtant, il semble qu'il y ait peu d'interaction dans l'enseignement entre les deux domaines : bien sûr il y a des applications numériques pour des calculs algébriques mais il n'y a que très peu de place réservée à la résolution approchée d'équations par exemple, et quand cela se produit, c'est toujours $x^2 = n$. Evidemment pour résoudre quelque chose de plus compliqué, il faudrait pouvoir disposer en même temps d'un autre cadre, géométrique ou graphique par exemple.
Enfin le discours métamathématique, distinction entre nombre et écriture de nombre par exemple, semble plutôt réservé aux bons élèves. C'est peut-être parce que ce genre de discours apparaît comme formel et abstrait.

5.3.2. Place faite à la graduation d'une droite

L'année suivante (1986), nous avons proposé à d'autres professeurs en stage à l'IREM un questionnaire portant sur la place faite dans leur enseignement à la graduation d'une droite ou d'une demi-droite. Nous avons reçu 39 réponses. Les professeurs venaient chercher dans le stage des informations sur les nouveaux programmes qui allaient entrer en vigueur en 6ème l'année suivante, beaucoup ont répondu au niveau de la 6ème, certains ont distingué suivant les classes.

La période

Pour 13 personnes ce travail se fait tout au long de l'année, pour 15 à une période déterminée, pour 4 à une période déterminée en 6ème et 5ème, toute l'année en 4ème et 3ème, 1 professeur précise même "3ème trimestre de 6ème et toute l'année de 5ème à 3ème". Quelques professeurs donnent des réponses détaillées, voire très détaillées selon les classes, nous en reproduisons quelques-unes :

1. *"6ème. Graduation d'une demi-droite par des décimaux. Elle fait l'objet d'un cours afin de bien comprendre le principe des nombres décimaux, graduation de 2 demi-droites, côtés d'un secteur angulaire droit, par exemple pour la représentation graphique de relations de proportionnalité. Utilisation de papier millimétré.*
*5ème. Graduation d'une droite par des décimaux (positifs et négatifs). Quelques exercices à l'occasion de la présentation des décimaux relatifs ainsi que de la relation d'ordre dans **D**.*
*4ème. Graduation d'une droite par des décimaux relatifs : relation d'ordre dans **D** et encadrements (une leçon). Graduation d'une droite par des décimaux et des fractions. Grande place accordée à la leçon : droite graduée (mesure algébrique, relation de Chasles etc...) 2 à 3 semaines avec un devoir entier d'une heure. Remarque : pour la pratique fractions de dénominateur toujours inférieur à 10 (2,3,4,5...)*
*3ème. Graduation d'une droite par des décimaux et des fractions. Relation d'ordre dans **R** ; encadrements, intervalles. Inéquations du premier degré à une inconnue et systèmes d'inéquations (interprétation graphique nécessaire). Calcul vectoriel : repère cartésien, repère orthonormé.*
Donc une place très importante, échelonnée dans l'année."

2. *"en 6ème ensembles de nombres **N** ℘ **Z D** ; repérages sur la droite après étude dans le plan des relatifs (quelques heures de cours).*
en 4ème Graduation de la droite. Mesure algébrique. Bipoint au 3ème trimestre 1 mois 1/2
en 3ème pratiquement toute l'année"

3. *"Je n'ai pas de 6ème*
en 5ème 2 ou 3 cours (ça marche bien en général donc je ne m'attarde pas)
en 4ème 3 ou 4 cours (c'est fait en fin d'année, il me reste souvent peu de temps)
en 3ème pendant les révisions (qui sont d'autant plus longues que la classe est faible ! ça peut durer 1 mois !)"

4. *"j'ai*
6ème. Graduation décimaux pour les introduire (partage de segments en 10)
3ème (3/4h ou 1/2h) au moment th. de Thalès, partage en 2, en 3, $\frac{7}{3}$, $\frac{3}{4}$ ..."

5. *"en 6ème point fort sur - longueurs - mesures de longueurs - **Z** : construction, relation d'ordre, addition et soustraction (équation a+x =b) - les fractions.*
*en 4ème accentuation pour - distances (inégalité triangulaire, cas des points alignés avec équations MA + k MB = 0...) - les ensembles **Z Q** et **R**. - **Q** : représentation $\frac{3}{4}$; ... décomposition $\frac{25}{3} = 8 + \frac{1}{3}$...) - relation d'ordre dans **Q**, son axe - mesures algébriques, barycentres sur une droitte - les inéquations - intervalles.*
en 3ème surtout sur - les ensembles - $\overline{AM} = k\ \overline{AB}$ (pour mult. k $\vec{V}$) - préparation à Thalès - équations - inéquations - signe ax+b, préparation aux tableaux de signes - distances et équations (inéquations) avec valeur absolue".

Ces quelques témoignages montrent que l'importance accordée à la graduation d'une droite varie considérablement d'un professeur à l'autre. Pour les professeurs 1 et 5, elle a beaucoup d'importance, ce n'est pas seulement un objet d'enseignement mais c'est un outil pour traiter ou donner du sens à beaucoup d'autres sujets du programme. Ce ne semble pas être le cas pour les professeurs 3 ou 4 qui les traitent comme une ligne du programme.

Variation suivant la classe

La place accordée dépend du niveau de la classe pour 15 professeurs, elle est constante pour 19. Mais la place accordée ne correspond pas forcément au temps passé : 17 professeurs y passent plus de temps avec une classe faible, parmi eux 8 accordent une place constante quelle que soit la classe ; 4 professeurs y passent plus de temps avec une bonne classe (dont 1 accorde une place constante, il est vrai qu'on parle du temps en cours, peut-être est-ce le contraire pour les exercices). Quelqu'un précise qu'il passe plus de temps en soutien avec une classe faible, mais fait de l'approfondissement avec une bonne classe.

Exercices mélangeant graduation et nombres non entiers

Certains professeurs ne font pas de différence suivant le niveau de la classe (8), d'autres en donnent plus pour une bonne classe (9), d'autres pour une classe faible (4). Certains (4) répondent "non" (cela veut-il dire qu'il ne font pas de différence ou qu'ils ne font pas d'exercice de ce type ?) ; c'est sans doute la deuxième interprétation qui convient pour les 2 professeurs qui répondent "non, pas le temps" ; on a aussi 2 réponses "oui", 5 non réponse et 4 personnes qui distinguent le contenu suivant le niveau de la classe : *"dans une classe faible, seulement les nombres à virgule",*
"à peu près le même temps, la difficulté est différente au niveau des nombres non entiers",
"plus d'exercices dans les classes faibles de 4ème et 3ème concernant la représentation, la relation d'ordre. Dans les classes fortes, plus d'exercices sur distances, valeurs absolues",
"beaucoup plus d'exemples avec une classe faible, plus d'exercices avec une bonne classe" ;
on trouve aussi un commentaire valant réponse à cette question et à la suivante : "*Les bons élèves assimilent très rapidement cette notion que ce soit avec des relatifs, des fractions... mais les élèves faibles demandent qu'on insiste davantage, qu'on varie les exercices. Cette notion doit être reprise tout au long de l'année".*

Pour les relatifs, on a respectivement 7 personnes qui ne font pas de différence, 4 qui en font plus pour les bonnes classes, 2 pour les classes faibles, 4 qui précisent qu'ils se limitent aux entiers, 2 réponses "non", 2 réponses "non, manque de temps", 6 "oui".
Il y a toujours l'ambiguïté au niveau de la quantité de travail ou du temps passé : quelqu'un répond *"pareil le temps passé n'est pas le même mais j'essaie de faire autant d'exercices".*

Les réponses "non " ou "oui" sont sans doute à interpréter plutôt comme "non je ne fais pas ce genre d'exercices" ou "oui j'en fais" parce qu'il y a une réponse non, oui (relatifs), une réponse non, *"un peu plus pour une bonne classe parce que les enfants comprenant plus vite, on fait plus d'exercices"* et quelqu'un qui ne répond pas dans le premier cas et dit pour les relatifs *"dans ce domaine, je ne saurais me passer de parler de la graduation d'une droite car l'explication devient plus aisée selon les exemples choisis et les élèves comprennent plus vite".*

Là aussi, on trouve des distinctions de contenu suivant le niveau : *"en 6ème temps équivalent sur graduation, addition, ordre. dans les classes fortes plus de temps sur $a+x = b$ équivaut à $x = b-a$ (et représentation)", "même chose quelle que soit la classe, les corrections d'exercices pour une classe faible sont plus approfondies et durent plus longtemps".*

Choix faits si on a peu de temps pour traiter l'ordre des décimaux

Dans ce cas, 7 professeurs consacrent peu de temps à la graduation d'une demi-droite, 3 précisent que ça se retrouve dans d'autres parties du programme, 11 lui donnent beaucoup d'importance ou un temps suffisant (quelqu'un précise "cela permet de gagner du temps"), 3 consacrent 4h, 3 autres 2h, un 1h, un 1/2 h et un 3 semaines à 1 mois, un répond "non" et un autre "pas sur la demi-droite". Pour 8 professeurs cela dépend du niveau, pour 4 cela n'en dépend pas. 3 personnes déclarent lui accorder plus d'importance pour une classe faible : *"plus la classe est faible, plus le support graphique est utile".* Deux personnes disent *"bonne classe : approfondissement, classe faible: apprentissage du raisonnement, de la technique opératoire"*
Par ailleurs, quelqu'un précise qu'il choisit une unité simple (cm ou 4 carreaux pour les fractions "quart") pour une classe faible. Il ajoute *"si le temps manque, ne pas insister sur les changements d'unités 2u, 4u, 3u..., si la majorité n'est pas à l'aise avec la proportionnalité (ce qui est le cas le plus courant) et si les problèmes $4x = 2$ ... n'ont pas été assimilés par l'"ensemble (ce qui est le cas le plus courant)".*
Un autre professeur répond très précisément *"1 leçon : graduation d'une demi-droite, l'unité étant 10 carreaux. But recherché : bien comprendre le principe de la première sous-graduation. Le rythme dépend de la capacité d'assimilation des élèves. Rangement des nombres décimaux : exemples de difficulté progressive et en plus grand nombre avec des élèves faibles".*
En fait il est difficile de différencier les réponses "peu de place" et "une place suffisante" puisque cela dépend beaucoup de l'idée que le professeur se fait de la place idéale et cela ne renseigne pas sur cette idée. Cela ne nous dit pas non plus quelle activité est proposée aux élèves : si on leur montre comment est faite la graduation (ce qui correspond aux réponses précises données) ou si on l'utilise, par exemple pour un problème d'encadrement d'une solution d'une équation qu'on ne sait pas résoudre.

Autres représentations

Six professeurs ne répondent pas, 1 dit qu'en 6ème la graduation de la droite lui suffit, 4 répondent non, 1 oui pour les fractions, les autres proposent surtout des représentations pour les fractions avec des exemples

uniquement matériels (tartes, horloge, bière...) pour 7, uniquement mathématiques (aires, rectangles, disques, segments...) pour 10, à la fois matériels et mathématiques pour 6.
Les exemples ne font intervenir que des aires dans 15 cas (uniquement forme de disque dans 9 cas : tartes, cadrans, disques...), des aires et des longueurs dans 6 cas, des roues dentées (2), des pourcentages (1), des conversions pour les décimaux (1), des représentations littérales (1). Quelques réponses vagues "des fractions de grandeur", "des problèmes concrets", "des exemples de la vie courante".
Des représentations sont aussi proposées pour les relatifs : ascenseur ou avancer, reculer (4), gains et pertes, bilans (3).
Un professeur parle de repérage dans le plan.

Recherche de problèmes et d'exercices en classe

Nous esquissons rapidement le résultat du dépouillement de cette question qui sera examinée plus en détail dans le chapitre 6.

Les proportions sont extrêment variables, de moins de 1/8 du temps à 80% pour 2 professeurs ou même quasiment la totalité pour 2 autres.
La plupart des professeurs situent le temps consacré à la recherche de problèmes en classe entre 1/4 et 3/4 du temps, et la majorité autour de la moitié. Les différences faites pour une classe faible ou une bonne classe ne vont pas toujours dans le même sens : 4 consacrent plus de temps aux exercices dans une classe faible et 3 en consacrent moins. Beaucoup de professeurs déclarent que ce n'est pas le temps consacré aux exercices qui change mais que c'est la nature des exercices : dans une classe faible, on donne des exercices plus simples, plus répétitifs, plutôt des exercices d'application que de recherche. Nous reviendrons sur les nombreux commentaires faits à cette question dans le chapitre 4.

En résumé, la place accordée à la graduation d'une droite est très variable suivant les professeurs : elle est plus ou moins intégrée à l'enseignement sur les nombres. Les décisions prises quand les élèves sont faibles diffèrent aussi, mais les différences de nature des exercices proposés dans une classe faible semblent aller très majoritairement dans un sens : exercices plus simples, plus d'applications. Certains donnent une recherche plus évidente et la mènent pas à pas dans une classe faible, d'autres renoncent complètement aux exercices de recherche dans ce cas *"bien souvent pour une classe de niveau moyen, ça n'est pas rentable parce qu'il n'y a que 3 ou 4 élèves qui cherchent (toujours les mêmes !), les autres attendent passivement la solution"*.

Il ne semble pas y avoir de liaison entre le fait d'accorder beaucoup de place à la graduation et beaucoup de temps aux exercices : il y a à peu près autant de gens qui accordent soit beaucoup d'importance à la graduation et peu de temps aux exercices soit peu d'importance à la graduation et beaucoup de temps aux exercices que de gens qui accordent à la fois beaucoup d'importance à la graduation et beaucoup de temps aux exercices ou peu aux deux.

Ces décisions dépendent des représentations des professeurs sur les contenus et la manière efficace de les enseigner, nous reviendrons plus précisément sur ce point au chapitre 6.

Conclusion

Nos observations nous ont permis de confirmer certains résultats sur les décimaux, comme les règles erronées de comparaison explicitées par C. Grisvard et F. Léonard : la règle 1 est utilisée dans toutes les classes observées, spécialement avant l'apprentissage spécifique de 4ème, quand il y a une longue liste à ordonner.

Elles nous ont aussi permis de préciser les adaptations locales au modèle des décimaux vus comme couple de 2 entiers : outre la règle 3 décrite par Grisvard et Léonard, nous avons identifié une règle d'intercalation d'un 0 derrière la virgule pour intercaler des nombres avec une décimale de plus entre deux décimaux dont les parties décimales ont la même longueur.

Nous avons constaté que les élèves ne disposaient pas de représentation figurale spontanée pour les décimaux et que les parts de tarte étaient largement dominantes dans le cas des fractions. Il est vrai que les enseignants semblent aussi y recourir volontiers. Les représentations sous formes de longueur sont pratiquement absentes sauf dans le cas où l'apprentissage les a favorisées.

Le placement de rationnels ou de décimaux sur un axe gradué est l'exercice le plus mal réussi dans presque toutes les classes du CM2 à la 4ème. On voit notamment apparaître des perturbations provoquées par les mesures en cm et mm, la partie décimale étant vue comme un nombre de millimètres.

Certains professeurs lui accordent une grande place dans l'enseignement des nombres non entiers. Mais ils sont minoritaires, la tendance est plutôt de travailler sur les nombres et de les utiliser ensuite dans les mesures avec l'idée implicite que le passage se fait naturellement. Or cela ne semble pas être le cas : les connaissances techniques sur les fractions et les décimaux ne suffisent pas pour graduer correctement une demi-droite. Les négatifs amènent des difficultés supplémentaires que nous n'avons pas étudiées spécialement.
D'après les déclarations des professeurs sur leur pratique, on peut penser que la tendance au cloisonnement est d'autant plus forte que la classe est faible.

Les difficultés à changer de cadre se retrouvent aussi bien à travers les observations en classe que dans les entretiens individuels : les élèves résolvent plus facilement une question posée directement sur les nombres qu'une question nécessitant les mêmes calculs mais posée dans le cadre géométrique. Il semble que, pour que le changement de cadres puisse avoir un rôle de moteur ou de contrôle dans les productions des élèves, il soit nécessaire d'une part que les élèves disposent d'un minimum de connaissances disponibles dans chacun des cadres, d'autre part que la pratique du changement de cadres soit favorisée dans le fonctionnement habituel de la classe.

Nous avons vu des variations de résultats suivant l'enseignement reçu dans les réponses au questionnaire A, les élèves de certaines classes de CM2 ayant des résultats meilleurs que ceux des élèves de 6ème de milieu social comparable. Les variations sont encore plus nettes entre les classes de 4ème juste après l'apprentissage des rationnels et réels : pour certaines classes, on a des classements opposés suivant les questions.
Pour les unes, contrairement à ce que disent la plupart des professeurs dans leurs réponses, les élèves se débrouillent bien sur le plan technique, notamment en ce qui concerne la réduction au même dénominateur, les opérations, la comparaison de 2 fractions, la résolution d'équations simples, mais les performances baissent nettement si on a 3 fractions avec des dénominateurs assez compliqués à comparer, et aussi dans les exercices d'intercalation et d'encadrement, parce que les élèves ne pensent pas à utiliser la division, même s'ils définissent un rationnel comme le résultat d'une division.
Dans d'autres classes au contraire, les performances techniques sur les opérations sont médiocres et les résultats sur l'ordre sont meilleurs, dès lors qu'on peut les obtenir par division.
Les classes qui ont les meilleurs résultats sont celles où les élèves peuvent utiliser les deux points de vue, que nous avons appelés respectivement algébrique et analytique, sur les nombres rationnels.
Il est à noter de plus que l'enseignement reçu semble avoir plus d'influence que le niveau de départ des élèves, du moins en admettant que le retard scolaire des élèves soit un bon indicateur du niveau de départ de la classe : certes, les deux classes qui ont les meilleurs résultats sont favorisées du point de vue de l'âge des élèves, mais des classes assez favorisées de ce point de vue ont des résultats médiocres (comme la classe F) alors que d'autres classes, a priori défavorisées ont des résultats assez bons dans certains domaines comme les classes C et G, voire bons partout comme la classe B, issue il est vrai d'un lycée parisien.

Il semble que, notamment dans certaines classes, beaucoup d'élèves fournissent des définitions sous une forme stéréotypée et décontextualisée (exemples "$\frac{1}{3}$ c'est l'unité partagée en 3" en CM2B, fraction comme couple de 2 entiers en 4ème F) sans pouvoir les utiliser pour répondre à des questions précises sur les décimaux ou les fractions, ce qui amène des résultats faibles pour ces classes. On peut aussi constater que dans la classe de 6èmeA où les décimaux ont été abordés sous forme de révisions (surtout des techniques opératoires et de comparaison) en début d'année, le recours à la règle de comparaisosn des décimaux comme couple de 2 entiers augmente nettement entre les tests de décembre et de mai, à mesure que s'éloigne la période d'enseignement. Des activités avaient pourtant été prévues dans cette classe, pour remettre en question ce modèle erroné : nous analysons dans le chapitre 3 les raisons de leur peu d'effet. Disons seulement que ces diverses observations posent le problème de l'institutionnalisation des connaissances, et plus particulièrement, celui de l'articulation entre le cours du professeur et les activités ou exercices proposés aux élèves.

CHAPITRE 3 A

OBSERVATIONS EN CLASSE

année 1983 - 1984

Introduction

Pendant l'année scolaire 1983 - 1984, nous avons travaillé avec deux classes de CM2 et une classe de 6ème du même secteur scolaire. Les élèves de ces trois classes étaient majoritairement issus de milieu populaire et comprenaient un grand nombre d'enfants d'origine étrangère, surtout à l'école primaire. Un des instituteurs du CM2 que nous avions déjà rencontré était demandeur d'une expérimentation dans sa classe.

Les intentions de ce travail étaient donc doubles :

- d'une part répondre à une demande et essayer d'aider les enseignants à améliorer l'apprentissage des élèves en difficulté qui leur étaient confiés,
- d'autre part, recueillir des données pour une analyse didactique des difficultés rencontrées par les maîtres dans l'enseignement à ces élèves.

En rapport avec cette double intention, nous avons fait des choix méthodo-logiques en fonction des hypothèses théoriques exposées dans le chapitre 1. Nous pensions notamment qu'un enseignement à partir de problèmes qui donnaient du sens aux notions rencontrées, en utilisant des jeux de cadres et la dialectique outil-objet devait être profitable à tous les élèves et particulièrement à ceux qui n'ont pas l'occasion de construire hors de l'école le sens des notions enseignées. Nous avons donc repris avec ces trois classes des situations déjà expérimentées avec succès dans d'autres écoles (avec R. Douady). Les notions visées dans l'apprentissage étaient essentiellement les décimaux et les aires. Notre objectif était de donner du sens aux concepts, qu'ils soient nouveaux pour les élèves ou que ceux-ci les aient déjà rencontrés.

En choisissant des contenus sur lesquels nous avions déjà travaillé, nous pensions repérer plus facilement les difficultés spécifiques de ces élèves et les situer par rapport aux difficultés connues.

Le choix de préparer les séquences observées avec les enseignants plutôt que de faire des observations "naturalistes" s'explique aussi pour des raisons liées à l'observation :

- D'une part, nous avons pensé qu'un moyen d'expliciter, pour notre recherche, les attentes des enseignants était de travailler avec eux sur des situations que nous leur proposions et qui étaient différentes de leur pratique habituelle dans la mesure où elles s'étalaient sur un temps assez long et qu'un même problème pouvait prendre plusieurs séances.
- D'autre part, ce choix s'explique aussi parce que les enseignants acceptent plus facilement d'être observés dans des séances qu'on a préparées avec eux. De plus, nous leur demandons pour les concertations un travail supplémentaire bénévole, il est légitime qu'on leur apporte un matériel utilisable avec leurs élèves.

Par ailleurs, nous avons choisi de travailler au niveau CM2-6ème d'une part parce qu'un instituteur de CM2 était demandeur dès le départ, d'autre part parce que nous nous intéressions à la liaison CM2-6ème. En effet, des élèves qui réussissent assez bien jusque là en mathématiques rencontrent des problèmes au collège. Un changement de contrat didactique important se produit à l'entrée en sixième. Nous voulions expliciter avec les enseignants certaines différences dans les attentes et les méthodes des uns et des autres. Nous avons donc pris contact avec les professeurs de mathématiques du collège avec l'intention de mettre en place une liaison entre le collège et l'école primaire la plus "défavorisée" du secteur. Finalement, un seul professeur de 6ème a participé à l'expérience. En réalité, on ne peut pas dire qu'il y ait eu une liaison en mathématiques entre les enseignants de CM2 et de 6ème : les instituteurs ne pouvaient venir en classe de 6ème puisqu'ils ne pouvaient être libérés de leur classe, le professeur de 6ème n'est pas venu non plus assister à une séance de mathématiques à l'école primaire et il n'y a même pas eu de réunion entre les 3 enseignants en dehors des heures de classe.

En fait, une certaine liaison entre l'école primaire et le collège a démarré l'année suivante : une réunion générale regroupant une partie des professeurs du collège et des instituteurs des 2 écoles primaires qui envoient tous leurs élèves dans ce collège a eu lieu à la fin de l'année scolaire, en juin 1984. Finalement, en français, un travail autour du conte africain qui avait déjà démarré au collège avec Mme S. Platiel, ethnolinguiste au C.N.R.S., a commencé à l'école primaire l'année suivante et s'est prolongé en 85 - 86 et 86 - 87 dans le cadre d'un P.A.E. En mathématiques, nous avons continué à travailler avec le même professeur et un des deux instituteurs (celui du CM2B, l'autre ayant changé d'école). Quelques-uns des élèves de 6ème venaient d'un des deux CM2 de l'année précédente.

Les conditions d'expérimentation et d'observation n'étaient pas les mêmes à l'école primaire et au collège. Nous les préciserons le moment venu. Ce ne sont pas des conditions permettant une observation très rigoureuse d'une part parce que nous n'avions pas les moyens d'avoir une observation plus précise (j'ai fait seule le travail de préparation avec les enseignants et toutes les observations), d'autre part parce que ce n'était pas nécessaire pour ce que nous voulions faire. Il s'agissait d'un travail exploratoire sur l'enseignement des mathématiques à des élèves en difficulté à l'école : nous ne connaissions en effet à l'époque aucun travail expérimental sur cette question, nous avons préféré une observation même très partielle sur un temps long (un ou deux ans) à une observation plus précise mais plus ponctuelle.

Dans ce chapitre, nous donnons d'abord une description assez succincte des données recueillies dans les trois classes en 1983 - 1984, nous les mettons en relation avec les résultats du test sur les fractions et décimaux décrit dans le chapitre 2. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous décrirons des éléments du suivi qui a eu lieu l'année suivante, et nous essayerons ensuite d'analyser les difficultés rencontrées auprès des élèves et auprès des enseignants pour la mise en place de cet enseignement.

Nous donnons ces compte-rendus d'observation au risque de lasser le lecteur, même si nous tentons de les rendre les plus brefs possible, pour plusieurs raisons :
- pour l'année 83- 84, ils nous informent sur l'enseignement effectivement reçu par les élèves sur les fractions et les décimaux, ce qui permet d'avancer des hypothèses pour expliquer les différences de réussite des différentes classes de CM2 et de 6ème au test sur les décimaux dont les résultats sont analysés dans le chapitre 2.
- ils donnent une vue d'ensemble du travail effectué dans les classes, des réactions des enseignants et des élèves. C'est sur l'ensemble de ces observations que nous nous sommes appuyée pour avancer nos premières hypothèses explicatives et organiser le questionnement ultérieur. Nous mettons en italique les commentaires sur les séances qui contribuent à fonder ces hypothèses.
- Dans les cas où l'observation a pu être plus précise (enregistrement des phases collectives), nous analysons plus précisément certains extraits illustrant les phénomènes que nous voulons pointer.
Les parties qui correspondent aux compte-rendus d'observation sont écrites dans un caractère plus petit.

1. Observations en CM2 en 83-84

1.1. Conditions de l'expérimentation

1.1.1. Présentation des classes.

Ce sont deux clases de CM2 d'une même école de la banlieue parisienne comportant un taux assez fort d'enfants d'origine étrangère (respectivement 8 sur 23 et 9 sur 23).et un nombre important d'élèves ayant au moins un an de retard scolaire (47,8 % des élèves de CM2A et 52,2 % des élèves de CM2B ont au moins un an de retard scolaire si on prend comme référence l'année civile, les retards sont de 39,1% dans les deux classes si on comptabilise les élèves nés en novembre et décembre avec ceux de l'année suivante) :

CM2A

date de naissance	1-1-71 —> 31-10-71	1-11-71 —> 31-12-71	1-1-72 —> 31-10-72	1-11-72 —> 31-12-72	1973
Effectif	2	3	4	2	12
	2 ans de retard		1 an de retard		âge normal

CM2B

date de naissance	1-1-71 —> 31-10-71	1-11-71 —> 31-12-71	1-1-72 —> 31-10-72	1-11-72 —> 31-12-72	1973
Effectif	3	1	5	3	11
	2 ans de retard		1 an de retard		âge normal

En CM2A, les professions des parents peuvent être rattachées[1] aux classes moyennes pour 7 d'entre eux et aux classes populaires pour les autres. En CM2B, 6 peuvent être rattachés aux classes moyennes plus un dont les parents sont étudiants salariés, les autres aux classes populaires ; une élève est placée dans une famille par la DASS. La majorité des élèves appartiennent à des familles nombreuses : en CM2A, 10 des élèves appartiennent à des fratries d'au moins 4 enfants, dont 3 de 6 ou 7 enfants, et 4 à des familles de 3 enfants ; en CM2B, 7 élèves appartiennent à des fratries de 3 enfants, 8 à des familles de 4 ou 5 enfants, mais dans cette classe aucune fratrie ne dépasse 5 enfants.

1.1.2. Conditions de l'observation

Les conditions étaient les suivantes : nous rencontrions les deux instituteurs à l'heure du déjeuner pendant 1/2 heure à 3/4 heure chaque semaine ; nous faisions avec eux le point sur ce qui s'était passé et nous prévoyions la suite du travail pour la semaine. Nous n'avions pas le temps de mettre au point les situations en détail : nous discutions l'objectif et les grandes lignes de la situation, les instituteurs finissaient le travail de préparation ; ils tenaient d'ailleurs à garder une marge de manœuvre dans la présentation aux élèves ; ils travaillaient sur ces situations une fois par semaine, quelquefois deux, le reste du temps, ils faisaient le reste de leur programme tel qu'ils l'avaient prévu[2]. Nous observions chaque classe une heure toutes les deux semaines : une fois l'une, une fois l'autre. Nous n'avons pas enregistré ces séances mais nous avons pris des notes. Nous n'avons pas enregistré les entretiens avec les enseignants. Nos observations sur les séquences d'enseignement sont donc assez rudimentaires, nous ne pouvons que faire une brève description des situations proposées, des démarches et des difficultés éventuelles des élèves. Nous ajoutons éventuellement un bref commentaire, écrit en italiques pour faciliter la lecture, et nous faisons un petit bilan à la fin de chaque thème.

Comme nous n'avons pas enregistré les séquences en classe et que nous disposons de traces très lacunaires, il n'est pas question de faire une analyse détaillée de ce qui s'est passé en classe, la description des séances a seulement pour but de montrer quel genre de situations ont été proposées aux élèves et comment elles ont été traitées. Seuls quelques commentaires sur des erreurs particulièrement tenaces ou sur des choix des enseignants seront utilisés pour une mise en relation avec les déclarations de ces mêmes enseignants au cours des entretiens.

Nous disposons aussi des réponses de ces élèves au questionnaire A et d'entretiens avec quelques-uns d'entre eux. Nos informations sur le déroulement du travail en classe, bien que très partielles, nous donnent cependant des éclairages intéressants sur les réponses des élèves au questionnaire A, que nous exploiterons le moment venu.

1.2. Indications sur les séances réalisées.

Nous les regroupons selon quatre thèmes : fractions et nombres décimaux, courses, agrandissements d'un puzzle, aires.

1.2.1. Fractions et nombres décimaux (5 situations, certaines se déroulant sur plusieurs séances)

Au cours du premier trimestre, le travail a porté sur l'introduction de nouveaux nombres en écriture fractionnaire, la commodité des fractions décimales dans certains cas (recherche de parties entières) et l'écriture à virgule des fractions décimales, tout ceci en interaction avec la graduation d'une droite. Il ne pouvait être question de reprendre avec ces élèves toutes les situations que nous avions mises au point avec R. Douady pour la construction des décimaux[3] : elles prévoient de travailler très longtemps sur les écritures fractionnaires, y compris pour les opérations et de n'introduire les écritures à virgule qu'en fin de processus ; il aurait été nécessaire de travailler avec les élèves sur 2 ans (CM1, CM2) pour que cela soit possible ; ici les instituteurs voulaient à juste titre que les élèves disposent des écritures à virgule à la fin du premier trimestre. Ils voulaient aussi garder du temps pour travailler au premier trimestre sur la numération et en particulier les grands nombres, par la suite pour faire des problèmes classiques et un peu de géométrie. Ils travaillaient sur les séquences préparées ensemble une fois par semaine, (il pouvait y avoir une 2ème séance dans certains cas, terminer un bilan par exemple). Compte - tenu du fait que le temps dont nous disposions était nettement raccourci par rapport à celui qui avait été utilisé dans les

[1] Les renseignements ont été recueillis sur les imprimés remplis par les familles en début d'année. Il est parfois difficile de décider si la profession correspond aux classes moyennes ou populaires, notamment ouvrier ou artisan : les renseignements donnés ici le sont seulement à titre indicatif pour donner une idée du profil social des classes.

[2] En réalité, la place du travail préparé en commun a augmenté au cours de l'année. C'est finalement l'ensemble du travail de mathématiques de la semaine dont il a été question au cours des réunions de travail.

[3] voir brochure n°62 de l'IREM de Paris 7 : liaison école-collège, nombres décimaux.

expérimentations précédentes, nous avons choisi de conserver les situations d'introduction à partir des segments et des aires qui pouvaient constituer des situations de référence pour le sens des nombres non entiers et des opérations. Nous avons aussi choisi de nous appuyer fortement sur la graduation d'une demi-droite. Nous avons ensuite proposé des situations qui permettaient de montrer la commodité de calcul avec les fractions décimales dans certains cas (recherche de parties entières) et utilisé la numération à base 10 et notamment le tableau de numération pour introduire l'écriture à virgule.

Les situations proposées aux élèves ont été les suivantes :

- ***première situation*** *: longueur d'un segment*

Les élèves travaillent par deux, émetteur et récepteur éloignés l'un de l'autre dans la classe. Chacun dessine sur une feuille blanche avec un stylo à bille et une règle un segment qui ne touche pas les bords de la feuille. On distribue à chaque élève une petite bande découpée dans du papier fort de couleur ; toutes les bandes ont la même longueur mais toutes n'ont pas la même largeur. Chaque élève écrit un message sans dessin pour que le récepteur puisse tracer un segment de même longueur que le sien. Il ne peut se servir comme instrument que de la bande de couleur. On vérifie ensuite si les deux segments sont de même longueur par superposition en regardant par transparence devant la fenêtre. L'analyse a priori de cette situation se trouve dans les brochures n° 48 et 62 de l'IREM Paris 7. Disons simplement que les bandes sont de largeurs différentes pour que les élèves n'utilisent pas la largeur de la bande comme unité auxiliaire et que le segment ne doit pas toucher les bords de la feuille pour que les élèves ne puissent pas se débrouiller sans mesure avec des segments comme la diagonale de la feuille.

Observation en CM2A (7 octobre 1983) : Les élèves ont utilisé le pliage en deux itéré 2 ou 3 fois ; le bilan permet d'introduire des écritures du type $\frac{1}{2}$u, $\frac{1}{4}$u, $\frac{1}{8}$u avec les relations $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u = 1u = 2 \times (\frac{1}{2}u)$, $\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u = \frac{1}{2}u$, $\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u = 1u = 4 \times (\frac{1}{4}u)$, $\frac{1}{8}u + \frac{1}{8}u = \frac{1}{4}u = 2 \times (\frac{1}{8}u)$, $\frac{1}{8}u + \frac{1}{8}u + \frac{1}{8}u + \frac{1}{8}u = \frac{1}{2}u = 4 \times (\frac{1}{8}u)$ ...

La même situation est reprise en demandant que les messages soient les plus courts possible : les élèves utilisent les nouvelles écritures dans les messages, avec un mélange entre le texte en français et l'écriture fractionnaire, par exemple "tu fais 2 fois a, 1 fois $\frac{1}{2}$, 1 fois le demi de $\frac{1}{4}$". Au bilan, des élèves proposent de simplifier des messages de ce type en écrivant $2\text{xa} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{8}a$; certains enfants proposent de raccourcir encore : $2a\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$; cette proposition est rejetée par la maîtresse[4] avec les arguments suivants : il faut qu'on comprenne et que ce soit assez précis.

Au cours du bilan, des difficultés apparaissent pour certains élèves avec des fractions qui codent des pliages difficiles à réaliser : $\frac{1}{32}$ est vu comme le double de $\frac{1}{16}$

Sur question de la maîtresse les élèves envisagent des pliages autres qu'en 2, mais ils ne sont qu'à peine évoqués et pas réalisés.

Il est prévu avec les maîtresses qu'elles reprennent dans la semaine le bilan et demandent aux élèves de produire de nombreuses écritures équivalentes ; la semaine suivante, on commencera l'enrichissement de la graduation en plaçant des fractions entre les entiers.

- ***deuxième situation*** *: comparaison de longueurs, construction d'une graduation.*

Situation prévue : On distribue aux élèves une feuille polycopiée comportant des segments de longueurs assez voisines dispersés dans toutes les directions ; les longueurs de ces segments sont désignées par une lettre, il s'agit de les classer de la plus petite à la plus grande ; on ne dispose ni de règle ni de ciseaux mais seulement d'une petite bande de papier unité (comme dans les séances précédentes). On attend donc que les élèves utilisent cette unité pour mesurer puis comparent les résultats obtenus. Dans un deuxième temps, on doit donner des mesures de segments exprimées avec cette unité, segments dont il s'agit de classer les longueurs parmi celles des segments dessinés, et dans un troisième temps on doit réaliser sur une grande bande de papier une graduation qui permette de mesurer facilement tous les segments[5].

Observation en CM2B (14 octobre 1983) : les élèves utilisent la petite bande unité pour mesurer les segments. Cette fois ils utilisent des $\frac{1}{3}$ et des $\frac{1}{6}$; tout le monde n'a pas trouvé le même résultat, cela amène à faire des vérifications : $1u + \frac{2}{3}u$, est-ce la même chose que $1u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u$ ou que $1u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{8}u$? Est-ce que $\frac{2}{3}u$ fait la même chose que $\frac{1}{6}u$ ou est-ce au contraire $\frac{2}{6}u$ qui fait $\frac{1}{3}u$? Le recours à la manipulation est nécessaire pour une grande partie des élèves. Certains n'ont utilisé que des pliages en 2 et

---

[4] Pour les observations en classe, nous parlons de tous les enseignants au féminin, pour les entretiens ou les remarques générales, nous en parlons au masculin.

[5] Après cette observation, nous avons modifié le choix des variables et nous avons rédigé différemment cette situation dans la brochure 62 (et modifié le premier chapitre de la brochure 48). Elle a été réalisée dans la nouvelle version l'année suivante.

trouvent cependant des mesures qui les satisfont : $1u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{8}u$ au lieu de $1u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u$ par exemple. Les manipulations sont refaites de façon collective.

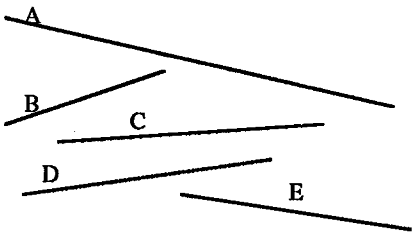
Dans la semaine suivante, le travail sur les écritures équivalentes et la graduation doit se poursuivre. Les élèves ont effectivement travaillé sur la graduation au cours des séances suivantes qui n'ont pas été observées.

Observation en CM2A (20 octobre 1983)

La maîtresse a prévu 6 feuilles polycopiées à distribuer successivement aux élèves. Nous les reproduisons ci-dessous.

Feuille 1 :

1° Mesure les lignes A, B, C, D, E



2° Trace ci-dessous les lignes F, G, H et complète le tableau :

Clast	Lignes	Mesure 1	Mesure 2
	A		
	B		
	C		
	D		
	E		
	F	$1u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$	
	G	$1u + \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}u$	
	H		$\frac{7}{4}u$

3° Range toutes les lignes de la plus grande à la plus petite.

Feuille n°2

Sans te servir de ta réglette, tu complètes :

$2 \times (\frac{1}{2}u) = \ldots\ldots = \frac{1}{2}u + \frac{\ldots}{\ldots}$

$3 \times (\frac{1}{4}u) = \ldots\ldots = \frac{1}{4}u + \ldots\ldots$

$2 \times (\frac{1}{3}u) = \ldots\ldots = \frac{1}{3}u + \ldots\ldots$

$1\,u = \frac{\ldots}{2}u \quad 1\,u = \frac{\ldots}{3}u \quad 1\,u = \frac{\ldots}{4}u$

$1\,u = \frac{\ldots}{6}u \quad 1\,u = \frac{\ldots}{8}u$

$\frac{1}{2}u = \frac{2}{\ldots}u \quad \frac{1}{3}u = \frac{2}{\ldots}u$

Quand tu as fini, tu vérifies à l'aide de ta réglette

Feuille n° 3

Tu complètes à l'aide de ta réglette.
Certains résultats de l'exercice précédent peuvent t'aider.

$1\,u + \frac{1}{2}u = \frac{\ldots}{2}u \qquad 2\,u = \frac{\ldots}{3}u$

$2u = \frac{1}{3}u = \frac{\ldots}{3}u \qquad 3\,u = \frac{\ldots}{4}u$

$\frac{4}{3}u = 1\,u + \frac{\ldots}{3}u \qquad \frac{5}{4}u = \frac{1}{4}u + \frac{\ldots}{\ldots}u$

$\frac{7}{6}u = \frac{1}{6}u + \frac{\ldots}{\ldots} \qquad \frac{9}{8}u = \ldots + \ldots$

Vérifie avec ta réglette tes résultats.

Feuille n° 4

Sans t'aider avec la réglette, tu complètes

$\frac{2}{3}u = 1\,u - \frac{\ldots}{\ldots} \qquad \frac{3}{4}u = 1\,u - \frac{\ldots}{\ldots}$

$\frac{5}{8}u = 1\,u - \frac{\ldots}{8}\,u \qquad \frac{4}{7}u = 1\,u - \frac{\ldots}{7}u$

$\frac{5}{6}u = 1\,u - \frac{\ldots}{\ldots}u \qquad \frac{6}{7}u = 1\,u - \frac{\ldots}{\ldots}u$

Vérifie quand tu as terminé.

Feuille n° 5

Tu compares. Certaines réponses précédentes peuvent t'aider.

$\frac{2}{3}u \ldots\ldots \frac{3}{4}u \qquad \frac{1}{2}u \ldots\ldots \frac{2}{3}u$

$\frac{6}{8}u \ldots\ldots \frac{5}{7}u \qquad 1\,u \ldots\ldots \frac{3}{3}u$

Feuille n°6

Sans l'aide de ta réglette, tu compares. Essaie de justifier ta réponse par l'égalité qui suit :

1 u ...... $\frac{3}{4}$u ——> $\frac{3}{4}$u = 1 u ......

1 u ...... $\frac{4}{3}$u ——> $\frac{4}{3}$u = 1 u ......

1u ...... $\frac{3}{2}$u ——> ...... = ...

1 u ...... $\frac{2}{3}$u ——> ...... = ...

Vérifie tes réponses à l'aide de ta réglette

Pour la feuille n°1, les élèves travaillent par deux : l'un mesure avec une des réglettes qui ont été fabriquées au cours des séances précédentes (certaines sont graduées en demis et quarts, d'autres en tiers et sixièmes), l'autre avec la bande unité qui a servi à fabriquer les réglettes.

Au cours de la séance seule la feuille n°1 est traitée par les élèves. Les mesures avec la bande regroupées sous le titre "mesure 1" sont exprimées par les élèves sous la forme décomposée 1u + $\frac{1}{6}$u par exemple, celles avec la réglette le sont sous la forme d'une fraction $\frac{7}{6}$u par exemple.

L'utilisation des deux types de réglettes et l'imprécision des mesurages amènent des discussions : pour A, certains trouvent 2u + $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{16}$, d'autres 2u + $\frac{1}{3}$, d'autres 2u + $\frac{1}{4}$. Les enfants concluent qu'on doit trouver les mêmes mesures et que les différences sont dues à l'imprécision des manipulations et décident de conserver la mesure la plus fréquemment trouvée.

Les autres feuilles sont traitées dans la semaine.

- ***troisième situation*** *: utilisation des fractions dans des problèmes*

Observation en CM2B (27-10-83) : le problème suivant a été choisi par la maîtresse (photocopié d'après un document tout préparé). Nous reproduisons le texte ci-dessous en respectant le plus possible la présentation car le texte original comportait des couleurs (le fond des tableaux), ce qui fait que la photocopie était de mauvaise qualité.

Quelques exemples de groupes familiaux

père 1	mère 1	grand-mère 1/4	enfant 9 ans 1/8			prix payé moins de 2 places 1/2

ou encore

mère **1**	grand-père **1**	grand-mère **1/4**	enfant 13 ans **1/4**	enfant 9 ans **1/8**		prix payé moins de 3 places
mère **1**	grand-père **1**	père **1/4**	sœur de la mère **1/4**	enfant 13 ans **1/4**	enfant 9 ans **1/8**	prix payé : moins de 3 places
père **1**	mère **1**	grand-père **1/4**	grand- mère **1/4**	enfant 15 ans **1/4**	jeune fille de service **1/4**	prix payé : seulement 3 places

ou même pour une famille sans enfant

monsieur **1**	madame **1**	mère de madame **1/4**	père de madame **1/4**	père de monsieur **1/4**		prix payé : moins de 3 places

Petits problèmes

a) Le parcours aller-retour entre deux villes coûte 80 F.

Avec un billet de famille, dites, approximativement, combien paieront :

- Monsieur Pastol, Madame Pastol, le père de M. Pastol et le père et la mère de Mme Pastol ?
- M. Michaud, Madame Michaud, les parents de M. Michaud, leur fils Henri-Marc (15 ans) et une jeune fille de service ?

b) Inventez la composition d'un groupe familial qui paiera le prix de moins de 3 places pour un nombre maximum de personnes.

Le problème contient beaucoup d'implicites : les conditions de réduction ne sont pas données. Les exercices proposés dans le a) sont tous traités dans les exemples au-dessus. L'examen des exemples est d'ailleurs le seul moyen pour quiconque de pouvoir répondre avec certitude aux questions posées puisque les conditions de réduction ne sont pas énoncées. Avec le texte proposé, le principal problème pour les élèves est de comprendre la *signification des fractions données : la part de place payée, le seul travail mathématique est de reconnaître la situation à laquelle on a affaire, de trouver le 1/4 de 80 et le 1/8 de 80, qui est un cas particulièrement facile et de comparer des entiers. La maîtresse de la classe demande de plus de classer les familles, de celle qui paie le moins à celle qui paie le plus dans les exemples proposés, sans calculer le prix du voyage. Cela nécessite un travail sur les fractions, mais ce travail est facile puisqu'il suffit d'utiliser $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$;*

Les élèves expriment les prix sous la forme suivante :

$F_1 : 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; $F_2 : 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$; $F_5 : 2 + \frac{3}{4}$; $F_3 : 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}$; $F_4 : 3$.

On a demandé aux élèves qui avaient travaillé vite de chercher combien paierait leur famille, les autres doivent faire le même travail pendant les vacances de la Toussaint ; pour cela il est nécessaire d'expliciter les conditions : les deux premiers adultes paient place entière, toute personne supplémentaire paie 1/4 de place, les enfants entre 4 et 12 ans paient demi tarif (la moitié de ce que paierait un adulte dans les mêmes conditions), les enfants de moins de 4 ans ne paient pas.

Dans cette séquence on n'a utilisé que les relations entre les fractions 1/2, 1/4, 1/8.

- ***quatrième situation*** *: utilisation des fractions dans un contexte d'évaluation d'aires*

premier temps *: découpages fournis par la maîtresse.*

Observation en CM2A le 10 novembre 1983.

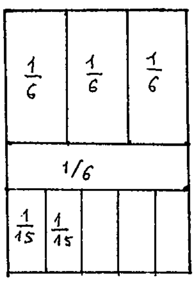
Les élèves disposent de découpages de couleur dans des enveloppes et d'une feuille de papier blanc. Consignes données successivement :

1) avec les morceaux de couleur vous devez recouvrir la feuille blanche, il se peut qu'il y ait juste une feuille, moins d'une feuille ou plus d'une feuille.

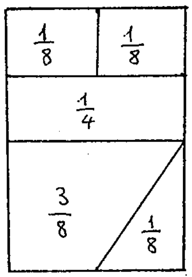
2) évaluer chaque morceau par rapport à la feuille blanche

3) évaluer la quantité de papier utilisée pour réaliser le découpage.

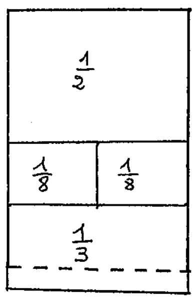
Les découpages choisis par la maîtresse étaient les suivants :



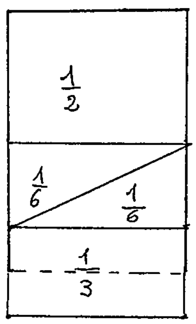
découpage jaune :
une feuille



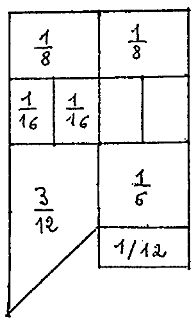
découpage gris
une feuille



découpage bleu :
plus d'une feuille

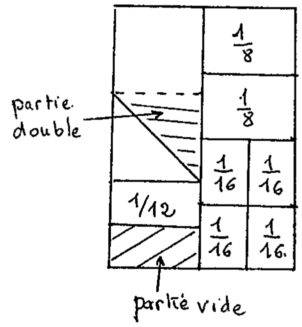


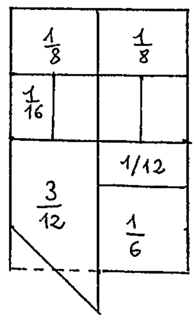
découpage rouge :
plus d'une feuille

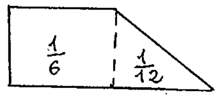


découpage vert : une feuille.
le découpage vert vaut une feuille mais sans possibilité de la reconstituer à partir des morceaux fournis

La reconstitution des feuilles s'est faite facilement pour tous les groupes sauf pour le vert : les élèves arrivent finalement aux deux dispositions suivantes :







Les élèves ont évalué les morceaux par report sur la feuille de papier blanc ; dans certains cas, cela n'était pas possible (3/8 et 3/12). Pour 3/8 les élèves ont trouvé facilement le résultat en reportant le triangle de 1/8 sur cette pièce. Pour 3/12 c'était plus difficile, un élève a trouvé en reportant le rectangle de 1/6 sur sa pièce, il lui restait la moitié de ce rectangle soit $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}$.

L'évaluation de l'ensemble du découpage n'a pu être terminé par tous les groupes au cours de la séance, il a été terminé dans une séance non observée. Les élèves peuvent s'appuyer sur les manipulations et la reconstitution des feuilles.

Cependant au cours de la séance observée certains élèves dérapaient déjà dans le cadre numérique et proposaient $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{17}$

Le découpage gris est facile puisqu'il ne fait intervenir que des 1/4 et des 1/8. Pour le jaune, il faut établir que 5x$\frac{1}{15}$ = $\frac{1}{3}$ et on peut alors facilement trouver 3x$\frac{1}{3}$. Pour le vert, on peut travailler séparément sur chaque moitié : $\frac{3}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$. C'est plus difficile pour le bleu et le rouge de voir de combien on dépasse la feuille. Nous n'avons pas d'information sur les procédures des élèves pour venir à bout de ce travail qui a été terminé sans observation.

***deuxième temps** : les élèves travaillent par deux et fabriquent un découpage qu'ils dessinent sur leur feuille et envoient un message à un autre groupe pour qu'il réalise un découpage comportant le même nombre de morceaux et tel que chaque morceau ait la même valeur qu'un des morceaux du groupe émetteur.*

Nous ne disposons pas d'observations sur cette phase hormis le fait que les élèves de CM2B ont eu du mal à s'approprier la consigne : beaucoup ont commencé par faire des découpages au hasard sans prévoir le type de message qu'ils auraient à écrire.

Il est prévu par la suite de reprendre la graduation en 1/10, 1/100 ... puis de faire des recherches de parties entières afin de pointer l'avantage des fractions décimales pour certains calculs.

- ***cinquième situation** : reprise de la graduation en 1/10 , 1/100 ... tableau de numération, écritures décimales...*

1) séance observée en CM2A le 24 novembre 1983 : Les élèves travaillent par deux et disposent de réglettes graduées en 1/10 et 1/100 qui ont été fabriquées auparavant et d'une grande feuille de papier. On reprend le travail de la première séance : tracer un segment et envoyer un message pour que l'équipe réceptrice trace un segment de même longueur.

La majorité des messages sont rédigés sous la forme d'un nombre entier de centièmes : on a les messages suivants : $\frac{75}{100}+\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{100}$; 1 + \F(2,10) + \F(5,100) ; \F(60,100) ; \F(192,100) ; \F(111,100) ; \F(118,100) ; 1+ 7 centièmes ; 1 + 3 petits carreaux que les récepteurs ont correctement traduit en 1 + $\frac{3}{100}$; $\frac{55}{100}$ ou $\frac{5}{10}+\frac{5}{100}$.

Ces messages ont été bien compris sauf le premier qui a posé quelques difficultés aux récepteurs. Une discussion collective s'engage, tout le monde s'accorde pour dire qu'il faut prendre la moitié de $\frac{1}{100}$ mais pour certains cela fait $\frac{1}{50}$ et pour d'autres $\frac{1}{200}$.

La maîtresse propose de faire pour tous les messages le travail qui a été fait par les émetteurs du dernier message et de donner pour chacun au moins deux écritures. Le travail est fait collectivement.

La maîtresse sort ensuite un tableau de numération et demande aux élèves si on peut s'en servir pour écrire les nombres des messages ; des élèves essaient d'abord de placer les dixièmes dans la colonne des dizaines et les centièmes dans la colonne des centaines mais s'aperçoivent que cela fait un autre nombre ; d'autres proposent alors de faire un autre tableau de numération "à l'envers" u | dixièmes | centièmes

La maîtresse demande alors de placer $532 + \frac{4}{10} + \frac{9}{100}$

Un élève prolonge le tableau vers la gauche.

La maîtresse propose alors $35 + \frac{3}{10}$; $4 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100}$; $80 + \frac{3}{100} + \frac{8}{1000}$.

La conclusion collective est que le tableau peut se prolonger des deux côtés.

2) séance observée en CM2B le 1er décembre 1983: Décomposer des fractions décimales données en $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$... Les fractions proposées par la maîtresse sont les suivantes : $\frac{6328}{1000}$; $\frac{7852}{1000}$; $\frac{652}{1000}$; $\frac{725}{100}$.

Beaucoup d'élèves ne comprennent pas ce qu'il faut faire. L'un d'eux explique $\frac{6328}{1000} = \frac{6000}{1000} + \frac{300}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{8}{1000}$

$\frac{6000}{1000} = 6$ *parce que* $\frac{1000}{1000} = 1$

$\frac{300}{1000}$, *c'est moins que 1, je le mets en dixièmes, ça fait* $\frac{3}{10}$...

Un autre élève propose de le mettre en centièmes $\frac{30}{100}$ *mais pour beaucoup les relations entre dixièmes, centièmes, millièmes ne sont pas claires et la maîtresse les fait reprendre au niveau collectif à l'aide des règles graduées.*

Un élève propose de faire un tableau (il fait un prolongement du tableau de numération vers la droite). Une discussion s'engage entre les élèves sur la manière de noter les colonnes : les uns proposent $\frac{}{10}$ $\frac{}{100}$ $\frac{}{1000}$, d'autres dixièmes, centièmes, millièmes, d'autres $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$.

3) séance observée en CM2A le 8 décembre : la maîtresse donne un nombre décimal par le tableau de numération et demande aux élèves répartis en groupes de 4 de produire le plus possible d'écritures décimales de ce nombre en 3 minutes. L'équipe qui aura le plus d'écritures justes gagnera un carambar par élève.

Les élèves n'ont pour la plupart pas pris à leur charge la validation des écritures proposées, ne conservant de la consigne que la production du plus grand nombre possible d'écritures. Certains ont écrit 18,692 1,8692 186,92 ... d'autres 18,692 18,962 18, 629 ... (ces dernières n'ont pas été citées par les élèves lors du bilan) l'écriture correcte étant toujours donnée en premier. Il semble que les élèves n'aient pas retenu que les écritures devaient désigner le même nombre ou qu'ils n'aient pas une idée claire de ce qu'est un nombre.

Par exemple un groupe a produit comme écritures correctes seulement 18,692 ; 18 unités six cent quatre-vingt-douze millièmes et 10 + 8 unités + 692 millièmes alors qu'il a fourni une quantité d'écritures incorrectes : 1,8692 ; 186,92 ; 1869,2 ; $1+\frac{86}{10}+\frac{92}{100}$; $186+\frac{9}{10}+\frac{2}{100}$; $1869+\frac{2}{1000}$; $1+\frac{869}{10}+\frac{2}{100}$; $1+\frac{8692}{100}$; $\frac{186}{10}+\frac{92}{100}$; 186 unités et $\frac{9}{100}$ et $\frac{2}{1000}$; 1 dizaine et 8 unités et 6 dixièmes. Chacune a été rejetée en cherchant le nombre d'unités et en plaçant les nombres correspondant à ces écritures dans le tableau de numération.

Les autres écritures correctes produites dans la classe sont les suivantes :

18 unités 692 millièmes ; $18+\frac{69}{100}+\frac{2}{1000}$; $18+\frac{692}{1000}$; $\frac{1869}{100}+\frac{2}{1000}$; $18+\frac{6}{10}+\frac{9}{100}+\frac{2}{1000}$; $\frac{18692}{1000}$; dix-huit entiers six dixièmes neuf centièmes deux millièmes ; $12+6+\frac{692}{1000}$.

Les autres écritures incorrectes sont les suivantes :

$1+\frac{86}{10}+\frac{9}{100}+\frac{2}{1000}$; $18+\frac{6}{10}+\frac{92}{100}$; 10 unités + 8 unités + $\frac{600}{1000}+\frac{90}{100}+\frac{2}{10}$; $186+\frac{92}{1000}$; $1869+\frac{2}{1000}$; $\frac{18692}{10000}$; 18 + 692 ; $\frac{10}{10}+\frac{8}{10}+\frac{692}{1000}$; $\frac{18}{10}+\frac{692}{100}$; $1+\frac{8692}{1000}$; 4,690 + 10,2 + 4.

Aucun élève n'a fourni une écriture du type 18,6920 ce qui n'est pas très étonnant puisque les nombres rencontrés jusque là (à notre connaissance) ne dépassaient pas le millième et ne comportaient pas de 0 inutiles. La plupart des erreurs sont des erreurs d'ordre de grandeur mais respectent l'ordre unités, dixièmes, centièmes, millièmes mais on coupe à un mauvais endroit et/ou on utilise plusieurs chiffres à la fois (exemple $1+\frac{869}{10}+\frac{2}{100}$). Un seul exemple ne respecte pas ce principe : 10 unités + 8 unités + $\frac{600}{1000}+\frac{90}{100}+\frac{2}{10}$. Quelques erreurs ne portent que sur le fait de compter la dizaine comme un 1.

4) séance observée au CM2B le 15 décembre 1983 : la maîtresse distribue la feuille polycopiée suivante :

I) Ecris chaque nombre sous la forme d'un nombre décimal et place le sur l'axe

7,3 - $\frac{69}{10}$ - 4 + $\frac{7}{10}$ - sept virgule huit - 91 dixièmes - 4,200 - $\frac{90}{10}$ + $\frac{8}{10}$ - 2 + $\frac{3}{10}$ + $\frac{0}{100}$

II) Même travail avec ces nombres :

7,52 - $\frac{775}{100}$ - 7 + $\frac{3}{100}$ - $\frac{74}{10}$ + $\frac{3}{100}$ - 7 + $\frac{7}{10}$ + $\frac{9}{100}$ - sept virgule zéro cinq - 796 centièmes.

L'axe gradué est dessiné sur papier millimétré : il porte les graduations 0 et 10 (écartées de 4 grands carreaux soit 20 cm).

Les choix de la maîtresse : elle a séparé les nombres qui peuvent s'écrire avec une décimale et ceux qui peuvent s'écrire avec 2 décimales. Les élèves ne seront confrontés au problème de comparer des nombres avec 2 chiffres derrière la virgule et des nombres avec un seul chiffre que pour la deuxième partie du travail puisqu'ils placent ces nombres sur le même axe : ils sont tous entre 7 et 8 et auront à être situés par rapport à 7,3 et à 7,8. Ce choix manifeste le souci légitime de graduer la difficulté de la tâche, mais il risque de renforcer chez les élèves l'idée que ces nombres sont de nature différente et donc à traiter séparément. D'autre part dans le seul exemple où un 0 intermédiaire est nécessaire dans l'écriture à virgule il est donné par la maîtresse qui écrit le nombre en lettres : les élèves n'ont pas à prendre en charge cette difficulté.

Le travail des élèves : Pour la première partie, les nombres sont facilement écrits en écriture à virgule standard à l'aide du tableau de numération. Pour le placement sur l'axe, le problème est de savoir comment représenter $\frac{1}{10}$ (les entiers ont été placés assez facilement). On voit réapparaître des erreurs comme "dans $\frac{1}{20}$, il y a $\frac{2}{10}$". Même s'ils voient ce qu'il faut faire, les élèves ont du mal à expliquer : "on a gradué les u, on a fait 2 carreaux donc 20 petits carreaux, normalement il y a 10 dixièmes, ici on en a 20 donc on va doubler le nombre"; la maîtresse demande par quoi sera représenté $\frac{1}{10}$, le même élève propose alors 2 petits carreaux. A partir du moment où ils savent par quoi est représenté $\frac{1}{10}$, les élèves n'ont plus de problème pour placer les nombres de la première série.

Pour la deuxième partie l'écriture à virgule ne pose pas de problème non plus, mais les élèves ne savent pas comment placer les points sur l'axe ; un élève propose de placer le premier 7,52 au milieu entre 7 et 8. Finalement les élèves remarquent que tous les nombres proposés sont entre 7 et 8 et l'un d'eux propose d'agrandir ce qui se passe entre 7 et 8 pour placer les nombres.

Bilan sur décimaux et fractions

Les situations d'action utilisées pour introduire un concept nouveau se déroulent comme prévu et il n'y a pas de différence apparente par rapport à ce que nous pouvions attendre. Dans la situation "dessiner un segment", les élèves reportent et plient la bande de papier qui sert d'unité, les partages en deux dominent comme toujours. On voit cependant, dès le premier bilan, apparaître des difficultés pour certains élèves quand la manipulation n'est plus possible : $\frac{1}{32}$ est vu comme le double et non comme la moitié de $\frac{1}{16}$.

De même, au moment du réinvestissement dans une séance ultérieure, les mêmes dérapages formels se produisent : dans la deuxième situation, en CM2B, certains élèves ont du mal à accepter que 2 fois $\frac{1}{3}$ ne soit pas égal à $\frac{1}{6}$. En CM2A, on assiste à un dérapage du même type quand la maîtresse demande beaucoup d'écritures différentes.

Le débat sur le fond de ces problèmes n'est pas vraiment engagé, en tous cas pas pour tous les élèves. Le 1er décembre, au CM2B, la décomposition des fractions décimales pose de gros problèmes à la plupart des élèves mais la procédure que vient exposer un élève qui a compris (décomposition dans le système de numération) permet aux autres de réussir la tâche proposée en ayant recours à une procédure algorithmique connue et entraînée par ailleurs.

On voit ainsi les négociations faites pour faire avancer le cours : ce qu'on vise, c'est que les élèves utilisent correctement les décimaux, pas forcément qu'ils aient résolu tous les problèmes qu'ils ont dans la compréhension des fractions. Les problèmes posés sont résolus, la classe marche et on espère qu'ils finiront tous par apprendre, ne serait-ce que par imitation et répétition. Les enseignants souhaitaient passer assez rapidement aux fractions décimales pour introduire avant Noël l'écriture à virgule que les élèves devront savoir utiliser à la fin de l'année. Nous avons choisi le recours au tableau de numération pour donner rapidement du sens à l'écriture à virgule mais ce choix entraîne en même temps une algorithmisation plus rapide.

On voit aussi, à d'autres moments, que la maîtresse de CM2B tout au moins a tendance à faciliter la tâche des élèves pour les faire réussir (choix du problème de tarif réduit le 27 octobre, des fractions à placer sur l'axe gradué le 15 décembre). Ce faisant, elle permet aux élèves de remplir leur contrat en arrivant au bout de ce qui est demandé mais en même temps, elle leur évite de se poser des questions fondamentales pour l'apprentissage.

Le deuxième trimestre a été consacré à 2 thèmes : courses et agrandissements de puzzles. Les deux thèmes font intervenir la proportionnalité. Dans le premier cas on joue sur les cadres numérique et graphique en interaction avec la course réelle, dans le deuxième cas on joue sur les cadres numérique et géométrique.

1.2.2. courses [6] (4 situations)

-***première situation*** : Les élèves ont fait une course chronométrée de 60 m, ils ont comparé leurs temps ... On leur a demandé de prévoir le temps qu'ils mettront pour parcourir 90 m. Quand la course a eu lieu, la maîtresse donne à chacun une feuille polycopiée sur laquelle figure un tableau donnant les temps mis pour parcourir le premier 60 m, et les temps mis cette fois pour parcourir 60 m et 90 m et demande aux élèves de comparer les temps aux 90 m aux temps prévus et d'expliciter leurs moyens de prévoir. Pour comprendre les procédures des élèves, il est nécessaire de disposer du tableau des données. Nous le reproduisons ci-dessous en ajoutant une colonne : les temps prévus par les élèves pour 90m.

Elève	temps au premier 60 m	course des 90 m temps à 60 m	temps à 90 m	temps prévu après le 1er 60 m
NAB	11s 3	12s	17s 2	16,18 (pour 17,4?)
ABD	10s 6	11s 2	16s 6	12,7
IST	11s 6	11s 5	17s 5	19
JIM	9s	9s 4	13s 8	11,6
ELI	9s 3	9s 8	14s 2	12,7
HUG	11s	11s 3	17s	14,5
PHI	10s 3	10s 3	15s 5	12,8
SRA	11s	10s 8	16s 9	18,10
CHR	10s 1	11s 2	16s 5	17,6
BOU	13s 2	12s 9	19s 9	16,5
ISS	11s	12s	18s 2	18,5
SNP	14s	12s 8	19s 7	21
FRE	9s 7	9s 7	15s	18,6
LYD	9s 9	9s 9	14s 9	15,4
SNA	9s 2	9s 3	13s 9	11,9
CYR	10s 2	11s 2	16s 6	entre 13,5 et 14,5
SEB	10s 7	12s 5	18s 6	21,4
MAG	10s 4	11s	15s 7	14,8
SAM	11s 1	10s 8	16s 4	13
VIC	10s 6	10s 8	15s 8	15s 9
CAR	10s 8	10s 1	15s 6	12,5
SNF	abs	10s 7	16s 6	
CHL	11s 4	abs	abs	

Deux élèves (SNP et VIC, 1 fille et 1 garçon) ont utilisé la proportionnalité pour faire leur prévision ; un autre garçon HUG dit qu'il a voulu le faire mais s'est trompé dans son calcul ; un autre a multiplié le temps des 60 m par 2, beaucoup d'élèves ont rejeté cette procédure au moment du bilan en disant que c'était pour 120 m. Tous les autres élèves ont prévu leur temps en l'estimant intuitivement ; 7 ont surestimé leur temps (4 filles, 3 garçons) 11 l'ont sous-estimé (4 filles, 7 garçons). Certains réexpliquent leur prévision avec la proportionnalité (ou presque), alors que ce qui est écrit dans le tableau ne correspond pas à ce qu'ils disent : ISS "aux 60 m j'ai fait 11s, comme 30 c'est la moitié de 60, je vais faire la moitié de 11 : 5s 5, j'ai fait 5,5 x 3 = 16,5" (peut-être a-t-elle vraiment prévu 16,5 et y-a-t-il eu interversion des temps prévus entre BOU et ISS dans le tableau). NAB dit qu'il a voulu diviser 11s 3 par 2 pour multiplier le résultat par 3 "11divisé par 2, 5s 5, fois 3 16s 5 ; les 3 dixièmes que j'avais pas divisés et pas multipliés, je les ai multipliés par 3, ça faisait 9d donc 17s 4". (En fait il a peut-être fait 11,3 : 2 = 5,6 ; 5,6 x 3 = 16,18 en comptant sa retenue de deux manières.)

Une élève a prévu en utilisant la proportionnalité mais a réalisé un temps loin de ses prévisions (SNP), d'autres n'ont pas utilisé la proportionnalité mais ont prévu un temps très proche de la réalité (NAB, ISS, LYD). Cependant VIC a utlisé la proportionnalité pour prévoir et réalisé le temps le plus proche de sa prévision.

Les élèves doivent ensuite dire à laquelle des deux courses, ils ont couru le plus vite. Les avis sont partagés. Certains comparent les temps totaux des 2 courses (et trouvent évidemment qu'ils ont été plus vite sur 60 m), d'autres comparent les 2 temps à 60 m, d'autres donnent des raisons physiques "90 m c'est plus fatigant que 60 m alors on court moins vite", "j'étais plus en forme", "il faisait plus froid", "j'ai couru aussi vite mais le parcours était plus long et il y avait des virages", quelques élèves se réfèrent à la proportionnalité par exemple Vic "à la première, j'ai fait 10s 6, divisé par 2, ça fait 5s 3, je devais faire 15s 9 (10s 6 + 5s 3) j'ai fait 10s 8 donc j'ai été plus vite à la 2ème" ou BOU (qui n'avait pas utilisé la proportionnalité pour prévoir) "j'ai été plus vite à la 1ère, en faisant 60 m + 30 m je trouve 19,8 et j'ai fait 19,9".

[6] Cette suite de situations a été élaborée avec R. Douady. Nous les avions expérimentées dans plusieurs classes, notamment une classe de 6ème dans laquelle a été produit un film pour le CNDP en 1982.

Il est nécessaire de s'entendre sur ce que veut dire aller plus vite à une course qu'à une autre. Une discussion passionnée s'engage. On peut comparer les temps si les courses sont sur la même distance, si elles ne sont pas sur la même distance, on ne peut pas. Si on compare les temps chronométrés aux 60 m on n'a pas forcément le même résultat que si on compare le temps des 90 m à celui qu'on calcule à partir de la course de 60 m. Par exemple BOU a mis 13s 2 sur 60 m et 12s 9 sur les premiers 60 m de la deuxième course ; mais 13s 2 aux 60 m cela fait 6s 6 aux 30 m et donc 19s 8 aux 90 m ; il a fait 19s 9 ; Bou a expliqué qu'il a couru plus vite à la première course ; les élèves discutent : il a couru plus vite au début de la 2ème course mais après il a ralenti.

Pour la prévision les élèves ne sont pas très convaincus par les calculs utilisant la proportionnalité parce que les phénomènes liés à la fatigue ou à la forme du parcours leur paraissent plus importants. Dans la comparaison, ils recourent à la proportionnalité parce qu'elle leur donne des moyens de comparaison et leur permet d'avoir des informations sur la régularité de leur course.

Il est décidé avec les maîtresses d'éclaicir la notion de régularité de la course en donnant les temps aux 30 m, 60 m, 90 m, en demandant aux élèves de décrire leur course, en utilisant des représentations graphiques sur un axe de ce type :

|————|————|————|

ou en coordonnées cartésiennes temps, distance,
et en faisant en gymnastique une course où l'objectif est de courir régulièrement.

-deuxième situation, *observation en CM2B*

La maîtresse donne aux élèves des informations sur la course des 90 m sous la forme de la feuille polycopiée reproduite ci-dessous :

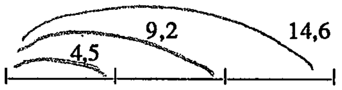
	temps indiqué par le chronomètre à 30m	60m	90m		temps mis pour parcourir chaque tronçon de 30 m : 30 m (D–M)	30 m (M–N)	30 m (N–A)
Henri	6,1	10,5	15,8	Arnaud	5,5	3,7	4,5
Francisco	6,1	11,2	17,4	Emmanuel	5,8	4,6	5,4
Stéphanie	6	11,4	16,8	Maryse	5,6	5,6	5,6
Karine	6,4	11,6	18,2	Diolinda	6,5	5,5	6,2
Stanislas	5,8	10,6	17,5	André	5,2	4,8	5
Stéphane	5,8	10,5	16	Marina	5,6	5,3	5,5
Suzanne	5,6	11,5	16,5	Naïma	6	5,3	6,8
François	4,5	9,2	14,6	Saci	4,9	4,7	4,9
Sandra	5,9	11,2	15	Hamidou	6,2	5,9	5,4
Ted	6	11,1	15	Jean	5,6	4,7	5,7
Nasri	5,8	10,4	15,4	Cyrille	5,5	5,2	5,5
Djémila	6,2	12	17,8	Arthur	5,8	6,2	5,8

Les élèves travaillent par deux, les noms étant indiqués sur la même ligne (Arthur est un élève fictif inventé par la maîtresse pour Djémila qui travaille donc seule). Les questions sont les suivantes :

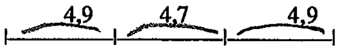
1) Si chacun avait couru en même temps que son coéquipier, lequel des 2 serait arrivé le premier aux 30 m, aux 60 m, aux 90 m ?

2) Lequel des 2 a couru le plus vite sur chacun des tronçons ?

Les élèves rencontrent des difficultés : au départ, ils comparent les données brutes ; pour la première question, ils rectifient sans trop de mal mais la deuxième question présente pour quelques-uns des difficultés presque insurmontables : ils n'arrivent pas à distinguer le temps mis pour un élève pour parcourir un tronçon de 30 m du temps indiqué par le chronomètre. La maîtresse leur suggère de s'appuyer sur les représentations "en segments" , par exemple :



pour François



pour Saci

qu'on cherche à compléter pour avoir les mêmes informations sur les deux courses. La question est de savoir de quel type d'information on a besoin pour répondre à chacune des questions.

Nous avions déjà proposé cette situation à une classe de CE2-CM1 ; les élèves avaient rencontré le même genre de difficultés ; on peut les rapprocher de celles que Vergnaud (travail non publié) a rencontrées chez des élèves de 6ème et 5ème à qui il demandait de placer des données sur une graduation. La distinction entre le temps -date et le temps- durée est difficile. Un des objectifs de cette situation est de la travailler. Les représentations ci-dessus, introduites par le maître, ont aidé les élèves à faire la relation avec le déroulement de la course tel qu'ils l'avaient vécu, et préparent la représentation graphique temps-distance en coordonnées cartésiennes.

Il est prévu à l'issue de cette séance que les enseignants reprennent cette situation et demandent à chaque enfant de décrire sa propre course telle qu'il l'a vécue : à quel moment pense-t-il être allé plus vite, moins vite, a-t-il perdu du temps au début, était-il fatigué à la fin ? Les renseignements fournis peuvent-ils l'aider à répondre à ces questions ? Quel est le temps indiqué par le chronomètre si on ne l'arrête pas du départ à l'arrivée ? Il est également prévu de demander aux élèves de faire une représentation de leur course dans un repère cartésien en indiquant le temps de passage aux 30 m et aux 60 m. (les maîtresses assurent que les élèves ont déjà fait du repérage dans le plan)

*-**troisième situation** : étude d'une course régulière, observation en CM2A*

La séance commence par un bilan de ce qui a été fait précédemment : les élèves ont fait une représentation graphique cartésienne de leur course en 3 tronçons et ont décrit leur course; ils ont repéré que presque tous les élèves ont été plus rapides sur le deuxième tronçon, un seul sur le premier, 4 sur le dernier. Il semble que tous les élèves puissent maintenant utiliser à bon escient le temps mis sur chaque tronçon et le temps de passage indiqué par le chronomètre. Au cours de ce bilan on a discuté de la régularité des courses. La maîtresse demande à chacun de décrire ce qui se serait passé s'il avait couru régulièrement comme sur le premier tronçon, puis propose d'étudier la course de quelqu'un qui serait capable de courir très longtemps régulièrement en faisant 6s pour 30 m et de trouver les temps de passage à 60 m, 90 m, 120 m, 180 m, 240 m, 210 m, 45 m, 15 m, 75 m, 150 m, 10 m, 20 m, 17 m.
Les nombres ont été choisis de façon que les élèves puissent dans un premier temps utiliser la proportionnalité de façon "scalaire" (Vergnaud) et soient amenés à chercher l'image de 1 m (pour 17 m).

La séance se déroule comme prévu, les élèves utilisent systématiquement la proportionnalité "scalaire", certains passent assez vite à une régularité aux 10 m (2s pour 10 m) et trouvent 1 m à partir de là : 2 d pour 1 m. Les nombres choisis étaient tels que les calculs soient faciles : on reste dans les entiers en passant aux dixièmes de seconde.

Il est prévu que les élèves fassent ensuite une représentation graphique de cette course régulière.

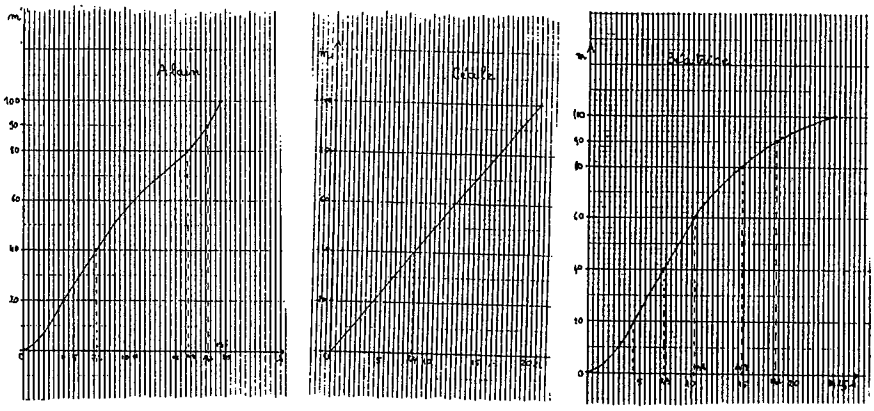
Observation en CM2B : représentation graphique de la course régulière

La représentation se fait sur du papier pour ordinateur gradué en pouces et dixièmes de pouce. On se met d'accord collectivement sur l'échelle en regardant le plus grand nombre qui intervient : pour les secondes, un élève propose 2 petits carreaux pour une seconde, ce qui est accepté, pour les mètres, la maîtresse dit qu'on s'arrêtera à 240 et propose 1 petit carreau pour 2 m.
La représentation se passe bien mais lentement (manque d'habitude). Les élèves constatent l'alignement des points et l'expliquent par la régularité de la course. La maîtresse demande d'utiliser le graphique pour prévoir quelques temps qu'on n'a pas calculés puis de vérifier par le calcul.
Au niveau du calcul quelques amalgames entre les mesures en m et en dixièmes de s: pour justifier 6s 7d pour 33 m, un élève explique de 33 m à 40 m il y a 7 m alors il faut ajouter 7d : 6s 7d.

Une élève passe à la procédure fonction et propose d'utiliser la valeur trouvée pour 1m : 2/10 pour 1m, ça fait 33x2/10 = 66/10 = 6,6 s pour 33 m. Cette procédure est reprise au niveau de la classe.

- quatrième situation : *utilisation de données graphiques pour étudier et comparer des courses, observation en CM2A*

Les élèves étudient 5 courses celles de Alain, Béatrice, Cécile, René (qui correspond à la course régulière qu'ils ont déjà étudiée) et la leur. Nous reproduisons ci-dessous les graphiques fournis.



Ils répondent aux questions suivantes :

1) trouver le classement si la course avait duré 100 m, 90 m, 60 m, 30 m.

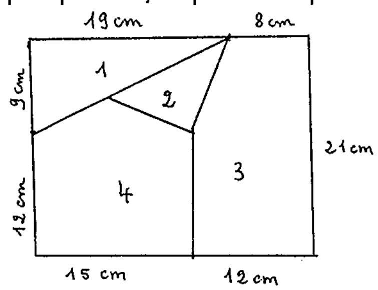
2) à quel moment de la course, à quelle distance aviez-vous le plus d'avance ou le plus de retard sur chacun des autres coureurs ?

Les élèves se tirent bien de ce travail : la lecture graphique ne pose pas de problème et on est alors ramené à la comparaison de nombres. La deuxième question n'est pas traitée par tous les élèves et il n'y a pas de bilan ce jour-là.

Le thème des courses a bien "accroché" les élèves et les enseignants à la fois par le fait qu'il s'appuyait sur une situation réellement vécue dans la classe et dans laquelle les enseignants et les élèves s'impliquaient beaucoup puisqu'ils pratiquaient le tiers temps pédagogique et faisaient du sport tous les jours après la récréation de l'après-midi et par l'utilisation des représentations graphiques, ce qui était nouveau et a plu à tous les élèves, qui étaient mis de cette façon en situation de réussite. Il a permis un travail assez approfondi sur représentations graphiques et proportionnalité. Nous avons pu vérifier à d'autres occasions que le travail sur les représentations graphiques qui permet une visualisation de propriétés numériques et fait ainsi appel à la perception, permet de mobiliser des élèves habituellement en difficulté.

1.2.3. agrandissements de puzzles (1 séance observée)

Après les vacances de février, on aborde un autre thème qui met en jeu la proportionnalité : agrandissement de puzzles. Les variables didactiques de cette situation ont été identifiées dans la brochure n° 62 de l'IREM de Paris 7 (Douady Perrin,1986). Ici les choix ont été les suivants : les élèves travaillent par 4 sur le même agrandissement (on pensait de cette façon gagner du temps : l'interaction entre les élèves étant plus précoce, ils pourraient plus rapidement relever des impossibilités).



Le puzzle a donc 4 pièces : un triangle rectangle, un triangle quelconque, une petite maison symétrique et un rectangle coupé, on a ainsi un certain nombre d'angles droits dont on attend la conservation ; on n'a pas le même nombre de pièces sur les bords parallèles du rectangle total ; les rapports d'agrandissement sont des fractions assez simples : 2 (choisi pour qu'une équipe réussisse), 1/2, 3/2, 3/4, 2/3, 5/3 mais dont on n'attend pas qu'ils soient découverts facilement (sauf pour les doubles et les moitiés).

Observation en CM2A (1er mars) : la maîtresse distribue les pièces d'un puzzle de couleur à chaque équipe et leur demande de reconstituer le puzzle (elle affiche le modèle au tableau) ; la véritable consigne est donnée ensuite : chaque équipe va fabriquer un nouveau puzzle de même forme mais plus grand ou plus petit ; chacun dans l'équipe va faire une pièce ; dans cette pièce (n° 4) la longueur l vaut ici 12 cm, on va demander que dans le nouveau puzzle, cette longueur soit de 20 cm pour les jaunes, 8 cm pour les bleus, 18 cm pour les rouges, 9 cm pour les roses, 24 cm pour les verts, 6 cm pour les transparents. La maîtresse écrit au tableau :

groupe jaune : 12 cm ———> 20 cm
groupe bleu : 12 cm ———> 8 cm

groupe rouge : 12 cm ———> 18 cm
groupe rose : 12 cm ———> 9 cm
groupe vert : 12 cm ———> 24 cm
groupe transparent : 12 cm ———> 6 cm

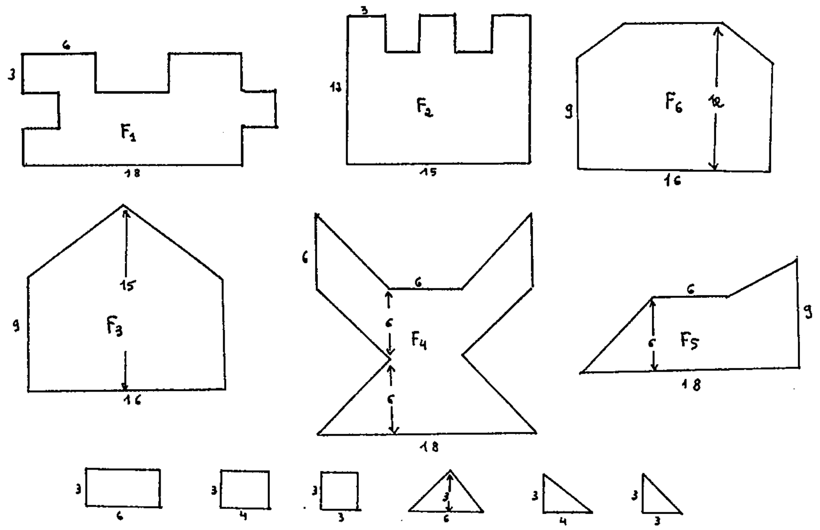
Les élèves qui ont le rapport 2 ou 1/2 utilisent le double ou la moitié, tous les autres utilisent un modèle additif ; certains rencontrent des problèmes à la construction, en particulier Philippe a le rectangle coupé (pièce n°4), il a voulu enlever 3 cm sur tous les côtés en gardant des bords parallèles aux bords de sa pièce mais il ne lui reste pas assez de cm en haut. Les élèves qui ont trouvé les mesures correctes (avec les rapports 2 ou 1/2) ont parfois rencontré des problèmes pour construire les pièces : la manipulation des instruments n'est pas au point et quand il n'y a pas d'angle droit (triangle quelconque par exemple) la construction se fait avec la règle par approximations.
Les élèves travaillant par équipes sur le même puzzle, ils ont été tentés de donner quelques coups de ciseaux pour rectifier un angle qui n'allait pas. Le triangle quelconque pose problème parce qu'on ne sait pas dans quel sens il faut le poser.
Au cours du bilan de fin de séance, la maîtresse annonce :"il y a des groupes qui ont fait des additions, d'autres des soustractions, d'autres des multiplications et d'autres des divisions."
Cette présentation qui laisse entendre qu'il s'agissait de trouver une opération à faire, a sans doute influé la suite du travail puisqu'au cours du bilan une élève annonce "c'est pas une addition ou une soustraction qu'il fallait faire mais une multiplication ou une division" et l'ensemble de la classe se rallie assez vite à ce point de vue.
Au cours des séances suivantes, la maîtresse revient avec les élèves sur le problème de la construction géométrique de chaque pièce quand on connaît les mesures (à propos de 12 ——> 24 et de 12 ——> 6). Ils ont ensuite traité collectivement le cas 12 ——> 18 ; la maîtresse leur a demandé de chercher d'autres dimensions pour lesquelles ce serait facile de trouver ; les élèves ont utilisé la proportionnalité "scalaire" ; ils ont trouvé de cette façon la plupart des dimensions qui leur étaient utiles sauf pour 8,2 10,7 et 12,5. Je n'étais pas présente et je ne peux pas dire comment cette question a été réglée (passage par 0,5 et 0,1 ou multiplication par 1,5). Ensuite la maîtresse a fait expliciter aux élèves des suites d'opérateurs qui donnaient les résultats (par exemple diviser par 2 puis multiplier par 3 pour 12 ——> 6 ——> 18). Les cas 12 ——> 9 et 12 ——> 8 ont été aussi traités en classe ; le cas 12 ——> 20 a été donné en devoir à la maison.
Nous n'avons pas de précision sur le déroulement ultérieur.

Nous n'avons observé qu'une séance sur la situation des puzzles ce qui ne nous donne que peu d'éléments d'information directe. Cependant il nous semble que, contrairement à notre objectif de départ, le lien entre l'aspect isomorphisme et l'aspect fonction de la proportionnalité a été relativement peu travaillé : les élèves ont rapidement recherché un modèle de type opérateur. Cela est sans doute dû en partie à une présentation de la consigne avec des flèches comme 12 ———> 18 qui appelle ce type de traitement, peut-être aussi aux habitudes des élèves. Nous n'avons sans doute pas su convaincre les enseignants de l'importance de l'aspect isomorphisme pour rejeter les modèles additifs erronés et reconnaître la validité du modèle multiplicatif. De plus, le choix du découpage (seuls les côtés verticaux du rectangle ne comportaient pas le même nombre de pièces) ne favorisait pas beaucoup le recours aux arguments d'additivité pour rejeter l'opérateur additif. La constitution des groupes qui amenait une validation trop précoce incitait les élèves à tricher légèrement avec leur modèle et à apporter des corrections locales qui empêchaient ensuite l'identification et la remise en cause du modèle utilisé.

1.2.4. aires (2 séances observées dans chaque classe).

Au troisième trimestre nous avons travaillé sur la notion d'aire. Les situations utilisées sont pour la plupart décrites dans la brochure n° 48 de l'IREM Paris 7 (Douady Perrin 1983) ainsi que dans la première partie de cette thèse. Les maîtresses disposaient de la brochure qui venait d'être rédigée. Elles ne voulaient pas passer trop de temps sur ce thème et aborder assez vite la mesure, y compris les formules du programme. Nous avons donc commencé directement par le pavage des surfaces S1, S2, S3, S4, S5 à l'aide des carrelages. L'aspect surfaces équivalentes a été traité à cette occasion. Les surfaces et les carrelages sont décrits dans la première partie. Remarquons qu'en CM2A, la maîtresse a distribué aux élèves suffisamment de carrelages pour qu'ils puissent paver effectivement les surfaces (au lieu de donner un jeu de carrelage par élève ce qui les oblige à utiliser le report et à dessiner), ce qui change la situation : les élèves ont alors dans un premier temps mis en œuvre des procédures de réagencement des pièces (se référant au découpage- recollement) plutôt que de recourir aux nombres.

Nous reproduisons ci-dessous, pour mémoire, dans un très format réduit, les surfaces et les pavés utilisés.



Observation en CM2A

- première séance observée en CM2A : Les élèves racontent la séance précédente : ils ont fait les pavages et ont trouvé les relations suivantes entre les carrelages 2 tv = 1 tj, 2 cr = 1 rb, 2 tr = 1 rj, 2 tv = 1 cr. Ils ont désigné les carrelages par les initiales de la forme et de la couleur (en fait l'initiale de la couleur était notée en exposant) : rb pour rectangle bleu (6,3), cr pour carré rouge (3,3), rj pour rectangle jaune (4,3), tv pour triangle vert (demi carré), tj pour triangle jaune (même aire que le carré), tr pour triangle rose (demi rectangle jaune). Pour la première surface, ils ont trouvé 8 rb ou 16 cr ou 32 tv, pour la seconde 26 tr ou 13 rj, pour la troisième 14 rj + 4 tr ou 32 tr, pour la quatrième 20 tj ou 40 tv, pour la cinquième 14 rj + 2 tr. Comme les élèves disposaient de suffisamment de pièces, ils ont traité la question comme la résolution d'un puzzle et pour les "petites maisons" (S_3 et S_5), ils ont utilisé à la fois rj et tr.

La maîtresse demande cette fois de tracer des surfaces différentes de celles dont ils disposent mais de même aire. Trois procédures ont été utilisées : l'une se réfère directement à la mesure : prendre le nombre de carreaux nécessaire et fabriquer avec ces carreaux une surface n'ayant aucun rapport de forme avec la première mais utilisant tous les carreaux ; la seconde consiste à déplacer une partie des carreaux qui recouvrent la surface et à les replacer sur un autre bord de la surface ce qui change la forme de la surface de départ ; la troisième ne se sert pas des pavés : c'est un découpage et recollement. La première et surtout la seconde procédure n'ont pu apparaître que parce que les élèves disposaient de suffisamment de carrelages pour recouvrir entièrement la surface : ils procédaient comme pour un tangram.

La maîtresse ramasse ensuite les surfaces et demande de comparer les aires des surfaces (les élèves disposent toujours des carrelages). Une grande partie des élèves propose de comparer les nombres sans s'inquiéter de savoir si on a utilisé le même carrelage ou non. Devant l'objection faite par quelques-uns que si les carrelages sont plus grands, il en faut moins, une élève propose de mesurer le tour et déclare que la surface qui aura le plus grand tour aura la plus grande aire !

Il est clair que l'absence de travail sur la notion d'aire indépendamment de la mesure a révélé que ce travail aurait été très important pour donner du sens au mot "aire". Le type de questions qu'il suscite a été abordé à ce moment là.

Le mot aire était déjà connu des élèves, la maîtresse l'a employé directement. Dans la situation de départ, il ne pouvait être interprété par les élèves que comme un nombre de carrelages. A l'époque où se déroulent ces séquences, nous avions fait l'année précédente l'expérimentation décrite dans la première partie mais nous n'avions pas encore analysé précisément les résultats[7]. Les maîtresses souhaitaient faire un nombre limité de séances sur les aires et arriver assez vite aux formules usuelles. Nous étions consciente des difficultés de construction de la notion d'aire et de sa dissociation du périmètre, mais il y avait nécessité de gagner du temps et la séquence du pavage nous paraissait fondamentale et propre à poser les questions indispensables. Elles se sont posées effectivement. La maîtresse a dû intervenir pour que les élèves ne se mettent pas d'accord sur le fait qu'il suffisait de comparer les nombres pour comparer les aires (même mesurées avec des unités différentes). La discussion qui a suivi avec les maîtresses a porté sur la distinction des trois termes : surface, aire, mesure.

Nous n'avons pas assisté aux séances qui ont réglé les problèmes dans cette classe et à l'institutionnalisation qui a été faite par la maîtresse. Nous avons revu les élèves 3 semaines plus tard (le 17 mai) : ils avaient trouvé une unité commune et rempli un tableau permettant de comparer les surfaces. La maîtresse leur propose ce jour là de mesurer la surface S_6 et de la comparer aux autres. Beaucoup de solutions sont trouvées, la

[7]Ils sont maintenant publiés : voir Douady, Perrin-Glorian, 1989.

plupart issues des pavages qu'on peut faire en isolant 1/2 rb du reste de la surface, et utilisant plusieurs pavés différents. La maîtresse demande d'abandonner les surfaces et d'exprimer l'aire de S_6 en se servant d'une seule unité à la fois ; les élèves font des substitutions sans difficulté (un élève emploie le mot en soulignant que c'est comme en grammaire quand on remplace un mot par un autre qui veur dire la même chose). Un problème sur l'écriture de 11 demi rectangles bleus qu'un élève écrit 11 1/2.
C'est la dernière observation qui a eu lieu dans cette classe.

Observation en CM2B.
En CM2B, nous avons assisté à 2 séances sur les aires : la première (le 3 mai) sur les pavages. Les mêmes difficultés ont été observées que dans d'autres classes avec les surfaces S_3, S_4, S_5. Les élèves ont finalement réussi à paver et à trouver les relations faciles entre carrelages. La deuxième avait lieu 3 semaines plus tard (le 24 mai) alors que la classe avait déjà établi la formule de calcul d'aire d'un rectangle et portait sur l'établissement de la formule de l'aire du parallélogramme. Un parallélogramme est dessiné sur une feuille polycopiée, les questions sont les suivantes :
1) tu dessines un rectangle ayant la même aire
2) tu calcules l'aire de ce parallélogramme (avec l'unité r_4)
3) tu trouves d'autres parallélogrammes qui auront la même aire.
Les élèves utilisent rapidement sur leur feuille le découpage et recollement pour reporter un triangle qui transforme le parallélogramme en rectangle, mais la construction au tableau avec les instruments pose de gros problèmes. Ensuite la question est de savoir où mesurer la longueur et la largeur du rectangle : on retombe sur le problème de la longueur droite qui est différente de la longueur penchée. D'ailleurs certains élèves (dont l'élève qui dominait nettement le reste de la classe en mathématiques) ont simplement multiplié les dimensions du parallélogramme sans s'occuper du rectangle !
C'est la dernière séance observée dans cette classe où on a passé moins de temps sur les premières séances et où on a abordé plus tôt l'établissement des formules.

Le travail sur les aires dans ces deux classes confirme les hypothèses faites dans la première partie : il semble qu'on ne peut faire l'économie de la construction de la notion d'aire en tant que grandeur avant d'aborder la mesure : les procédures de découpage et recollement utilisées pour l'établissement de formules ne suffisent pas à contrebalancer les modèles liés à l'utilisation des longueurs pour mesurer les aires si elles n'ont pas été solidement institutionnalisées auparavant.

1.3. Entretiens par deux avec quelques élèves

1.3.1. le problème choisi, conditions

Le problème choisi est le suivant : recherche d'un carré d'aire 30 cm^2 ; en fait nous avons d'abord posé la même question avec 25 cm^2 car nous avons constaté en interrogeant le premier groupe que la réponse dans ce cas n'était pas évidente pour tous les élèves. Les élèves disposaient de papier à petits carreaux (de côté 0,5 cm). Le problème était choisi pour tester les élèves sur la notion d'aire en même temps que sur l'utilisation des décimaux - en particulier de l'ordre des décimaux - dans une situation d'approximation présentant un jeu de cadres numérique - géométrique.
Les élèves étaient interrogés par deux pour favoriser les interactions et aussi pour nous permettre d'observer davantage d'élèves : les entretiens ont eu lieu fin juin et nous n'avons pu interroger tous les élèves. Chaque entretien durait environ 3/4 heure. Nous avons interrogé 6 groupes de CM2A (soit 12 élèves) et 3 groupes de CM2B (soit 6 élèves). Les élèves choisis étaient des élèves considérés par les maîtresses comme moyens.

1.3.2. procédures observées

On peut distinguer des procédures géométriques et des procédures numériques. Il y a sur ce point des différences entre les élèves : certains se placent d'emblée sur le plan du calcul tandis que d'autres restent le plus longtemps possible dans le domaine géométrique : au bout d'un certain temps, s'ils ne le faisaient pas d'eux-mêmes, on demandait aux élèves de ne plus dessiner les carrés, de se limiter au calcul et de présenter les résultats dans un tableau (longueur du côté en cm, aire en cm^2).
Les procédures géométriques observées sont les suivantes :
- au démarrage tracer les 25 cm^2 un par un en essayant de les disposer en carré, notons d'ailleurs que certains élèves comptent en petits carreaux ou ne prennent pas tout de suite en compte la contrainte de faire un carré
- ajouter au carré de côté 5 cm une bande de 5 carreaux pour faire 30 cm^2

- couper la moitié de cette bande pour la remettre de l'autre côté
- ajouter ou enlever une bande tout autour d'un carré pour en fabriquer un autre.
- dénombrer les carreaux un par un pour calculer l'aire ou au moins reformer des cm^2 avec des morceaux dans le cas où la mesure du côté du carré n'est pas entière (5,5 ou 7,5 ou 6,25)

Trois élèves déclarent qu'il est impossible de dessiner le carré parce qu'il n'y a pas 25 cm dans la feuille : un carré d'aire 25 cm^2 est compris comme un carré de côté 25 cm.

Les procédures numériques sont les suivantes (pour les deux problèmes) :

- diviser l'aire par 4 : 11 élèves le font à un moment ou à un autre, parmi les 7 élèves qui ne le font pas, 2 abordent à peine les calculs numériques et leurs difficultés sur les décimaux se révèlent importantes et 3 autres ne l'utilisent pas mais ne contredisent pas leur partenaire quand il l'utilise
- une élève commence par diviser 25 par 2,
- recherche mentale de 30 dans une table et réponse 5x6 soit comme solution du problème soit pour dire que le problème n'a pas de solution (7 élèves refusent au départ les nombres non entiers que ce soit en divisant 25 ou 30 par 4 ou en cherchant une solution par multiplication : dans leur lecture du contrat didactique "nombre" sans plus de précision veut dire "nombre entier")
- réponse directe 5x5 (seuls deux élèves du même groupe l'ont proposé tout de suite)
- essais en se servant éventuellement du sens de variation : 10 élèves font spontanément des essais mais une élève revient à la division par 4 après l'échec de 5,5 dans le cas de 30.
- quand le problème est traduit dans le cadre numérique, tous les élèves utilisent la croissance de l'aire en fonction du côté ou plutôt les encadrements, quand on les y encourage, par exemple en leur demandant s'ils se rapprochent de 30.

1.3.3. résultats sur les aires

Nous avons pu constater que les notions relatives aux aires n'étaient pas acquises par la plupart des élèves : certains confondent le petit carreau et le cm^2, ou même le cm et le cm^2 ou ne savent pas ce qu'est 1 cm^2, un élève prend 2 carreaux pour 1 cm^2 (parce que 1 cm vaut 2 carreaux-longueur ?). Beaucoup d'élèves recourent à la division par 4 pour trouver le côté d'un carré d'aire donnée ou multiplient par 4 le côté du carré pour trouver son aire ; deux élèves reviennent même à cette procédure trois ou quatre fois au cours de l'entretien, même après avoir dénombré les unités dans un carré de dimensions entières. On voit là la difficulté de certains élèves à intégrer l'information donnée en gardant un point de vue cohérent : ils juxtaposent des procédures qui donnent des résultats contradictoires sans les remettre véritablement en cause.

Le lien entre pavage et formule permettant de calculer l'aire d'un carré en fonction des dimensions est difficile pour les élèves dans le cas où le côté n'est pas mesuré par un nombre entier : nous avons justifié le calcul dans le cas de 5,5 x 5,5 avec un des groupes mais les élèves ne pouvaient faire cette justification eux-mêmes : ils pouvaient dénombrer correctement les cm^2 en regroupant des morceaux, évaluer le petit carreau restant mais ne pouvaient relier ce travail à la distributivité sur les nombres. Cette manière de donner du sens à la multiplication à partir des aires n'avait pas été travaillée en classe.

1.3.4. utilisation du sens de variation

La moitié des élèves utilisent spontanément la croissance de l'aire en fonction du côté quand ils ont traduit le problème dans le cadre numérique, et après quelques essais au hasard ; une élève justifie cette croissance dans le cadre géométrique : elle a emboîté les carrés dans le même "coin". L'utilisation de la croissance de l'aire en fonction du côté nécessite d'être dans le cadre numérique ou au moins de faire interagir le cadre géométrique avec le cadre numérique : les élèves qui n'utilisent que le cadre géométrique et les procédures de découpage et recollement ne peuvent y recourir : ils ne le font que quand on les oblige à se placer dans le cadre numérique. Tous les élèves l'utilisent alors, au moins quand on les y aide en demandant quels sont, parmi les résultats qu'ils ont trouvés, ceux qui sont les plus proches de 30 : ils essaient de choisir un peu moins qu'un nombre qui a donné un résultat trop grand ou un peu plus qu'un nombre qui a donné un résultat trop petit. Quand le processus est amorcé et qu'ils sont persuadés qu'ils ne pourront pas trouver le résultat avec une seule opération, ils utilisent volontiers la relation "entre" qui les aide davantage et leur permet moins de mauvais choix : ce sont alors leurs connaissances sur l'ordre des décimaux qui sont en jeu.

1.3.5. calcul sur les décimaux

Deux élèves ont des difficultés importantes sur les décimaux et ne savent comment écrire 5 et demi : ils proposent à la fois 5,50 5,30 $5,\frac{1}{2}$ 5,5 et ne savent pas si ces écritures sont équivalentes ou non.

Tous les élèves savent qu'il y a dix dixièmes et 100 centièmes dans une unité mais peu savent combien il y a de centièmes dans un dixième.

Quelques élèves ne sont pas très sûrs à propos de l'ordre des décimaux : l'un d'eux pense que 5,25 > 5,5 et une élève qui veut tracer un carré de côté 6,25 cm est embêtée parce qu'il n'y a que 10 divisions sur sa règle : elle commence "ça fera déjà 7 et ...".

Cinq élèves proposent d'intercaler un 0 pour passer aux centièmes : un groupe propose 5,06 entre 5,4 et 5,5, un autre 5,04 et dans une troisième équipe, une élève essaie 5,05 mais sa partenaire n'est pas d'accord. Nous avons vu dans le chapitre 2 que cette "règle" de fonctionnement apparaissait dans toutes les classes examinées.

Quelques élèves font des propositions dans le mauvais intervalle, en particulier au moment du passage aux centièmes ou aux millièmes (par exemple 4,55 entre 4,4 et 4,5 ou 4,485 entre 4,47 et 4,48) mais peuvent corriger facilement. Quatre élèves sont très sûrs au niveau de l'ordre des décimaux : ils ne font pas d'erreurs et corrigent celles de leur partenaire.

Les opérations sont presque toujours effectuées correctement (à partir du passage aux centièmes pour la mesure du côté, on fournissait une calculette, parfois un peu avant si le temps pressait, cependant tous les élèves ont effectué au moins une ou deux multiplications de nombres décimaux). Une élève a trouvé 51,25 en divisant 25 par 4 mais il s'agit là d'une erreur de technique de division dans les entiers.

1.3.6. accès aux millièmes et au delà

Un groupe n'est pas arrivé à ce niveau : celui des deux élèves qui avaient des difficultés d'écriture des décimaux. Un seul élève montre une résistance dans le passage aux millièmes : quand il a trouvé que c'est entre 5,47 et 5,49, il déclare : "c'est 5,48, c'est obligé!", il suit ensuite son partenaire dans le calcul des millièmes. Tous les autres élèves passent facilement aux millièmes et il y a moins d'erreurs dans les propositions : l'algorithme d'encadrement commence à être au point et les choix sont presque toujours dans le bon intervalle.

1.3.7. graduation

Le placement de nombres décimaux sur une graduation pose encore problème. Pour 7 des 9 groupes, on a demandé aux élèves de placer les décimaux choisis sur un agrandissement du segment [5,6] représenté suivant les cas par 30 carreaux (15 cm), 40 carreaux (20 cm) ou 50 carreaux (25 cm). Tous les élèves ont su placer correctement 5,5 sans hésitation ; ceux à qui la question a été posée ont aussi placé 5,25 sans problème, mais les difficultés commencent avec 5,1. Un seul élève l'a placé correctement au premier essai mais c'est un des deux élèves qui ont des difficultés d'écriture et il donne la justification suivante : "5 c'est la moitié de 10 et la moitié de 5 c'est 2,5" (il avait une échelle de 50 carreaux, quel aurait été son placement avec 40 carreaux ?). Beaucoup d'élèves corrigent après un essai ou deux mais quelques-uns n'arrivent pas à corriger et doivent essayer par exemple 1 carreau, 2 carreaux, 5 carreaux avant de s'apercevoir qu'il fallait en prendre 3.

1.4. Retour sur les résultats des tests

Ces tests et leurs résultats sur 10 classes sont décrits dans le chapitre 2. Nous avons déjà dit que les élèves du CM2A ont mieux réussi les questions sur décimaux et fractions que ceux de classes de 6ème de ZEP. Il n'en est pas de même pour les CM2B qui, pour beaucoup, n'ont pas pris au sérieux ce test et se sont abstenus de répondre à beaucoup de questions. Nous verrons dans le chapitre 6 que l'instituteur de cette classe se méfie de l'évaluation et lui attribue un rôle essentiellement négatif, ce qui contribue peut-être à expliquer ce taux élevé de non réponse à certaines questions.

Les tests ont été proposés 2 fois dans des versions légèrement différentes en janvier 84 puis en mai-juin 84 (ex : représentations seulement en janvier, axe gradué seulement en mai). Nous faisons ici un bilan rapide pour chaque question sur les deux classes observées.

Questions qui n'étaient posées qu'en janvier :

* **Représentations.** En CM2A les représentations proposées pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont de type baguette (même si la baguette a une épaisseur comme la bande de papier utilisée en classe) ou galette, parfois les deux. Mais les

parts ne sont pas toujours égales surtout dans le cas de $\frac{1}{3}$ et des représentations en galettes. On trouve respectivement 19 représentations avec dessin pour $\frac{1}{3}$ dont 12 à peu près correctes, 22 pour $\frac{3}{4}$ dont 16 correctes. En CM2B, quand il y a un dessin, c'est presque toujours sous forme de baguette mais on a souvent des réponses directement issues de l'institutionnalisation comme "$\frac{1}{3}$ c'est l'unité partagée en 3". On trouve 8 représentations correctes sur 9 fournies avec dessin et 4 réponses "l'unité partagée en 3" mais 3 des réponses correctes avec dessin sont "l'unité partagée en 3" avec le dessin d'une bande partagée en 3 parties égales. Seuls 4 élèves fournissent des dessins pour $\frac{3}{4}$ dont un seul correct. Les autres représentent une unité partagée en 4 avec $\frac{1}{4}$ sur chaque morceau ou une bande partagée en 3 avec les indications $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$.
Pour 2,3 il y a encore 14 réponses avec dessin au CM2A et 5 au CM2B, mais seulement 3 correctes dans chaque classe, toutes sous forme de baguette.

Les représentations utilisées dans l'apprentissage sont donc assez peu mobilisées par les élèves. Les parts de tarte qui semblent une référence de beaucoup d'élèves de CM2A sont peu fiables pour $\frac{1}{3}$ et inefficaces pour 2,3. Un élève du CM2A manifeste dans ses dessins une conception du type couple de 2 entiers dans les 3 cas, un autre le fait pour 2,3.

* Sur **les heures**, 13 élèves de chaque classe repondent correctement pour $\frac{1}{4}$ heure, 6 élèves du CM2A donnent les 3 réponses correctes plus 1 qui a répondu 2 mn pour un tiers d'heure (oubli du 0 dans la division) et 1 qui a répondu 60 :5 = 30 pour un cinquième, 1 seul élève donne les 3 réponses correctes pour le CM2B, deux autres fournissent des réponses justes pour $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$. Peu de réponses fausses pour $\frac{1}{4}$ heure, mais quelques réponses liées à 5 pour $\frac{1}{5}$. A noter cependant : un élève répond 840 m, 690 m, 950 m, ce qui peut correspondre respectivement à 14x60, 13x60 (avec de plus 3x6 =9), et 15x60 (avec 5x6 = 35).

* Sur **les sommes**, aucun élève ne répond correctement pour $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ mais 18 élèves sur 22 en CM2A et 10 élèves sur 21 au CM2B répondent correctement dans les 3 cas où les fractions ont le même dénominateur, tous les élèves du CM2A et 13 du CM2B répondent juste pour $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Aucun élève du CM2A n'ajoute les dénominateurs entre eux, 5 élèves du CM2B le font occasionnellement. En revanche la moitié de $\frac{1}{100}$ est $\frac{1}{50}$ pour la majorité des élèves qui abordent cette question : une seule réponse correcte en CM2A, aucune en CM2B.

* **problème des âges** : 14 élèves du CM2A et 10 du CM2B donnent une réponse correcte à la question posée ou calculent les âges. En CM2A, beaucoup des élèves qui ont calculé correctement les âges n'ont pas répondu à la question posée.
Il semble que, pour eux, le calcul des âges n'est pas un moyen de répondre à la première question ou, du moins qu'il leur a fait perdre de vue cette question. Peu d'élèves ont travaillé au niveau des opérateurs. Notons cependant qu'un élève a traduit les informations sur les relations en prenant 2 cm pour l'âge de Martine et en représentant les âges par des baguettes de longueurs proportionnelles aux âges .

* **problème du carreleur** : 11 réponses 25x 15 (dont une avec erreur de calcul) pour le CM2A, 3 au CM2B, 1 calcul de périmètre au CM2B, 3 calculs de demi-périmètre au CM2A.

Questions posées en janvier et en juin :

* **Intercalation.** Même si peu d'élèves n'ont que des réponses justes, on voit dans les deux classes une progression entre janvier et juin : 2 en CM2A et 1 en CM2B en janvier et respectivement 5 et 4 en juin. L'erreur E1 qui consiste à traiter le décimal comme un couple d'entiers reste stable (5 et 3 en janvier, 4 et 4 en juin). L'erreur E2 qui consiste à intercaler des 0 derrière la virgule diminue en CM2A (passant de 4 à 1) mais augmente en CM2B (de 1 à 3). L'erreur E3 qui consiste à ajouter des 0 à la fin de la partie décimale diminue en CM2A (passant de 6 à 3), reste relativement faible en CM2B (2 à chaque fois). L'erreur E4 (rester dans les décimaux dont la partie décimale a une même longueur) reste importante même si elle diminue en CM2B (8 et 11 en janvier, 8 et 6 en juin).
La progression est confirmée si on regarde les réponses successives de chaque élève : en CM2A les 3 élèves qui avaient au plus une erreur en janvier ont toutes leurs réponses correctes en juin. Il s'y ajoute 2 élèves qui ne font aucune erreur et 4 qui n'en font qu'une. Cinq élèves faisaient l'erreur E1 en janvier, une continue à la faire, 2 répondent correctement et 2 ne donnent que des nombres à une décimale (1,8 1,9 2,1) en juin. Un des élèves qui

faisaient l'erreur E2 en janvier la fait encore en juin, une ne fait plus d'erreur en juin les autres font d'autres erreurs (réponse hors de la fourchette pour l'un, restriction aux nombres à un seule décimale pour l'autre).
En CM2B, l'élève qui avait répondu correctement continue à le faire. Trois autres le rejoignent en juin dont 2 faisaient l'erreur E1 en janvier et une élève qui restait dans les nombres à une décimale en juin et donne des nombres plus grands que 1,1 (pour entre 1 et 1,1) mais répond juste aux 3 autres questions avec des nombres à 2 décimales. Le troisième élève qui faisait l'erreur E1 en janvier répond en juin 1,8 1,9 2,0 pour les nombres compris entre 1,8 et 2,1. L'élève qui faisait l'erreur E2 la fait encore. Il est rejoint par 2 autres élèves qui ne répondaient pas en janvier. Quatre des élèves qui faisaient l'erreur E4 en janvier la font encore en juin.
Il y a un net progrès en juin, même si c'est encore pour peu d'élèves, notamment dans le passage de l'erreur E1 à une réponse correcte. Des élèves sont encore instables et modifient leur façon de répondre en faisant un autre type d'erreur.

* **rangement de décimaux**. En CM2A, 7 élèves fournissent une réponse correcte sur les décimaux et 4 font une seule erreur en janvier, 8 donnent des réponses correctes et un fait une seule erreur en juin. Dans le même temps le nombre des élèves qui rangent les parties décimales comme des entiers diminue, passant de 5 à 2, les non réponse augmentent ainsi que le classement 2 à 2 des nombres. En CM2B, les non réponses sont très importantes en janvier, elles diminuent en juin, mais sur un effectif moindre (beaucoup d'absents). Les réponses correctes passent de 4 sur 21 à 3 sur 16, ce qui n'est pas très différent mais le classement des décimaux en rangeant les parties décimales comme des entiers augmente et passe de 4 sur 21 à 6 sur 16.
Si l'on regarde individuellement, en CM2A, en janvier 7 élèves ne faisaient aucune erreur et 4 n'en faisaient qu'une. Ces mêmes élèves, pour 6 d'entre eux ne font pas d'erreur en juin, 3 ne traitent pas la question en juin, les 2 autres mettent des ordres partiels utilisant à la fois les deux signes < et > entre les nombres, l'un d'eux inverse en plus les deux signes. Deux élèves qui classaient les parties décimales comme des entiers ont cette fois un ordre entièrement correct. Il faut ajouter une élève qui a un ordre entièrement correct en juin et qui avait en janvier proposé des ordres partiels corrects à partie entière égale mais n'avait pas tenu compte de la partie entière pour situer les classes les unes par rapport. Finalement 9 élèves de cette classe au moins (on ne peut pes se prononcer pour les 3 qui n'ont pas traité l'exercice en juin semblent pouvoir traiter cet exercice de façon assez fiable.
En CM2B, c'est plus difficile de faire des comparaisons car plusieurs élèves n'ont pas donné leur nom en janvier. Nous avons pu rétablir les identités sauf pour un élève absent en juin. Deux élèves n'ont aucune erreur en janvier ni en juin. Un élève qui ne traitait pas le problème en janvier répond correctement en juin. Deux élèves qui résolvaient correctement en janvier sont absents en juin. Sur les 4 élèves qui classaient les parties décimales comme des entiers, 3 le font encore en juin, la quatrième est absente. Trois élèves qui n'avaient pas traité l'exercice ou traité autre chose ou étaient absents en janvier utilisent cette règle en juin.
Les résultats sur l'ordre sont inférieurs à ce que nous espérions au départ. Le nombre des élèves qui ont toutes leurs réponses correctes n'augmente pas. Cependant si on regarde les performances individuelles, il y a trois élèves en net progrès entre janvier et juin en CM2A, trois autres semblent avoir régressé. L'erreur classique qui consiste à ordonner les parties décimales comme des entiers est encore très présente. Elle progresse même en CM2B parce que des élèves qui n'avaient rien fait l'ont adoptée. Il faut remarquer que cette règle est cependant moins utilisée que dans les classes de 6ème de ZEP.

* **Problèmes des œufs**. Il reste très difficile. En janvier, il était placé en fin de test, avec un énoncé très compact. Aucun élève ne l'avait réussi, un seul l'avait presque réussi. Certains élèves mélangeaient même les multiplications par 6 et par 10 sans doute sans distinguer les deux questions.
Les procédures qui avaient un peu de cohérence correspondaient à une insuffisance dans les multiplications par 6 ou à un début de multiplications par 6 successives. En juin, en CM2A un élève traite correctement la première partie, un autre réussit presque (il lui manque l'addition finale) et un 3ème amorce correctement le processus et s'arrête aux caisses, 11 autres utilisent une procédure partiellement correcte mais il manque des multiplications par 6 pour les cartons et/ou pour les caisses (6 ne multiplient que par 6 dans les 3 cas), 2 élèves font des suites de multiplications. Pour la deuxième partie, 3 élèves réussissent partiellement à partir de leur résultat de la 1ère question (à partir de nombres entre 300 et 1000 pour 2 d'entre eux).
En CM2B, un élève avait presque réussi la première partie en janvier : il ne lui restait qu'à faire l'addition finale, en juin il oublie les cartons et les boîtes. Deux élèves réussissent totalement la première partie plus 1 qui fait une erreur de retenue dans la dernière multiplication (il est le seul à mener à bien la procédure suivante 50x6 = 300 cartons, 303x6 = 1818 boîtes, 1818x6 + 2x6, malheureusement il fait 1818x6 = 7908, il a mis une retenue de 1 au lieu de 4 pour 6x8). Trois autres élèves amorcent la résolution sans aller au bout. On trouve encore des multiplications par 6 insuffisantes (4 élèves) et des multiplications successives : 36x3x3x50 pour un élève et

6x6x6x6x6 pour un autre. La deuxième partie est entièrement réussie à partir de leurs données par 2 élèves qui avaient partiellement réussi le I, et partiellement réussie par un autre.

Axe gradué. *(question traitée en juin seulement).*

La question sur l'axe gradué est mal réussie : un seul élève dans chaque classe place correctement tous les points et un dans chaque classe en place au moins 4. Même le placement de 2,5 n'est correct que pour 9 élèves du CM2A et 3 du CM2B. Il est vrai que 3 élèves du CM2B et 1 du CM2A n'ont pas abordé la question et que 4 élèves de CM2B et 3 de CM2A ont seulement ordonné les nombres sans les placer sur l'axe. Dans chacune des classes 3 élèves ne respectent pas les intervalles entre entiers. En CM2A 4 élèves utilisent les cm ou mm au moins partiellement pour placer les nombres et 3 font de même en CM2B.

Conclusion

On constate un progrès de certains élèves et une réussite meilleure à plusieurs questions que des élèves de 6ème de ZEP. Cependant il semble y avoir peu de connaissances solides sur les fractions et l'axe gradué qui étaient deux des points sur lesquels avaient porté les efforts dans l'enseignement. Les progrès sur l'ordre des décimaux peuvent correspondre à un entraînement sur ces questions.

Les résultats sont dans l'ensemble moins bons en CM2B qu'en CM2A. Nous avons déjà dit que l'enseignant de la deuxième classe attachait moins d'importance à l'évaluation ce qui peut expliquer le grand nombre de non réponse dans cette classe. De plus l'observation nous a montré que cet instituteur passait beaucoup de temps à laisser chercher ses élèves, parfois sur une consigne trop peu précise et que les bilans et l'institutionnalisation étaient donc raccourcis, ce qui conduit peut-être à une institutionnalisation stéréotypée et détachée du contexte, comme " $\frac{1}{3}$ c'est l'unité partagée en 3" qu'on a vu répété dans beaucoup de copies.

Nous reviendrons en fin de chapitre, après la description du volet en 6ème, sur l'évaluation de l'ensemble de l'expérience de l'année.

2. Observations en 6ème en 83-84

Nous relatons maintenant les observations réalisées dans la classe de 6ème pendant l'année scolaire 1983 - 1984. Nous avons déjà dit que les moyens d'observation étaient différents de ceux de l'école primaire. Nous avons suivi la classe une fois par semaine et enregistré le plus souvent les phases collectives. Cela nous permet cette fois d'analyser plus précisément quelques séquences pour illustrer les phénomènes didactiques que nous avons identifiés. Dans ce paragraphe, nous décrivons d'abord les conditions de l'expérimentation avant de faire une brève analyse des séquences observées. Nous essayons notamment de mettre en évidence quelques difficultés rencontrées dans la transmission de séquences didactiques et de proposer des hypothèses d'interprétation dont certaines sont liées spécifiquement à la population particulière de cette classe. Nous donnons ensuite les résultats d'entretiens individuels avec ces élèves en les comparant aux réponses d'autres élèves de 6ème sur le même problème et en les replaçant dans le contexte de l'enseignement reçu. Nous revenons également sur les résultats de ces élèves aux tests décrits dans le chapitre 2.

2.1. Conditions de l'expérimentation.

2.1.1. présentation de la classe. (données sociologiques)

Il s'agit d'une classe de 6ème d'un collège de la banlieue parisienne avec un nombre assez important d'enfants d'origine étrangère (28%), un fort pourcentage d'élèves ayant au moins un an de retard (72% en prenant comme référence l'année civile, 64% en considérant les élèves nés en novembre ou décembre avec ceux de l'année suivante). Nous avons le tableau suivant :

date de naissance	1-1-70 —> 31-10-70	1-11-70 —> 31-12-70	1-1-71 —> 31-10-71	1-11-71 —> 31-12-71	1972
Effectif	8	2	6	2	7
	2 ans de retard		1 an de retard		âge normal

Les élèves ont presque tous des parents ouvriers ou employés. Seul un élève a un père technicien et une mère secrétaire , un autre a un père agent de maîtrise et une mère secrétaire médicale. Cependant pour certains (électricien, plombier, mécanicien, teinturier) on ne sait pas s'il s'agit d'ouvriers ou d'artisans. Enfin, pour un des élèves arrivé en cours d'année, je n'ai pas de renseignement sur la famille (il fait en réalité partie de la classe d'initiation au français et ne vient dans cette classe que pour les cours de mathématiques).

D'autre part, 8 élèves sur 24 vivent avec un seul des deux parents, 6 avec la mère (dont un a un père décédé), 2 avec le père (dont un a une mère décédée et l'autre est retourné chez sa mère en cours d'année). Un seul des enfants qui vit avec la mère peut citer la profession du père.

La majorité des 24 élèves sont issus de familles nombreuses : 3 enfants uniques (vivant tous avec la mère seule), 4 familles de 2 enfants (dont 3 vivent avec un seul parent), 6 familles de 3 enfants (dont 1 vit avec la mère seule), 2 familles de 5 enfants (dont une avec père décédé), une famille de 7 enfants.

Par ailleurs, leurs ambitions sont modestes. A la question "que voulez-vous faire plus tard ?" la plupart répondent "aller en 5ème" , certains précisent "parce que j'ai déjà redoublé". Cependant, 18 mentionnent une profession : à part 2 qui veulent être électroniciens, 1 architecte, 2 vétérinaires, 1 puéricultrice, les autres indiquent des professions qui nécessitent peu d'études : mécanicien (4), nourrice (3), pompier, cuisinier, boucher, footballeur, coiffeuse.

Il nous faut ajouter qu'il y a eu tout au long de l'année dans cette classe des problèmes de discipline dans toutes les matières (plusieurs élèves ont été exclus pendant 3 jours) et il était difficile d'obtenir une ambiance de classe favorable au travail.

2.1.2 organisation de notre travail pour le premier trimestre

Il était convenu que je viendrais dans la classe une heure par semaine (le lundi matin). C'est ce qui s'est passé au cours du premier trimestre, j'enregistrais sur magnétophone le déroulement des phases collectives. Ma présence a été présentée aux élèves dans le cadre d'une expérience de liaison CM2 - 6ème. Cette séance était considérée par le professeur comme une séance de travaux dirigés dont le but était d'intéresser les élèves et de les faire travailler différemment sur des notions mal acquises (décimaux, aires). Le reste de la semaine, le professeur traitait le programme de 6ème et il n'y avait pas a priori de rapport entre la séance du lundi et les autres cours de mathématiques. Cela n'avait pas été décidé et n'a jamais été dit mais c'est ainsi que l'expérience a fonctionné pendant un trimestre.

Je rencontrais le professeur chaque semaine pendant une heure à l'extérieur de la classe pour préparer les séquences du lundi. Au cours de cette heure de travail en commun, nous abordions le contenu des séances : en fonction du résultat des séquences précédentes, nous choisissions les consignes à donner aux élèves, l'organisation de la classe, nous examinions les procédures attendues. Mais nous n'avions pas le temps d'aborder vraiment le problème de fond des hypothèses faites sur l'apprentissage qui guidaient le choix des séquences proposées, ni du changement que cela sous-entendait pour le rôle du professeur dans sa classe. Tous ces points étaient abordés plus ou moins explicitement à l'occasion du choix des séquences et des raisons de ces choix, mais pas discutés en tant que tels, ce qui fait que beaucoup sont restés implicites et qu'il était difficile pour le professeur de reprendre à son compte le rôle du maître qui était sous-entendu dans les séquences didactiques proposées.

2.1.3. choix des séquences didactiques.

Au début de la classe de 6 ème les élèves sont censés connaître le périmètre et l'aire d'un rectangle et les unités usuelles qui permettent de les mesurer, en particulier le cm et le cm^2. S'ils ne les connaissent pas bien ils en ont au moins entendu parler et on peut démarrer un travail qui permette de contrôler ces acquis tout en utilisant les nombres décimaux, les séquences ultérieures étant décidées en fonction des observations. Les problèmes faisant intervenir périmètre et aire de rectangles permettent de travailler à la fois sur le cadre géométrique et sur le cadre numérique et donnent lieu à des calculs sur les décimaux. Ils permettent donc de répondre à notre objectif de départ. Nous avions déjà expérimenté dans d'autres classes de CM et de 6ème un certain nombre de problèmes sur ce thème qui sont pour la plupart décrits dans la brochure n° 62 de l' IREM de PARIS VII : "liaison école - collège : nombres décimaux". Nous avons choisi de les utiliser aussi dans cette classe.

2.1.4. suite de l'expérimentation

Nous avons rencontré plusieurs difficultés dans la réalisation des séquences didactiques et arrêté l'expérience en classe à la fin du premier trimestre. Des entretiens individuels au cours du deuxième trimestre ont permis de poursuivre le deuxième objectif (repérer des difficultés spécifiques de ces élèves en les situant par rapport aux difficultés connues dans l'apprentissage des nombres décimaux et de la notion d'aire). Au troisième trimestre, nous avons repris avec les élèves des activités sur la mesure des aires (pavage avec des surfaces variées, unités d'aire diverses, puis unités légales, aire des surfaces usuelles : nous avons utilisé une partie des séquences décrites dans la brochure n° 48 de l' IREM de PARIS VII). Nous travaillions par demi-classes : nous disposions de deux salles voisines, le professeur prenait un des groupes et je prenais l'autre. Les séances se sont déroulées de façon assez satisfaisante, mais je n'en ai presque aucune trace à part quelques travaux d'élèves puisqu'il n'y avait pas d'observation. Nous ne parlerons pas ici de cette partie de l'expérimentation.

2.2. Description des séquences didactiques.

2.2.1. Préliminaires

Nous allons maintenant décrire les 8 séances qui ont eu lieu le lundi matin entre le 17 octobre et le 19 décembre 1983. Cette description a un double but. D'une part, il s'agit de voir quelles situations les élèves ont réellement rencontrées et d'analyser ensuite certaines réponses aux tests à la lumière de ces situations. D'autre part, nous allons essayer d'illustrer quelques difficultés que l'on peut rencontrer dans la transmission de séquences didactiques qui ont déjà été expérimentées dans d'autres classes. Commençons par préciser ce deuxième point.

Une première difficulté vient des contraintes institutionnelles : la plupart des séquences proposées avaient été expérimentées à l'école élémentaire. Au collège, les conditions sont très différentes : les séquences ne sont que de 55 minutes et plus difficiles à gérer si l'on veut que les élèves aient à la fois une phase de recherche d'un problème et une phase de bilan de l'activité. De plus, le professeur ne voit ses élèves que quatre fois une heure dans la semaine et il est plus difficile de mettre en place de nouvelles méthodes de travail dans ces conditions.

Une autre difficulté vient des habitudes de travail du professeur qui ne sont pas forcément celles que sous-entend l'expérimentateur. Disons tout de suite qu'il n'est pas question ici de critiquer le professeur de la classe en tant qu'individu mais de mettre en évidence certaines contraintes du système qui pouvaient entraver la communication entre l'enseignant et le chercheur. Le professeur dans sa classe a un souci d'efficacité immédiate : il veut que les élèves progressent sur les objectifs du programme et il lui est difficile d'accepter de faire un détour par des questions qui visent à donner du sens à certains concepts du programme, mais qui risquent de n'avoir un effet qu'à relativement long terme. Le professeur est pressé par le programme, par les collègues des classes voisines qui avancent plus vite, par les résultats qu'il espère obtenir : des exercices d'entraînement répétitifs ont souvent un meilleur effet à court terme que l'étude de situations où les concepts en jeu prennent du sens, et ceci est décevant pour les professeurs qui participent à des expériences de ce type. Ceci nous amène au problème de l'évaluation : on évalue rarement le réinvestissement des concepts dans des situations complexes différentes de celles de l'apprentissage, ou alors seulement de façon qualitative.

De plus, dans la gestion de la classe, l'enseignant a des décisions immédiates à prendre qui ne sont pas toujours évidentes quand les élèves ne réagissent pas comme on l'attendait, quand ils ne trouvent pas. Il est alors facile de faire dévier une situation : on veut obtenir le résultat prévu par n'importe quel moyen. Chaque enseignant a sans doute un jour ou l'autre été confronté à ce problème.

Remarquons encore que la transmission d'une situation didactique n'est pas facile : que les informations soient transmises sous forme orale, ce qui était le cas ici, ou sous forme écrite, il reste beaucoup d'implicites dans la description des situations, et chacun les interprète avec ses conceptions et ses habitudes de travail. Ceci est d'autant plus vrai quand, comme ici, c'est la pemière fois que deux personnes travaillent ensemble.

Nous décrivons de façon très inégale les séances observées : certaines ne le sont que dans le premier but et sont brièvement résumées. Pour d'autres, nous donnons des extraits de l'enregistrement et nous tentons une analyse un peu plus précise, notamment au niveau du décalage entre les attentes du professeur et celles de l'observateur didacticien.

2.2.2. Présentation rapide des 2 premières séances

Première séance (17/10)

Le professeur demande collectivement aux élèves de rappeler ce qu'est un rectangle. Les élèves ont du mal à donner une définition. Ils dessinent des rectangles (côtés horizontaux ou verticaux). L'un d'eux dessine un parallélogramme ce qui amène à préciser la différence entre rectangle et parallélogramme.

Le professeur demande aux élèves ce qu'est le périmètre. Les réponses sont variées : les unes font référence à l'objet géométrique "le tour", "les droites", "les limites", "ce qui entoure", "des traits", les autres font référence au calcul "on doit le calculer", "on fait une additon", "une multiplication" "une opération". Beaucoup de réponses révèlent des confusions aire - périmètre "ce qu'il y a à l'intérieur", "la longueur fois la largeur".

Le professeur dit que c'est un nombre et rappelle la formule pour le calculer : P = (a+b)x2 ; un élève remarque que a+b est le demi-périmètre, le professeur écrit p = a+b.

Le professeur demande ce qu'est l'aire. Un élève répond "ce qu'il y a à l'intérieur". Le professeur amène les élèves à dire que c'est un nombre et à rappeler la formule qui permet de calculer : A = axb .

Le professeur demande aux élèves de dessiner sur leur cahier un rectangle de 3 carreaux sur 5 carreaux, de calculer son pérmètre et son aire. Même question pour un rectangle de 4 carreaux 1/2 sur 6 carreaux 1/2.

Le problème se pose pour les élèves de distinguer entre les carreaux - longueur et les carreaux - aire : on parle de longueur de carreaux. Le problème de distinguer entre les carreaux - longueur et les centimètres se pose aussi : certains élèves ont pris la règle et mesuré. Le professeur fait quadriller les rectangles pour compter les carreaux et vérifier le calcul de l'aire : 4,5 x 6,5 = 29,25 = 29 + 1/4.

<u>Problème</u> : Trouver le plus possible de rectangles de périmètre 12.

Le professeur demande collectivement aux élèves ce qu'il faut connaître pour connaître le rectangle. Les élèves proposent la longueur et la largeur. Le professeur demande alors de présenter les résultats dans un tableau a | b | P | A | Des élèves remarquent alors tout de suite que le demi-périmètre est p = 6 et proposent de rajouter p dans le tableau.

Travail individuel de recherche pendant 1/4 heure environ.

Certains élèves ont du mal à démarrer, on note des difficultés pour calculer l'aire. Dans le bilan, les élèves constatent que les aires sont différentes et proposent de classer les rectangles suivant l'aire. Le professeur donne un travail à faire à la maison pour le jeudi : "trouver des rectangles de la famille avec a = 2,48 ; a = 4,09 ; a = 3,45 ; calculer leur périmètre et calculer leur aire".

Nous voyons ici que le professeur profite de cette situation pour faire calculer les élèves sur les nombres décimaux.

<u>*Entre les deux séances*</u>

- Nous avons eu une discussion avec le professeur sur la distinction entre grandeur et mesure : périmètre et mesure du périmètre avec une unité, aire et mesure de l'aire avec une unité. Dans le discours en classe, les deux ont été confondus, comme c'est le cas le plus souvent dans l'enseignement. Nous n'avions pas eu de discussion approfondie avec le professeur à ce sujet.

- Notre objectif étant plutôt de travailler sur les nombres, nous décidons de ne pas reprendre pour l'instant la notion d'aire avec les élèves, de rester au niveau des nombres et des formules, de garder les unités carreau-longueur et carreau-aire et de faire faire aux élèves des représentations graphiques du problème pour leur donner d'autres moyens de trouver des rectangles de la famille et de prévoir le sens de variation de l'aire.

<u>*Deuxième séance (24/10)*</u>

<u>Consigne</u> : Représenter graphiquement les rectangles de demi-périmètre 6. On prend sur chaque axe 2 carreaux pour représenter une unité. On porte une dimension sur chaque axe.

Les élèves ne rencontrent pas de problème pour placer les points à coordonnées entières, mais certains élèves ont des difficultés pour les demis : par exemple 3,5 est placé un demi carreau après 3.

Les élèves constatent l'alignement des points et, en séance collective, utilisent le graphique pour trouver b quand a est donné et réciproquement, ils vérifient par le calcul. Ils traduisent les calculs par les écritures b = 6-a ; a = 6-b et concluent qu'il y a plein de rectangles dans la famille, autant qu'on en veut. Cette conclusion a lieu au niveau collectif ; il n'est pas sûr que tous les élèves soient convaincus.

Le professeur demande ensuite de faire la représentation graphique des couples (a,A). Le problème de savoir ce que représente a se pose : au départ a désignait la longueur du rectangle ; au cours de l'activité précédente, a désignait une dimension qui était soit la longueur, soit la largeur : a et b jouent des rôles symétriques, les élèves ne cherchaient pas à savoir si la dimension donnée était une longueur ou une largeur. Au moment du calcul de l'aire la question s'est posée parce qu'on retrouvait des calculs qu'on avait déjà faits : au niveau collectif, les élèves ont conclu que si a désignait une dimension du rectangle, on trouvait deux fois chaque rectangle : une fois "en horizontal" où a est la longueur, une fois "en vertical" où a est la largeur. A aucun moment, les élèves n'ont énoncé que les longueurs étaient supérieures ou égales à 3 et les largeurs inférieures ou égales à 3.

2.2.3. Analyse de la 3ème séance.

a) <u>Prévisions avant la séance :</u>

- proposer aux élèves de rechercher dans la famille un rectangle d'aire 10 pour leur faire formuler que le carré a la plus grande aire.

- chercher dans la famille un rectangle d'aire 7 avec comme objectif d'utiliser les décimaux dans une situation d'approximation (voir analyse des problèmes proposés plus loin : § 2.3.2).

b) Déroulement (ou l'histoire d'un malentendu).

Au cours de la séance on n'abordera finalement que le premier point prévu.

A la demande du professeur, les élèves commencent par rappeler ce qui a été fait au cours des séances précédentes. On reprend le tableau de résultats et le professeur demande de les classer en rangeant les largeurs par ordre croissant, ce qui donne :

a	b	*A*
6	0	0
5,5	0,5	2,75
5	1	5
4,5	1,5	6,75
4	2	8
3,5	2,5	8,75
3,25	2,75	8,9375
3	3	9

Nous donnons ci-dessous, dans un paragraphe en retrait et en caractères plus petits, un large extrait de la bande magnétique qui montre comment s'installe le malentendu : les élèves ne comprennent pas ce qu'on attend d'eux, le professeur attend un certain type de formulation et d'argumentation alors que les élèves ne sont pas prêts à la donner maintenant : ils auraient besoin de faire des essais.

P désigne le professeur, E les élèves, E1, E2, E3 3 élèves qui interviennent souvent.

P On va essayer de se servir de ce qu'on a fait pour essayer de répondre à un problème. Pouvez-vous trouver un rectangle dont l'aire est de 10 ? toujours avec le demi-périmètre 6, on veut qu'il soit dans la liste du tableau.
P *Alors si je veux placer 10 dans mon tableau ?*
E On ne peut pas
P Vous ne pouvez pas placer 10 dans mon tableau ?
E Si, si. Brouhaha ......
P oui mais où ? *Puisqu'ils sont ordonnés .....*
E en brouhaha 4......
E1 On peut faire 5,5 brouhaha ça fait 10
E Il faut multiplier aussi
E2 On peut le trouver aussi ... 5 X 2
P *Je suis d'accord avec certains d'entre vous qui me disent qu'on ne peut pas le trouver mais ce que je voudrais c'est qu'on essaie d'argumenter, qu'on me dise pourquoi*
E1 3 et 2, 5 , 5 X 2 = 10
P c'est comme ça que vous calculez l'aire ?
E et le périmètre alors ?
E2 Madame on peut trouver 12, 4, 4 de chaque côté et 2, 6, fois 2, 12.
P C'est comme ça qu'on fait pour trouver l'aire ?
E3 Mais non, pour trouver l'aire, il faut multiplier a et b.
P Alors, ça ne vient pas fort les argumentations ..... Personne n'a aucune idée pour essayer d'expliquer où je vais placer ce 10 ?
E dans le tableau
E3 *On peut chercher à partir de 9*
P Je cherche un rectangle là dessus qui soit ... justement où je puisse écrire le nombre 10
E3 *Madame, on peut chercher à partir de 9. On a 3 X 3, 9 on peut chercher à partir de ça.*
P *Bon Alors où ce que je vais le placer ?*
E 3 et demi et 3 et demi
E3 3 et demi et 3 et demi ça fait pas 6 chez moi.
P *Vous n'avez pas vu comment étaient les aires ? Personne ne peut rien me dire sur la position de ces aires ?*
E3 Si ! le nombre sera plus petit parce qu'il y a 6 - 5 - 5,5 - 5 - 4,5 - 4 - 3 et 3 X 3, 9 donc pour avoir dix il faudrait un nombre plus petit
P *Donc il faut que j'écrive 10 ...*
E3 *en dessous de 3.*
P *en dessous de .....*
E *en dessous de 9.*
P *en dessous de 9 . D'accord ?*
P *Est-ce qu'il va y avoir des rectangles qui vont avoir une largeur qui correspond ?*
E3 *Ça sera plus petit que 3.*
P *Il faut donc que je continue à*
E4 *2,5 et 3,5. Brouhaha de 2,5 et 3,5*
P *Comment s'appelle b ?*
E *la largeur*
P *Pouvez-vous me dire s'il y a encore une largeur possible après 3 ?*
E *2,5.*
P *2,5 est déjà écrit, il est avant*
E *3,5*
P *Est-ce qu'il y a encore une largeur possible après 3 ?*
E1 *oui 3,5*
P *3,5 çà sera une largeur ?*
E *Non. Non, ça sera la longueur*
P *Alors est ce qu'il y a ....*
E 2 .

P *comment est-ce que vous avez classé les nombres b ?*
E *du plus petit au plus grand*
E2 *4,25*
P *Par ordre*
E *croissant*
P *par ordre croissant*
E2 *4,75 et 1,25*
E3 *si b est en ordre croissant et a en ordre décroissant, on peut continuer madame : 3,25*
P Celui-ci s'appelle largeur. Je voudrais ...
E2 1,25.
P le problème
E2 il faut trouver plus grand
E2 Madame, 4,75 ...
P Je rappelle, parmi tous ces rectangles, est-ce que je pourrais, dans la liste qui est donnée, trouver un rectangle qui a comme aire dix carreaux sachant que celui-ci en a 0, celui-ci en a 2,75, celui-ci en a 6,75, celui-ci 8, celui-ci 8,75, celui-ci 8,9375, 9 etc ... *et puis on est arrivé avec beaucoup de difficulté à dire que celui qui a dix carreaux, s'il existe, ne pourra être qu'après. Je pose maintenant la question, à savoir, : quelle sera sa longueur, c'est-à-dire, parmi tous ces rectangles là, est-ce qu'il y en a un possible, est-ce que je peux continuer, est-ce que je peux trouver une largeur encore plus grande que 3 ?*
E2 Madame 4,75
P pour que le périmètre soit 6, est-ce que je peux trouver une largeur plus grande que 3 ?
E Non
P Non ça ne sera jamais possible, je ne pourrai jamais trouver de largeur plus grande que 3, pourquoi ?
E Parce que 3 c'est maximum
P répète
P donc, à 3 maximum, va correspondre une longueur qui va être comment ?
E Pareil
P maximum aussi ? longueur ?
E Non
P Alors si c'est pas le maximum ?
P *On a vu que chaque fois que la largeur augmentait la longueur diminuait. Donc quand on a une position 3 ici qui est maximale, qui est le maximum possible pour la largeur .... .*
E Ah oui
P Après j'obtiens une longueur, qui devient plus grande : 3,25, ça va être une longueur, et nous l'avons écrit le 3,25 regardez ... .
P 3,5 c'est une ? longueur ou largeur ?
E une longueur
P 4 ?
E une longueur ?
P Alors le nombre 3 qui en tant que largeur est maximal, en tant que longueur, il est quoi ?
E Minimal
P il est minimal. *Ce cas là est intéressant, on ne peut pas descendre plus bas. On n'atteindra jamais ce 10. Alors on va le vérifier que 9 est l'aire maximale.*

Dans la suite de la séquence le professeur demande une argumentation géométrique :

A partir d'un carré de 3 carreaux sur 3 carreaux, le transformer en rectangle en gardant le demi-périmètre 6, et vérifier que l'aire devient forcément plus petite.

Les élèves le constatent à partir du rectangle de 2 carreaux sur 4 carreaux, mais on ne peut pas être sûr que cet exemple ait valeur générale.

A la fin, le professeur demande de ressortir les graphiques et fait observer qu'on avait déjà vu que l'aire était maximale pour le carré (3,3).

c) Commentaires - Rôle du maître et contrat didactique.

Il s'agit ici d'essayer de comprendre pourquoi la séance ne s'est pas déroulée comme prévu et pourquoi les élèves n'ont pas développé d'argumentation : en étaient-ils réellement incapables ou la situation didactique qui leur était proposée ne les incitait-elle pas à le faire ?

Tout au long de cette séance, il semble qu'il y ait un malentendu entre le professeur et les élèves.

Le professeur attend une certaine argumentation et une certaine formulation (le tableau étant rangé dans l'ordre croissant pour les aires, 10 devrait se placer en-dessous de 9, les largeurs sont aussi en ordre croissant, on aurait une largeur plus grande que 3, ce n'est pas possible parce qu'alors la longueur serait plus petite que la largeur).

Beaucoup d'élèves ne comprennent pas ce qu'on attend d'eux et aucun ne peut fournir tout de suite la formulation attendue. Ils essaient de réagir à des indicateurs n'ayant aucun rapport avec le problème, comme au début : après la première question, un élève répond "on ne peut pas", le professeur reprend sur un ton interrogatif "vous ne pouvez pas placer 10 dans le tableau ?" A ce moment les élèves en chœur répondent "Si, Si !" et certains essaient de trouver 10 autrement (avec un périmètre), ce qui amène le professeur à faire une rectification : "je suis d'accord avec certains d'entre vous qui me disent qu'on ne peut pas le trouver ....".

Le professeur continue à donner des indications dans le même sens :

"puisqu'ils sont ordonnés ..."

"où je vais placer le nombre 10"

"où je puisse écrire le nombre 10"

"où je vais le placer ..."

Aucune de ces indications n'est reprise par les élèves.

Pendant ce temps E3 continue à chercher, elle a probablement remarqué le sens de variation et propose de partir de 9. Cette proposition semble ne pas être entendue mais le professeur modifie sa question :

"Comment étaient les aires ..."

"Personne ne peut rien dire sur la position de ces aires ...."

Cette question entre enfin dans la problématique de E3 et elle réagit et formule d'une certaine manière la variation de l'aire en fonction de la longueur ..." pour 10 il faudrait un nombre plus petit (pour la longueur)".

Le professeur revient à la position de 10 dans le tableau.

Cette fois un certain nombre d'élèves ont compris ce qu'elle attendait et proposent de l'écrire en dessous de 9.

C'est alors que le blocage reprend à cause de la formulation attendue :

E3 veut diminuer la longueur, elle veut bien, si on lui impose de s'intéresser à la largeur, augmenter la largeur. Si on la laisse expérimenter elle s'apercevra probablement après un ou deux essais que l'aire diminue à nouveau et qu'on va retrouver les mêmes rectangles.

Mais comme on a formulé que a est une longueur et b une largeur, le professeur ne veut pas laisser faire cette expérience et fait dire aux élèves qu'en augmentant encore la largeur, ça deviendra une longueur.

Dans la représentation graphique, les élèves avaient déjà rencontré ce problème de longueur et largeur : a et b jouaient alternativement le rôle de longueur et largeur.

Pour ne pas écrire les rectangles deux fois, et pour ranger le tableau, on avait décidé que a désignait une longueur et b une largeur. Cette décision qui était productrice au moment de repérer le sens de variation devient néfaste au moment de repérer le maximum : il faut pouvoir aller des deux côtés pour voir qu'en (3,3) on a un maximum.

On voit fonctionner dans cette séquence un des principes traditionnels du rôle de l'enseignant : on ne peut pas laisser des erreurs non corrigées, en même temps qu'un autre principe qui est, lui, plutôt lié à ce qui est actuellement valorisé dans la noosphère : il faut que les élèves trouvent et le montrent. Le professeur ne peut alors pas dire lui-même "je mets le 10 à la fin du tableau" même si les élèves auraient peut-être alors été capables d'expliquer que c'est parce que cela correspond à une aire plus grande.

Notons aussi quelques effets néfastes de la présence du didacticien :

- il est vu par le professeur comme un représentant de la noosphère, ce qui peut amener le professeur à se conformer à l'attente qu'il suppose

- dans la négociation avec l'enseignant de séances à proposer aux élèves, le didacticien est amené, pour convaincre l'enseignant du fait que les élèves de ce niveau peuvent traiter le problème, à donner des procédures ou des raisonnements possibles parce que déjà observés. L'enseignant a alors tendance à vouloir faire apparaître dans sa classe les mêmes procédures ou les mêmes raisonnements. C'est par exemple ce qui se passe à propos de l'argument géométrique qui permet de dire qu'un carré a une aire plus grande qu'un rectangle de même périmètre.

Dans un contrat classique d'enseignement, le professeur apporte de l'information aux élèves qui écoutent et dans les exercices, ils doivent pouvoir répondre tout de suite suivant la formulation attendue puisqu'elle leur a déjà été fournie : il s'agit de reconnaître quelque chose à appliquer, quelque chose qu'ils sont censés savoir.

Dans un enseignement fondé sur des hypothèses constructivistes et introduisant les concepts par leur aspect outil, tel que l'a modélisé R. Douady dans la dialectique outil-objet, au cours de la phase de recherche et de premier bilan, le contrat entre le professeur et les élèves ne peut pas être le même : les élèves ont à rechercher quelque chose qu'ils ne sont pas censés savoir d'avance ; il est nécessaire que le professeur écoute les interventions des élèves, intervienne pour recentrer le débat ou relancer la recherche, mais il est dangereux d'imposer une formulation à ce moment là : il faut laisser se développer la recherche des élèves.

Si, dans un souci de gagner du temps, le professeur exige trop sur la formulation au cours de la phase de recherche, l'initiative des élèves peut se bloquer et c'est lui qui sera amené à apporter toute l'information, la seule issue est alors de rejoindre le contrat classique.

C'est ce qui se passe ici. Il n'y a pas de recherche des élèves et c'est le professeur qui formule toutes les informations décisives. "Ce ne sera jamais possible, je ne pourrai jamais trouver de largeur plus grande que 3" "On ne peut pas descendre plus bas, on n'atteindra jamais ce 10".

Une phase de travail individuel dès le début aurait permis aux élèves de faire quelques expériences et peut-être de trouver des arguments.

Par ailleurs, il faut remarquer que les élèves ne mobilisent pas d'eux-mêmes les représentations graphiques qu'ils ont faites au cours de la séance précédente. Ce sont les premières représentations graphiques faites dans cette classe et ce n'est pas un cadre familier pour les élèves.

En les sollicitant dès le début de la séance, dans un inventaire de tout ce qu'on avait déjà fait au sujet des rectangles de demi-périmètre 6, on aurait peut-être donné aux élèves un moyen supplémentaire d'argumenter en créant un jeu de cadres entre le tableau de nombres et le graphique.

A la fin de la séance, ce jeu de cadres ne peut plus avoir lieu, on vérifie un résultat sur le graphique.

2.2.4. La quatrième séance.

A la suite des séquences précédentes, il était clair que, pour beaucoup d'enfants, les calculs sur les aires n'étaient reliés à aucun signifié quant à la notion d'aire. Nous avions décidé d'aborder cette question au cours des séances suivantes.

a) <u>Prévisions pour la 4ème séance</u>

Il était prévu que les élèves travaillent par deux. Les deux membres d'une même équipe devaient disposer de 2 rectangles découpés dans du carton et de 2 rectangles témoins dessinés sur le cahier, ces 4 rectangles étant superposables. Ils devaient découper ces rectangles en 5 à 8 morceaux à bords droits et recoller les morceaux sur une feuille de façon à avoir une surface différente du rectangle mais de même aire. Les surfaces de 2 équipiers devaient être différentes. Chacun devait ensuite commander de la ficelle pour border sa surface.

Dans un deuxième temps, les élèves devaient comparer toutes les surfaces de la classe du point de vue de l'aire et du périmètre. Les rectangles de départ avaient été choisis de façon que 2 équipes différentes aient des rectangles de dimensions différentes mais nous nous étions arrangés pour que chaque équipe soit couplée avec une autre qui travaille sur des rectangles non superposables mais de même aire. (Ceci n'était pas dit aux élèves). Les dimensions choisies étaient les suivantes :

14 cm sur 10 cm, 13 cm sur 11 cm, 12 cm sur 9 cm, 10 cm sur 11cm, 9,5 cm sur 11,5 cm, 8 cm sur 12 cm, 5 cm sur 22 cm, 6 cm sur 18 cm, 7 cm sur 20 cm, 19 cm sur 5,75 cm, 6 cm sur 16 cm, 6,5 cm sur 22 cm.

Ainsi les rectangles de même aire avaient tous été obtenus en divisant une dimension par 2 et en multipliant l'autre par 2.

L'objectif du travail était que les élèves trouvent et formulent que :

- pour que la surface fabriquée ait la même aire que le rectangle témoin il faut recoller les morceaux sans en perdre et sans chevauchement.
- des surfaces peuvent avoir même aire sans avoir même périmètre.
- pour comparer les aires de toutes les surfaces, il suffit de comparer les aires des rectangles.

Cette dernière question permettait de déboucher sur une nouvelle activité : comment comparer l'aire des rectangles ?

Dans l'esprit de l'expérimentateur, la consigne devait donc être donnée de la façon suivante :

- Dessiner le rectangle sur le cahier
- Découper le rectangle de mêmes dimensions
- Découper le rectangle en 5 à 8 morceaux
- Recoller les morceaux de façon à avoir une surface différente du rectangle mais de même aire
- Commander la ficelle
- Comparer toutes les surfaces de la classe
  - . du point de vue de l'aire
  - . du point de vue du périmètre

C'est seulement dans cette phase que le problème de la comparaison des aires des rectangles devait se poser, et comme un outil pour répondre à un autre problème: la comparaison des aires de toutes les surfaces fabriquées.

b) <u>déroulement</u> (ou comment, en voulant gagner du temps, on en perd).

Nous reproduisons ci-dessous un extrait de bande magnétique où l'on voit que la consigne prévue va être transformée par une intervention du professeur qui replace les élèves sur le terrain du calcul. Au moment où les élèves ont dessiné, découpé leurs rectangles et vérifié que les 4 rectangles d'une équipe sont superposables, le professeur reprend la parole :

P Par rapport à leur aire ..., qu'est-ce que vous pouvez me dire de l'aire de ces 4 rectangles ?
E C'est les mêmes
P C'est les mêmes. On va donc dans un premier temps calculer cette aire.
Qui est-ce qui peut me rappeler quelle est l'opération qu'il faut que vous fassiez pour calculer l'aire de ces rectangles.
E On multiplie a fois b
P On multiplie a par b. Sur vos cahiers, vous allez tous, avec les dimensions que vous avez, mettre le résultat du produit, on l'appellera aire et on l'écrit avec quelle lettre ?
E A. Un grand A
P Vous allez calculer l'aire en multipliant a par b. Quelle va être l'unité que vous allez trouver.
E Cm
P Des cm en aire ?
E Des m,... des carreaux, ...des dm (ensemble)
P Qu'est ce qu'on a comme unité ?
E des cm
P non, quand on multiplie des cm par des cm
E des dm, ... des cm^2
P des cm^2 ... oui ... vous trouverez un certain nombre de cm^2 , vous me donnez donc le résultat de l'aire que vous avez.

Pendant la suite de la séance les élèves découpent le rectangle et recollent les morceaux. On précise que pour garder la même aire il ne faut pas faire chevaucher les morceaux.

c) commentaires

Les enfants calculent et annoncent l'aire de leur rectangle.

Il est clair qu'après cet échange et l'affichage au tableau de toutes les mesures des aires des rectangles, on est revenu dans le domaine des nombres, l'aire est un nombre même si on a fait préciser l'unité qui n'a manifestement aucune signification pour les enfants.

Nous assistons ici à un conflit de points de vue au sujet de l'aire entre le professeur et le didacticien. Il est clair que nous n'avions pas convaincu le professeur de l'intérêt du travail sur l'aire sans mesure et de la dissociation de l'aire en tant que grandeur de sa mesure. A l'époque, nous venions d'achever la phase expérimentale du travail exposé dans la première partie de cette thèse et nous n'avions pas encore formulé toutes nos hypothèses d'explication des difficultés des élèves à ce sujet. Nous avions pu voir que, pour le professeur, l'aire était un nombre, conformément à la philosophie des programmes des années 70. Si on n'est pas convaincu de l'importance d'aborder l'aire d'un autre point de vue, une séance passée à découper et à recoller des morceaux de carton peut paraitre du temps perdu. Ici le professeur a sans doute voulu ne pas perdre l'occasion de faire calculer les élèves.

Mais, par rapport à l'objectif visé par le didacticien, c'est plutôt le calcul des aires des rectangles en cm^2 qui est du temps perdu : les élèves ont déjà fait ce travail au cours des séances précédentes et on avait pu constater qu'en effectuant le produit des dimensions les élèves ne savaient pas quelle grandeur ils étaient en train de mesurer ni ce que pouvait être une unité pour mesurer cette grandeur. A part un entrainement numérique, le calcul proposé ne feur fera certainement faire aucun progrès conceptuel dans l'approche de la notion d'aire. Il risque au contraire de leur cacher l'invariant dans la transformation qui leur est proposée : comment calculer avec la nouvelle surface ?

Des discussions menées avant l'expérimentation avec les professeurs de collège, il ressortait d'ailleurs que l'aire était une partie du programme à laquelle on ne consacrait que quelques séances en fin d'année : comptage de carreaux sur quadrillage et utilisation de formules.

2.2.5. Les deux séances suivantes

La cinquième séance est une reprise orale de la quatrième avec bilan sur un certain nombre de points :

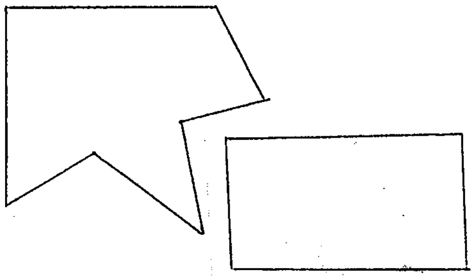
- des rectangles peuvent avoir des dimensions différentes et la même aire
- des rectangles peuvent avoir le même périmètre et pas le même aire (après calcul des périmètres).
- pour garder la même aire, on ne doit pas superposer deux morceaux en recollant : le morceau devrait compter deux fois.
- les surfaces ont été classées de la plus petite aire à la plus grande en se servant de l'aire des rectangles.
- l'aire peut être plus grande et le périmètre plus petit.
- l'aire peut être plus petite et le périmètre plus grand

Les élèves doivent chercher chez eux le périmètre de la surface fabriquée. (Ils n'avaient pas eu le temps de le faire au cours de la première séance).

- *Pour la sixième séance,* on propose aux élèves, à partir d'une surface donnée d'en fabriquer une autre d'aire plus petite et de périmètre plus grand, et une d'aire plus grande et de périmètre plus petit (Cf. feuille polycopiée ci-dessous).

D'autres questions suivaient sur le rectangle.

Peu d'élèves ont abordé la deuxième partie en classe.

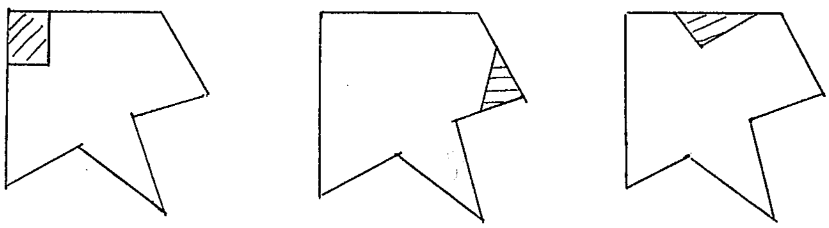


1°) Comment faire pour diminuer l'aire et augmenter le périmètre de la surface dessinée? (en rouge)
2°) Comment faire pour augmenter l'aire et diminuer le périmètre ? (en vert)

II

1) Faire un autre rectangle de même périmètre et d'aire plus grande
2) Faire un autre rectangle de même périmètre et d'aire plus petite.
3) Faire un autre rectangle de même aire et de périmètre plus grand
4) Faire un autre rectangle de même aire et de périmètre plus petit
5) Faire un autre rectangle d'aire plus petite et de périmètre plus grand
6)Faire un autre rectangle d'aire plus grande et de périmètre plus petit.

Pour la première partie, la donnée prise en compte en premier lieu par les élèves est celle qui concerne l'aire. Diminuer l'aire se traduit par deux procédures : soit enlever un morceau, soit dessiner une surface à l'intérieur de la surface donnée. Un élève a enlevé un morceau au milieu. Les autres ont protesté en disant que ça ne pouvait pas changer le périmètre si c'était au milieu.
Les autres élèves ont enlevé un morceau sur le bord, certains en gardant le périmètre constant, d'autres en le diminuant, d'autres en l'augmentant :



conservation du périmètre — diminution — augmentation
(On enlève le morceau hachuré)

Les élèves qui ont adopté cette procédure ont facilement rectifié si besoin était pour augmenter le périmètre.

Les élèves qui ont dessiné une surface à l'intérieur avaient un périmètre plus petit. Un des élèves de ce groupe a proposé de rajouter du périmètre en faisant une deuxième bordure. Le résultat final n'est pas clair : on ne sait pas trop si la surface devient la surface hachurée, ou au contraire s'il a enlevé la partie hachurée. FIG. 0

Pour la deuxième question, les élèves qui avaient enlevé un morceau en ont rajouté un cette fois, par exemple (fig.1). Ceux qui avaient travaillé au voisinage de l'angle droit ont eu des problèmes cette fois : en ajoutant ce morceau, on augmente à la fois l'aire et le périmètre (fig.2). Ceux qui voulaient dessiner une surface englobant la surface donnée en suivant le bord ont été bloqués (fig. 3) : En augmentant l'aire, on augmente aussi le périmètre.

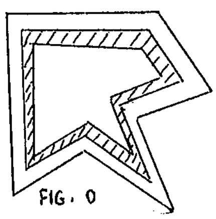


FIG. 0

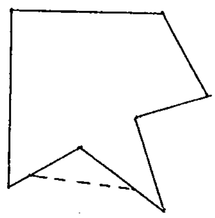


Fig. 1.

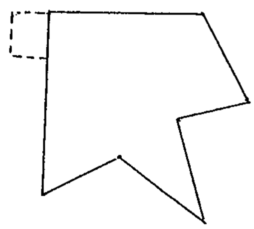


Fig. 2.

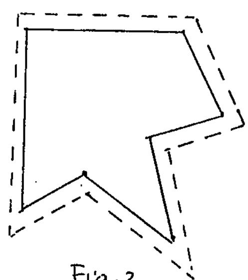


Fig. 3.

2.2.6. Les deux dernières séances du trimestre

Les deux dernières séances du trimestre ont été conçues après le passage du test analysé au chapitre 2. Elles ont été consacrées à l'introduction d'écriture fractionnaires dans le cadre de la mesure des longueurs : 1/2, 1/4, 1/8.. dans le but de donner un sens aux dixièmes. Elles n'ont pas été enregistrées.

Septième séance :

Chaque élève trace un segment sur une feuille de papier blanc. Les règles sont rangées, on n'a plus droit de s'en servir.

On distribue à chacun un petit rectangle de papier de couleur. Ces petits rectangles ont tous la même longueur (mais des largeurs différentes). Chaque élève doit envoyer un message à un camarade pour que le récepteur dessine un segment de même longueur que celui de l'émetteur.

Les élèves ont plié en deux, en quatre, en huit.

Les écritures $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ sont introduites par le professeur.

Huitième séance :

La huitième séance est un bilan de la septième séance avec institutionnalisation des écritures $\frac{1}{2}$u, $\frac{1}{4}$u, $\frac{1}{8}$u à partir des pliages de bandes et de dessins au tableau. Au cours du bilan, les élèves ont proposé des écritures équivalentes de certaines fractions (par exemple $\frac{1}{2}u = \frac{2}{4}u = \frac{4}{8}u$). Le professeur leur a ensuite proposé la feuille polycopiée ci-dessous :

1) Donner des écritures équivalentes à

a) $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u =$ $\quad 2 \times \frac{1}{2} =$

$\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u =$ $\quad 2 \times \frac{1}{4} =$ $\quad 4 \times \frac{1}{4} =$

$\frac{1}{8}u + \frac{1}{8}u =$ $\quad 2 \times \frac{1}{8} =$ $\quad 4 \times \frac{1}{8} =$ $\quad 8 \times \frac{1}{8} =$

b) Ecrire sous forme de sommes

$\frac{3}{4}u =$

$\frac{5}{8}u =$

c) Comment écrire ?

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}u =$ $\quad \frac{1}{2}$ de $\frac{1}{8}u =$

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}u =$ $\quad \frac{1}{2}$ de $\frac{1}{16}u =$

d) Ecrire le plus possible d'écritures égales à

$\frac{2}{4} =$ $\quad \frac{2}{8} =$ $\quad \frac{10}{16} =$

2)Sur un segment [A,B] de 10 c.

a) Placer $\frac{1}{10} = 0{,}1$ $\quad \frac{5}{10} = 0{,}5$ $\quad \frac{7}{10} = 0{,}7$

b) Placer $\frac{1}{100} = 0{,}01$; $\quad \frac{3}{100} = 0{,}03$ $\quad \frac{54}{100} = 0{,}54$

$\frac{75}{100} = 0{,}75$ $\quad \frac{97}{100} = 0{,}97$

c) Compléter

$\frac{}{10} < \frac{3}{100} < \frac{}{10}$ $\quad \frac{}{10} < \frac{54}{100} < \frac{}{10}$

$< 0{,}03 <$ $\quad < 0{,}54 <$

$\frac{}{10} < \frac{75}{100} < \frac{}{10}$ $\quad \frac{}{10} < \frac{97}{100} < \frac{}{10}$

$< 0{,}75 <$ $\quad < 0{,}97 <$

Les élèves disposaient des bandes de papier et pouvaient recourir à la manipulation. Dans la deuxième partie on suggère le transfert aux dixièmes et aux nombres décimaux sans que le problème du sens ait été posé. Les élèves avaient déjà placé des nombres décimaux sur une graduation au début du trimestre. Ici l'unité a été choisie facile ce qui fait que les élèves peuvent réussir le travail demandé, au moins pour les dixièmes sans qu'on soit sûr qu'ils aient une bonne conception des nombres décimaux. Nous n'avons pas les travaux des élèves relatifs à cette séance et ne pouvons donc mener plus avant l'analyse.

2.2.7. Quelques hypothèses d'explication

Ces séances apparaissent décousues et semblent ne pas se référer à un projet cohérent et global de l'enseignement dans la classe. Pour le professeur, il s'agissait de séances de travaux dirigés où on laissait de la place à l'activité des élèves et qui étaient destinées à leur donner des motivations de travail. Pour les élèves, c'était un moment où l'on travaillait différemment et ils étaient le plus souvent assez contents. Cependant l'effet de ces séances sur les connaissances mathématiques des élèves pose problème. Ils réinvestissaient apparemment peu d'une séquence sur l'autre. La comparaison des réponses des élèves aux tests entre décembre 83 et mai 84 montre qu'ils n'ont pas beaucoup progressé sur l'ordre des décimaux ; en tous cas, ils ne maîtrisent pas du tout le placement de décimaux sur une graduation. Les entretiens individuels du second trimestre montrent que les difficultés sur la notion d'aire restaient à ce moment là très importantes. On n'a pas pu travailler suffisamment longtemps sur les notions concernées pour espérer faire évoluer durablement les conceptions des élèves.

Finalement, comme il semblait impossible d'intégrer l'activité des élèves à l'ensemble de l'enseignement des mathématiques de la classe de façon à appuyer le cours sur cette activité, ces séances nous ont paru consommer du temps de façon inefficace, et nous avons arrêté l'expérience à la fin du trimestre.

Outre les contraintes institutionnelles au collège qui rendent plus difficile la gestion de la classe, nous pouvons avancer plusieurs hypothèses pour expliquer les difficultés rencontrées.

La première hypothèse concerne **le manque de temps** à plusieurs niveaux :

* manque de temps de travail entre l'expérimentateur et le professeur pour que celui-ci reprenne à son compte les objectifs de l'expérience et les méthodes proposées.

* manque de temps de travail avec les élèves pour obtenir une évolution des conceptions des élèves à propos de notions qui se construisent sur une longue période.

* la durée de l'expérience a été trop courte pour que les méthodes de travail du professeur et des élèves évoluent et qu'un nouveau contrat didactique puisse se mettre en place dans la classe.

La deuxième hypothèse porte sur l'existence de trop d'**implicites** entre le professeur et l'expérimentateur au sujet des objectifs de l'expérience et surtout des méthodes pédagogiques à utiliser, de l'attitude à avoir avec les élèves compte-tenu des objectifs didactiques et de la population particulière. Ces implicites ont eu pour conséquence à la fois :

* un manque d'institutionnalisation : les résultats établis ne sont pas toujours repris, décontextualisés et réinvestis dans d'autres problèmes, ou au contraire une institutionnalisation trop précoce, faite par le professeur et insuffisamment assise sur l'activité des élèves.

* parfois une gestion "dirigiste" de la classe à un moment inopportun : dès que le problème est posé, on veut amorcer la résolution de façon collective pour aider les élèves, parce qu'on a peur qu'ils ne démarrent pas ; ce faisant, on induit une formulation qui correspond à une certaine résolution du problème.

* parfois un changement complet de nature du problème, nous en avons analysé un exemple dans la 4ème séquence.

Nous avons vu dans les 3ème et 4ème séances comment se manifestaient des conflits de conceptions entre le professeur et le didacticien, à travers les perturbations amenées par le didacticien dans le fonctionnement didactique habituel. Nous reviendrons plus précisément sur cette question dans le chapitre 6.

La troisième hypothèse est le **manque d'intégration** de l'expérience dans l'ensemble du travail de la classe, ce qui a eu plusieurs effets :

* difficulté d'interaction entre le travail fait au cours de l'expérience et le reste du travail en mathématiques.

* défaut d'institutionnalisation déjà signalé.

* difficulté à établir avec les élèves un nouveau contrat didactique, différent de celui qui fonctionnait avec le même professeur le reste de la semaine

La quatrième hypothèse est liée à la **population particulière :**

* Il est peut-être plus difficile de mettre en place avec ces élèves un contrat didactique compatible avec un enseignement du type de celui que R. Douady modélise par la "dialectique outil objet", du fait des attentes vis à vis

de l'école et de la représentation sociale du rôle du maître qu'ils peuvent avoir : le maître enseigne, l'élève apprend ; les activités de recherche ne font pas vraiment partie du travail scolaire et n'ont pas à être retenues. Ceci est renforcé par le fait que le professeur fait moins confiance aux élèves et a plus tendance à les "aider".
Il faut ajouter que les problèmes de discipline propres à cette classe ont gêné la liaison entre activité et institutionnalisation : il est difficile de mener des débats avec des élèves qui ont beaucoup de mal à maintenir leur attention.

* Il existe peut-être un seuil en deçà duquel on ne peut pas mettre en place des jeux de cadres : pour que le jeu de cadres puisse se développer, il est nécessaire que les élèves aient un minimum de connaissances dans chacun des cadres en jeu ; par exemple on ne peut pas espérer un jeu de cadres avec les représentations graphiques sans un minimum de familiarité avec les représentations graphiques.

2.3. Les entretiens

Les entretiens avaient un double objectif :

- D'une part, il s'agissait de tester l'utilisation par les élèves des nombres décimaux dans une situation d'approximation : en particulier, il s'agissait de voir s'ils utilisaient correctement l'ordre des décimaux, quels critères de choix des nombres ils employaient pour leurs essais et comment ils plaçaient des nombres décimaux sur une graduation. On voulait également tester éventuellement leurs conceptions sur la mesure de l'aire de rectangles. Bref, il s'agissait de tester les concepts que l'on voulait mettre en jeu dans les situations proposées au cours du premier trimestre.
- On avait d'autre part un objectif d'apprentissage : comme il s'est avéré assez difficile de laisser se développer la recherche et l'argumentation des élèves dans cette classe, on espérait pouvoir proposer une situation qui le permette en prenant les élèves en très petit groupe (deux).

2.3.1 Conditions de passation et choix des problèmes

Les élèves ont été interrogés par deux, sauf les trois derniers qui l'ont été ensemble ; un élève a été interrogé deux fois. Comme nous l'avons déjà indiqué, nous visions non seulement une évaluation des élèves mais surtout un apprentissage, c'est pourquoi nous avons interrogé les élèves par deux, espérant ainsi une collaboration et éventuellement un conflit de conceptions. Autant que possible, nous avions constitué les binômes de façon qu'il n'y ait pas un décalage trop grand entre les deux élèves et en particulier qu'il n'y en ait pas un qui domine l'autre. Les entretiens duraient environ cinquante minutes (contrainte horaire du collège).

Dans tous les problèmes, il s'agissait de rechercher un nombre par approximations dans les décimaux.
Dans certains cas, le problème était posé dans le cadre géométrique et faisait intervenir la notion d'aire : par exemple "Peut-on trouver un rectangle de demi-périmètre 18 cm et d'aire 75 cm^2 ?". Dans d'autres cas, il était posé directement dans le cadre numérique : par exemple "Trouver deux nombres dont la somme est 30 et le produit 180". Les valeurs numériques étaient différentes à chaque fois mais choisies de telle façon qu'on ait deux solutions irrationnelles. Quelle que soit la formulation donnée au départ, pour ces problèmes où intervenaient deux variables, on demandait aux élèves - dans le cas où ils ne le faisaient pas d'eux-mêmes - de garder la somme constante (ou le demi-périmètre constant).

La plupart des groupes ont eu un problème où intervenaient deux variables (cf exemples ci-dessus). Trois groupes ont eu un problème à une seule variable. Pour deux des groupes, le problème était posé dans le cadre géométrique : "Trouver un carré d'aire 20 cm^2". Pour le troisième groupe, le problème était posé dans le cadre numérique et un peu différent : deviner un nombre entier puis décimal en moins de dix questions.

Ces problèmes ont également été choisis parce que nous les avions déjà utilisés avec R. Douady, aussi bien en classe qu'en entretien individuel pour des élèves de CM2 et de 6ème.

A certains groupes d'élèves (suivant le temps disponible), on a proposé de faire une représentation graphique (représentation cartésienne) ou de placer les nombres en jeu sur un axe gradué. Nous fournissions à tous les élèves du papier quadrillé à petits carreaux du commerce (0,5 cm de côté).

2.3.2. Analyse rapide des problèmes proposés.

La répartition des problèmes a été la suivante :

	Cadre géométrique	Cadre numérique
2 variables	E1-E2-E5-E10-E11-E18-E19-E20-E22	E3-E6-E7-E8-E12-E14-E17-E24
1 variable	E4-E15-E16-E21-E25	E9-E23

Les élèves sont numérotés de 1 à 25. L'élève E13 n'était plus dans la classe.

a) Les élèves E9 et E23 ont eu à deviner un nombre entier compris entre 100 et 1000 en moins de dix questions . Chacune a joué contre l'autre. Je leur ai demandé de faire une représentation graphique sur papier à petits carreaux en prenant 40 carreaux de 0 à 1000. Elles ont ensuite joué ensemble contre moi dans les conditions suivantes : je n'avais pas choisi de nombre et je répondais de la façon la plus défavorable. On a repris le même jeu dans les mêmes conditions avec un nombre décimal compris entre 2 et 3 ; il s'agissait alors pour les élèves de situer le mieux possible le nombre en dix questions. Sur le graphique, 40 carreaux représentaient maintenant une unité (entre 2 et 3). Pour un tel jeu, la procédure économique est de couper l'intervalle d'incertitude en deux ; la représentation graphique devait aider les élèves dans leurs choix.

b) Pour le problème de recherche d'un carré d'aire donnée, les élèves ont à traduire le problème dans le cadre numérique en la recherche d'un nombre x tel que x.x = 20 (par exemple). Ils peuvent chercher x par approximations en utilisant la croissance de la fonction x ——> x.x . Le problème fait intervenir une fonction à une variable ; de plus, cette fonction est croissante : c'est le cas le plus favorable pour un problème d'approximation et nous pouvons attendre que les élèves utilisent la croissance de cette fonction pour approcher la solution. L'existence d'une solution exacte est une autre question qui ne peut être tranchée à ce niveau ni surtout dans le cadre de cet entretien : les élèves ne connaissent pas les racines carrées, ne peuvent savoir si ce sont des nombres décimaux ou non, ni inventer la construction géométrique du carré cherché.

c) La recherche d'un rectangle d'aire et demi-périmètre donnés ou de 2 nombres dont on connaît la somme et le produit est un problème faisant intervenir deux équations à deux inconnues : a+b = p

a.b = A

Le problème mathématique peut se ramener à la résolution d'une équation du second degré à deux inconnues : $x^2 - px + A = 0$ et donc à regarder le signe du discriminant $p^2 - 4A$. Ce n'est évidemment pas ce que nous attendons des élèves interrogés. Pour eux, il y a effectivement deux conditions à réaliser. Ils peuvent, sans se préoccuper du problème d'existence, essayer d'exhiber des solutions aussi bonnes que possible et, éventuellement, se poser le problème d'existence à cette occasion.

Implicitement, le problème met en jeu deux fonctions : (a,b) ——> a+b et (a,b) ——> a.b . En fait, résoudre l'équation a+b = p (respectivement a.b = A) revient à chercher les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction (a,b) ——> a+b prend la valeur p (resp. la fonction (a,b) ——> a.b prend la valeur A). Ce faisant, a et b ne jouent plus un rôle d'inconnues mais un rôle de variables, ce qui permet de leur donner différentes valeurs et de chercher parmi celles–là s'il y en a qui réalisent les deux conditions.

Ici, nous avons choisi p et A de façon que les solutions existent et soient irrationnelles : les élèves ne peuvent trouver de solution exacte mais ils peuvent trouver des solutions approchées avec une précision arbitraire. Tout le problème réside dans le choix des valeurs de a et b à essayer.

En prenant a et b au hasard, on n'a aucune chance d'aboutir (sauf si, implicitement ou non, on se limite aux entiers ou à certains décimaux : demis, dixièmes...). Il faut trouver des raisons de choisir certains couples (a,b) plutôt que d'autres, donc trouver des critères permettant de savoir quand un couple est "meilleur" qu'un autre en un sens qu'il s'agit de préciser :

+ si l'on fixe a+b = p, on peut calculer $d_1 = |A - a.b|$ et décider qu'un couple (a,b) est d'autant meilleur que d_1 est petit.

+ si l'on fixe a.b = A, on peut décider que le couple (a,b) est d'autant meilleur que $d_2 = |p - (a+b)|$ est petit.

+ si on laisse varier a+b et a.b, pour décider si un couple est meilleur qu'un autre il faut définir une distance à l'aide de $|p - (a+b)|$ et $|A - a.b|$.

Le troisième cas est difficile à gérer et nous pouvons prévoir que les enfants qui s'y engageraient rencontreraient des difficultés : nous ne les laisserons pas s'engager dans cette voie au cours de ces entretiens.

Dans les deux autres cas, la question devient : comment améliorer le choix de (a,b).

Si nous regardons les relations qui relient A, p et a - b, nous avons :

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\ a.b$ soit

$p^2 - (a-b)^2 = 4\ A$ ou $p^2 = 4\ A + (a-b)^2$

Quand p est fixé, A augmente quand $|a-b|$ diminue ; quand A est fixé p augmente quand $|a-b|$ augmente.
Evidemment, nous n'attendons pas ce calcul de la part des élèves ; nous le donnons pour expliquer les stratégies à leur disposition.

Ces deux cas ont l'air symétriques du point de vue mathématique, mais ils ne le sont pas du tout du point de vue des élèves :

+ si l'on garde a+b fixé, pour chaque essai, on choisit une valeur de a (ou b), on cherche b tel que a+b = p par soustraction ou par complément, on calcule a.b et on compare à A.

+ si l'on garde a.b fixé et qu'on choisit une valeur de a (ou b), on cherche b tel que a.b = A, le résultat n'est pas forcément décimal, et il ne peut être obtenu que par division sauf dans des cas simples, et on compare ensuite a+b à p.

Du point de vue de la technique opératoire, c'est plus difficile de diviser pour trouver b = A/a que de soustraire pour trouver b = p-a. Même si les élèves disposent d'une calculette, ce qui les libère de la technique opératoire, et s'ils reconnaissent parfaitement la situation de division, la recherche d'un couple (a',b') meilleur qu'un couple (a,b) déjà trouvé est plus difficile à gérer. Lorsque le périmètre est fixé, les élèves peuvent procéder par compensation additive (si a+b = p, alors (a+c)+(b-c) = p). L'analogue dans le cas où l'aire est fixée serait une compensation multiplicative (si a.b = A, alors (a.c).(b/c) = A), ce qui demande une grande maîtrise de la multiplication, d'autant que pour que a'+b' reste proche de a+b, il faudrait prendre des valeurs de c proches de 1 (et non de 0).

Au cours de ces entretiens, nous choisissons de demander aux élèves de garder p constant, dans le cas où ils ne le font pas d'eux-mêmes, en reformulant la question "Parmi tous les rectangles de demi-périmètre p, y-en-a-t-il un d'aire A" ; "Parmi tous les nombres a, b tels que a+b = p, y-en-a-t-il pour lesquels on ait aussi a.b = A ?"

Au lieu de rechercher des couples se rapprochant de plus en plus de la solution, les élèves peuvent aussi s'intéresser à la variation de l'aire en fonction d'une des deux dimensions. Dans le cas où l'on garde le demi-périmètre fixé, l'aire du rectangle est fonction croissante de la largeur et fonction décroissante de la longueur du rectangle. Cependant les deux dimensions jouent un rôle symétrique dans l'énoncé du problème : il n'y a pas de raison de privilégier l'une plutôt que l'autre. Or les élèves ont tendance à faire comme si toutes les fonctions étaient croissantes ; on peut donc s'attendre à ce que leur tâche soit facilitée dans le cas où ils ont privilégié la largeur, et à ce qu'ils fassent davantage d'erreurs de choix pour leurs essais dans le cas où ils ont privilégié la longueur. Si les élèves utilisent le fait que l'aire augmente quand les deux dimensions se rapprochent, cela leur permet de garder le rôle symétrique des deux variables ; c'est aussi le cas quand les élèves recherchent des encadrements de plus en plus précis : ils se réfèrent alors à deux couples déjà obtenus, un d'aire plus petite, un d'aire plus grande, ce qui leur permet d'utiliser la relation "entre" sur les deux dimensions.

Remarque : Pour certains groupes d'élèves, nous avons donné le périmètre et non le demi-périmètre. Cela n'a pas changé grand chose et nous ne distinguerons pas ces deux cas.

d) Dans le cas où il n'y a pas de solution, les élèves sont amenés à se poser le problème de l'existence d'un tel rectangle (cf. 3ème séance en classe). Une procédure consiste à remarquer que parmi les rectangles de demi-périmètre p, c'est le carré qui a l'aire maximum, ce qui permet de discriminer les couples (p,A) de la manière suivante : si $A \leq (p/2)^2$, on a un rectangle solution ; si $A > (p/2)^2$, on n'a pas de solution.
Il y aurait évidemment la procédure duale, en fixant l'aire :
si $p \geq 2\sqrt{A}$ un rectangle solution
si $p < 2\sqrt{A}$ pas de solution.
Nous l'éliminons pour les raisons déjà évoquées.

Une autre procédure utilise les représentations graphiques mettant en jeu a, b, p, A et leurs relations :

- intersection des courbes $\{ (a,b) / a+b = p \}$ et $\{ (a,b) / a.b = A \}$
- intersection de la courbe $\{ (a,a.b) / a+b = p \}$ avec la droite y = A
- intersection de la courbe $\{ (a,a+b) / a.b = A \}$ avec la droite y = p.

En fait, plutôt qu'une seule de ces procédures, on peut attendre que les élèves commencent à essayer des couples pour s'approcher de A puis recourent à la première procédure au moment d'argumenter, en s'aidant éventuellement des représentations graphiques déjà faites —ici $\{ (a,b) / a+b = p \}$ et $\{(a,a.b) / a+b = p\}$ — pour affirmer que le carré a la plus grande aire.

2.3.3. Grille d'analyse des réponses.

Etant donnés les objectifs annoncés plus haut, nous regarderons trois points dans les réponses des élèves :

a) acquisition de la notion d'aire, distinction de celle de périmètre, calcul de l'aire d'un rectangle, utilisation de l'unité cm^2.

b) traitement du problème, en particulier :

- les élèves recherchent-ils un sens de variation de l'aire, du produit ?
- utilisent-ils le sens de variation quand on leur suggère de le faire ?
- comment traitent-ils la difficulté due à la présence de 2 variables : privilégient-ils une des deux dimensions (un des deux nombres) ou se servent-ils de la relation "entre" en s'intéressant plutôt aux couples ?
- comment se servent-ils des différents cadres en jeu dans le problème :

* si la question est posée en termes de rectangles, cela les aide-t-il, ou, au contraire, cela leur pose-t-il des difficultés supplémentaires ?
* la représentation graphique ou la représentation des nombres par les points d'un axe leur apporte-t-elle quelque chose dans la résolution du problème ?

c) acquisition des décimaux :

- technique sur l'ordre des décimaux : en particulier, quand ils ont situé le nombre cherché entre deux entiers, comment se fait le passage aux dixièmes, aux centièmes ...
- technique opératoire sur les décimaux (addition, soustraction, multiplication)
- placement de nombres décimaux sur un axe gradué
- conceptions sur les décimaux et le continu (autant que possible)

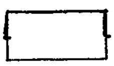
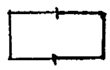
2.3.4. Réponses des élèves.

a) A propos de la notion d'aire.

Sur les 24 élèves interrogés, 14 ont eu un problème posé en termes d'aire. Beaucoup (9 sur 14) ont des difficultés sur la notion d'aire et sur le calcul de l'aire d'un rectangle : seuls deux groupes de deux élèves et un élève d'un autre groupe semblent savoir calculer l'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions; et parmi ceux-là quatre ont des problèmes avec les unités.

La plupart des élèves savent que le périmètre c'est le bord du rectangle et l'aire l'intérieur, mais ils ne peuvent pas traduire l'aire en termes de mesure. Certains veulent mesurer "les centimètres de l'intérieur".

Pour certains le périmètre et l'aire ne sont pas séparés de l'objet géometrique :

Pour E1, le demi-périmètre d'un rectangle c'est  ou 

et rien d'autre! Il ne peut pas le traduire en a+b avant qu'on lui ait suggéré de commencer dans un "coin" du rectangle.

Pour E19, on ne peut pas dessiner des surfaces de formes différentes et qui aient toutes une aire de 1 cm^2.

Beaucoup d'élèves ne voient pas comment mesurer des aires autrement qu'en comptant des carreaux ; et la relation entre centimètres et carreaux d'une part, centimètres carrés et carreaux d'autre part pose parfois quelques problèmes. Ainsi, E18 a dessiné sur papier à petits carreaux un rectangle de 3 cm sur 8 cm ; elle veut calculer l'aire "en comptant les cm de l'intérieur" ; elle compte les carreaux et annonce 48 parce que 1 cm fait 2 carreaux. E21 cherche l'aire d'un carré de côté 1,5 cm et fait 1,5x9 parce qu'il y a 9 carreaux.

Il est bien connu que les élèves mettent souvent en jeu le périmètre pour répondre à un problème concernant les aires de rectangles. C'est aussi ce que nous avons observé ici, mais il nous semble que ce n'est pas nécessairement parce qu'ils confondent les deux notions : ils savent en général que le périmètre c'est le tour et l'aire l'intérieur. Nous avons déjà évoqué le problème des unités de mesure; ils peuvent aussi confondre les formules puisqu'ils n'ont aucun contrôle par l'équation aux dimensions et qu'aussi bien ils veulent mesurer les aires en cm. On peut trouver une autre explication dans le cadre numérique : une confusion entre compensation multiplicative et compensation additive. L'élève sait ce que sont l'aire et le périmètre d'un rectangle, il connaît les formules, mais en voulant conserver l'aire, il conserve le périmètre. Ainsi l'élève E18 dont nous avons déjà parlé a dessiné un rectangle de 3 cm sur 8 cm ; nous nous mettons bien d'accord avec elle sur périmètre et aire, cm et cm^2 et nous lui demandons un autre rectangle d'aire 24 cm^2 ; elle propose un rectangle de 4 cm sur 7 cm. Le même phénomène se produit dans le cadre purement numérique : E6 cherche deux nombres dont la somme est 25 et le produit 95, il a essayé 20 et 5 : 20+5 = 25, 20x5 = 100 ; il propose 19 et 6 , écrit 19+6 = 25, 19x6 s'arrête et déclare "mais ça revient au même parce que là on enlève un point mais là on le rajoute". Nous retrouvons là ce que nous prévoyions des difficultés d'utilisation par les élèves d'une compensation multiplicative : certains la ramènent à une compensation additive.

b) Traitement du problème

recherche et utilisation du sens de variation :

Tous les élèves qui ont eu un problème à une inconnue (recherche du côté d'un carré d'aire donnée : 5 élèves concernés) ont utilisé la croissance de la fonction pour faire leurs essais. Les difficultés rencontrées dans ce cas concernaient les décimaux.

Pour les problèmes à deux inconnues (17 élèves concernés), 4 ont utilisé spontanément le sens de variation de la fonction (aire ou produit) - dont 2 explicitement - pour faire leurs essais et se rapprocher d'une solution. Sauf dans un cas (élève E3), leur partenaire les a suivis. Trois autres groupes de 2 élèves ont utilisé le sens de variation pour s'approcher de la solution dans les décimaux dès qu'on leur a demandé d'indiquer parmi les essais déjà faits ceux qui étaient les plus proches du résultat à atteindre.

Avant de se rallier à une procédure d'approximation utilisant le sens de variation, certains élèves ont une procédure de type balayage : essai d'entiers ou de demis un peu au hasard (E6, E17). La plupart des élèves font une hypothèse implicite de monotonie de la fonction dans les entiers après deux ou trois essais. Certains ont des difficultés à continuer dans les décimaux : E12 et E14 refusent d'envisager le problème dans les décimaux, ils essaient les demis mais ne peuvent continuer faute de pouvoir produire des décimaux entre 21 et 21 et demi. Il n'est pas toujours sûr que cette hypothèse implicite de monotonie reste valable quand on passe des entiers aux décimaux : il semble que certains élèves utilisent alors plutôt une certaine notion de proximité : on reste dans les environs d'un résultat en prenant des valeurs de a et b assez proches de celles qu'on avait, mais sans regarder dans quel sens on fait la variation. Ainsi, dans le groupe E5 - E20, E5 a cherché de tête et annonce qu'il n'y a pas de solution . Je lui demande si on peut s'approcher de la solution ; elle propose 15 ; 3. Pour s'approcher encore, E5 demande si elle peut utiliser les nombres à virgule et propose d'essayer 15,5 ; 2,5 ; elle constate que cela donne un résultat encore plus petit que 15 ; 3 ; pendant ce temps, E20, que j'avais invitée à essayer autre chose, a fait 12,5 x 5,5 et trouvé un résultat trop grand ; elle essaie alors 14,5 ; 3,5 et trouve encore un résultat trop grand mais assez proche du résultat cherché (50) ; elle propose alors 14 ; 4 qui est en dehors de l'intervalle d'incertitude. Il faut leur faire expliciter le sens de variation de l'aire en fonction de la largeur pour qu'elles limitent leurs essais au bon intervalle.

Un élève (E3) ne peut se départir d'une procédure du type "le compte est bon" : obtenir les nombres demandés par n'importe quel moyen. E3 doit chercher 2 nombres a et b avec a+b = 25 et a.b = 95. Il commence par faire 12,5 x 12,5 , s'arrête "ça fera trop grand", termine néanmoins l'opération, trouve 156,25 et dit "il faudrait diviser par quelquechose pour arriver à 95". Il propose ensuite 15 x 4 = 60 ; 60 + 35 = 95 puis 95 x1 ; puis 25 x 25, 25 + 25, 25 x 1 = 25 en répondant à une demande d'explications " vous avez dit de trouver 25 ". Pendant ce temps, son coéquipier (E6) poursuit une procédure d'approximation. E3 n'en tient aucun compte. Il est très difficile de le ramener sur le problème. Cela n'a pu se produire qu'après qu'il ait accepté de ne s'occuper que de l'équation a+b = 25 ; quand il a 4 ou 5 exemples à sa disposition, je lui demande de calculer a.b dans chaque cas et c'est alors seulement qu'il peut reprendre le problème en respectant les relations.

D'autres élèves, après avoir trouvé une valeur assez proche du résultat demandé, utilisent une procédure de ce type pour atteindre ce résultat . Par exemple, E1 doit trouver un rectangle de demi-périmètre 18 cm et d'aire 75 cm^2 . A partir de 10 ; 8 (10 x 8 = 80, c'est 5 de trop), il propose de diviser 5 par 2 et de le retirer de chaque côté ; il commence 10 - 2,5 = 7,5 et là annonce "j'ai trouvé : 10 x 7,5 = 75 !". Pour le même problème, E19, à partir de 6,5 x 11,5 = 74,75, divise 0,75 en deux et ajoute 0,375 à 6,5 et à 11,5 (en fait il voulait diviser en deux la différence entre 74,75 et 75). De telles procédures se réfèrent à ce qu'Aline Robert appelle "la fin justifie les moyens"[8].

Les élèves qui ont mis au point un algorithme de recherche par approximations progressent, eux, assez vite et approchent la solution à 0,01 près (E11 - E7 - E6 - E24) ou à 0,001 près (E2 - E22 - E8 - E17 - E4 - E21 - E25); certains abordent même les dix-millièmes (on fournissait une calculette à partir des centièmes). Les seules difficultés à ce moment là sont celles qui concernent les décimaux et l'écriture d'un décimal compris entre deux autres (cf. plus loin). On peut cependant remarquer l'inquiétude de certains élèves face à un processus infini : E8 est l'élève qui est allé le plus loin dans la recherche : il a encadré a et b à 0,0001 près ; pourtant, tout au long de sa recherche, il manifeste de la résistance. Il cherche 2 nombres a et b avec a+b = 25 et a x b = 90. Après 20 x 5 = 100 et 21 x 4 = 84, il annonce "c'est entre 20 et 21" et essaie 20,5 x 4,5 = 92,25 puis 21,5 x 3,5 = 75,25 et déclare qu'il

[8]A. Robert Thèse de doctorat d'Etat Université Paris 7,1982

ne peut pas aller plus loin (procédure de restriction aux entiers et demis déjà signalée ?). Comme j'insiste, il essaie 22 x 3 , 24 x1 et déclare à nouveau "c'est entre 20 et 21", puis "entre 20,5 et 21". La recherche reprend : pour 20,7 il trouve 89,01 pour 20,6 90,64 et déclare "ça y est, on peut pas aller plus près". Comme j'insiste encore, il propose 20,65 et à partir de ce moment il continue en manipulant parfaitement à la fois l'ordre sur les décimaux et le sens de variation du produit ; mais il continue à manifester son inquiétude devant l'ampleur de la tâche : après 20,636 "oh! mais on peut aller loin comme ça!" après 20,637 "Pas encore 90?" ; après 20,638 "Alors, où on va comme ça? on va bientôt trouver là?" Le fait qu'il ne s'engage pas de lui-même dans un processus d'approximation n'était donc pas dû à un manque de connaissances sur les nombres décimaux et leur ordre mais à un problème de contrat didactique : on ne peut pas lui proposer un problème qui n'a pas de réponse, lui demander de s'engager dans un processus de résolution sans fin.

Remarquons que, comme prévu, les erreurs dans le choix des valeurs à essayer sont plus nombreuses quand les élèves centrent leur attention sur la longueur (ou le plus grand nombre) : ils ont dans ce cas affaire à une fonction décroissante ; or, dans une situation d'approximation, les élèves ont tendance à faire comme si toutes les fonctions étaient croissantes : quand ils ont trouvé un résultat trop grand, ils diminuent la valeur de la variable.

Utilisation des divers cadres en jeu dans le problème.

On note chez la plupart des élèves une difficulté supplémentaire quand le problème est posé dans le cadre géométrique : pour beaucoup les notions d'aire et de périmètre ne sont pas acquises malgré les séances du premier trimestre (décrites plus haut). Ils doivent traduire le problème dans le cadre numérique et le résoudre dans ce cadre. Aucun élève ne se sert du cadre géométrique pour proposer des valeurs à essayer. Ceci n'est pas étonnant : dans les observations que nous avions faites auparavant avec Régine Douady, le recours au cadre géométrique servait à donner du sens aux opérations sur les nombres non entiers ; dans la mesure où ces élèves maîtrisent les techniques opératoires sur les décimaux, il est naturel qu'ils restent dans le cadre numérique pour résoudre le problème. La représentation graphique des couples (a,b) tels que a+b = p avec indication de la valeur de A correspondante aurait pu être un moyen de contrôle des choix, mais elle est trop longue à réaliser pour que les élèves puissent en faire une utilisation efficace dans le temps imparti, d'autant qu'ils ne maîtrisent pas le placement de décimaux sur un axe gradué, et nous ne l'avons plus demandée après le premier groupe (E12, E14). D'après l'observation de ce groupe et des observations dans d'autres classes, il semble que cette représentation puisse aider les enfants à repérer le sens de variation et qu'elle les encourage à utiliser la relation "entre" pour faire leurs essais : on cherche une valeur entre deux déjà représentées, ce qui limite les mauvais essais. La représentation des nombres décimaux sur un axe gradué devrait aussi aider les élèves dans leurs choix : nous l'avons demandée dans plusieurs groupes mais les élèves maîtrisent si mal le placement de décimaux sur un axe gradué que ce placement est un travail difficile qui ne peut être utilisé pour répondre à une autre question.

c) acquisition des décimaux :

Au niveau des techniques opératoires (multiplication en particulier), il ne semble pas y avoir de difficultés, mais certains élèves qui ne procèdent pas par compensations (par exemple enlever 0,1 à b et l'ajouter à a) ont des difficultés à trouver b à partir de a : ils ne peuvent trouver le complément à 100 ou 1000 de la partie décimale de a ou ne peuvent ramener la recherche de b à celle de ce complément ; ils ne peuvent pas non plus se ramener à une soustraction (cf élèves E6, E10, E18, E3.)

Un groupe de deux élèves (E12, E14) éprouve des difficultés à utiliser les dixièmes, à part les demis qu'ils écrivent ",5" mais prononcent "et demi" : ils ne peuvent pas proposer d'autres décimaux entre 21,5 et 22 avant qu'on leur ait fait dessiner une graduation en prenant dix carreaux pour une unité.

Davantage d'élèves éprouvent des difficultés quand il s'agit de passer aux centièmes,difficultés parfois liées à l'écriture des nombres décimaux : entre 4,4 et 4,5 E4 propose d'essayer "4,4 et demi" qu'il écrit "4,4,5". E5 veut choisir un nombre entre 3,4 et 3,5 et propose 3,05. De même, entre 3,2 et 3,3 E18 propose "3,0 quelque chose", en donnant comme argument "il faut passer aux centièmes. Pour d'autres groupes, le même problème se pose au moment du passage aux millièmes : entre 20,63 et 20,64 E7 propose "20,63et demi" et E24 propose de l'écrire "20,063" bien qu'il ait montré correctement la position cherchée sur la graduation. Dans l'analyse des tests proposés à dix classes, nous avions appelée "erreur E2" cette procédure qui consiste à intercaler un 0 au début de la partie décimale pour trouver un nombre compris entre deux autres ; et nous avions remarqué que cette erreur était particulièrement importante dans cette classe.

En ce qui concerne la graduation d'un axe entre deux entiers consécutifs, elle a été proposée à 5 groupes de 2 élèves. Si l'on excepte le premier groupe (E12, E14) qui a eu dix carreaux pour représenter une unité, et un groupe sur lequel on n'a pas assez de renseignements (bande magnétique non enregistrée), il reste 3 groupes où tous les élèves ont rencontré des difficultés pour placer les dixièmes,avec une unité de 30, 40 ou 50 carreaux : ils essaient successivement 1 carreau, 2 carreaux, voire 1 mm, et finissent par trouver le résultat parce qu'un dixième est représenté par un nombre entier de carreaux. Le placement des dixièmes n'est pas relié à la division par 10 et le problème se pose à nouveau pour les centièmes.

En conclusion, il semble que pour ces élèves, les décimaux soient des nombres avec lesquels on peut calculer mais l'ordre n'est pas toujours opératoire dans les problèmes d'approximation : résistance à passer des entiers aux décimaux (on peut passer au demi ou même au quart, les autres dixièmes sont plus difficiles) ou procédures erronées pour produire un décimal entre deux autres (le passage au centième ou plus se traduit parfois par l'intercalation d'un zéro derrière la virgule, ce qui décale la partie décimale).

En ce qui concerne les deux élèves qui ont eu à traiter un problème différent (deviner un nombre en moins de 10 questions), il semble qu'elles aient une représentation des nombres très liée à l'écriture : quand leur recherche commence à s'organiser, elles cherchent le chiffre des centaines en posant des questions du type : "est-ce que le nombre est entre 500 et 600" , et ceci malgré ma demande répétée de poser des questions qui permettent d'éliminer le plus de choses possible.

2.3.5. Comparaison avec une autre classe de 6ème

En juin 1981, nous avions posé le problème de rechercher un rectangle d'aire et périmètre donnés en entretien individuel aux élèves d'une classe de 6ème d'un grand lycée de la région parisienne, dans la suite nous appellerons cette classe 6ème L. Les conditions de l'entretien n'étaient pas identiques et les séquences faites en classe différaient sur un certain nombre de points. On peut cependant comparer les procédures rencontrées.

a) présentation rapide des séquences faites en classe.

Il s'agissait d'une classe de 30 élèves qui bénéficiait une fois par semaine d'une séance de mathématiques par demi-classe ; cette séance était consacrée à des travaux dirigés. Nous donnons ci-dessous une description rapide des séquences de Novembre 1980 à Janvier 1981 qui ont porté sur le thème aires et périmètres de rectangles.

14 et 21 Novembre : travail sur quadrillage : repérage, distance de deux points sur une même ligne du quadrillage.
28 Novembre : Recherche de rectangles de demi-périmètre 30 cm ; pour chacun d'eux calcul de l'aire ; recherche dans la famille de ces rectangles d'un rectangle d'aire 170 cm^2 (ou 130 cm^2). Représentation graphique des couples (a,b) et des couples (a,A) commencée dans un des groupes , à faire à la maison par tout le monde.
5 Décembre : Correction et fin des graphiques dans les cas a+b = 30 et a+b = 17.
12 Décembre : Travail individuel sur copie :

1. Peut-on trouver un rectangle dont le demi-périmètre mesure 36 cm et dont l'aire mesure 350 cm^2 ?
2. Peut-on trouver deux nombres a et b tels que a+b = 37 et axb = 300 ?

Un des groupes traite les problèmes dans l'ordre 1-2, l'autre groupe les traite dans l'ordre 2-1.
Remarque : pour le premier problème, il n' y a pas de solution ; pour le deuxième, il y a une solution entière.
19 Décembre : Correction du test avec, dans un des groupes, justification géométrique du fait que le carré a la plus grande aire des rectangles de la famille.
9 Janvier : Coloriage d'un quadrillage gradué avec la consigne suivante :
Chaque point du quadrillage représente un rectangle
Si l'aire du rectangle est < k on met un point bleu
> k on met un point rouge
= k on met un point noir
Les valeurs de k étaient k =15 ou k = 16 pour un des groupes, k= 25 ou k =27 pour l'autre groupe.
16 Janvier : Recherche de points noirs sur les verticales
23 Janvier : Recherche d'un carré dans chaque famille de rectangles.

Par la suite, les élèves ont étudié diverses situations de proportionnalité en liaison avec la représentation graphique.

Remarques :

1. Il y avait parfois un décalage dans le travail fait entre les deux groupes. L'homogénéisation se faisait quand les élèves étaient regroupés en classe entière.
2. Nous n'avons pas testé les connaissances des élèves sur la notion d'aire. La plupart d'entre eux connaissaient les formules pour calculer l'aire et le périmètre d'un rectangle. Nous verrons que quelques élèves avaient des problèmes à ce niveau.

b) Résultats aux tests du 12 Décembre.

Notons d'abord que le problème 2 avait une solution dans les entiers : (25,12) et que le problème 1 n'avait pas de solution. Nous ne sommes donc pas ici dans la même situation que pour les entretiens individuels. On peut classer en 6 catégories les procédures rencontrées :

1. Calculs permettant de retrouver les données (comme 35x10 = 350) ou calcul à partir des données comme 350 : 36.
2. Traitement séparé des deux équations.
3. Conclusion après un seul essai en admettant implicitement (ou explicitement) que si le périmètre est fixe, l'aire doit être fixe aussi.
4. Essais non ordonnés. Arguments de type arithmétique.
5. Essai systématique des entiers ; recherche d'un sens de variation sur les entiers
6. Référence au carré comme aire maximum.

problème	ordre	P1 - P0 - rien	P2 - P3 - P4	P5 - P6	autres
1	1-2	7	2	6	
	2-1	4	2	6	2
2	1-2	2	4	9	
	2-1	3	5	4	2

Nous appellons Po une procédure de même type que P1 mais ne mettant pas forcément en jeu les nombres donnés : calculs au hasard. Les autres procédures sont des réponses sans justification ou, dans le cas du premier problème, une écriture d'équations sans chercher à les résoudre.

Le problème 2 est mieux réussi que le problème 1 dans la mesure où la procédure P4 (essais désordonnés) permettait d'arriver au résultat dans ce cas. Il est surtout mieux réussi par les élèves qui l'ont eu en deuxième, mais c'est peut-être simplement un effet de l'échantillon.

La plupart des élèves sont restés dans le domaine numérique des entiers ; remarquons que les valeurs numériques le permettaient : dans un cas la solution était entière et on pouvait la trouver en défilant toutes les valeurs entières ; dans l'autre cas il n'y a pas de solution, ce qui fait qu'il est difficile d'interpréter la réponse des élèves qui décrètent qu'il n'y a pas de solution après avoir essayé toutes les valeurs entières: veulent-ils dire qu'il n'y a pas de solution dans les entiers ou s'appuient-ils implicitement sur le sens de variation pour dire qu'il n'y a pas de solution du tout?

c) Entretiens individuels.

Les élèves ont été interrogés en entretien individuel en juin sur les problèmes suivants :

I Voici un cercle. On a marqué 2 points A et B sur le cercle. On choisit un troisième point C sur le cercle. On obtient un triangle ABC qui a une certaine aire.
1) Peux-tu placer le point C pour que l'aire du triangle ABC soit la plus grande possible ? Pourquoi fais-tu ce choix ?
2) Calcule l'aire de ce triangle.
3) Parmi tous les triangles ABC que tu peux construire y-en-a-t-il un d'aire 7 cm^2 ?
4) Quelle est la hauteur de ce triangle d'aire 7 cm^2 ? Donne un encadrement de cette hauteur. Peux-tu en donner un meilleur ?

II 1) Peux-tu trouver un rectangle dont le demi-périmètre mesure 39 cm et dont l'aire mesure 402 cm^2 ?
2) Même question avec 41 cm pour le demi-périmètre et 402 cm^2 pour l'aire.

Remarques :

Pour le problème I, l'aire maximale était toujours supérieure à 7 cm^2 (de l'ordre de 12 à 15 cm^2). Il y avait donc toujours une solution. Nous ne parlerons pas ici de ce problème.

Pour le problème II, dans le premier cas, il n'y avait pas de solution; dans le deuxième cas, il y avait une solution irrationnelle. Nous posions toujours les questions dans le même ordre.

Au cours d'entretiens individuels, les élèves ne peuvent rester à une procédure de type 1, 2 ou 3 : les interventions de l'interrogateur les amènent dans ce cas à chercher un rectangle particulier de périmètre donné, à calculer son aire, puis à en chercher un autre et à calculer aussi son aire. De même ils ne peuvent rester dans le domaine des entiers, l'interrogateur suggérant alors les décimaux, du moins s'il restait assez de temps.

Les résultats sont les suivants :

Problème	Proc. P0 à P4	P5 et non exist.	P5 et continuer	P6
R39	7	11	2	6
R41	5	9		8

Dans P5 nous distinguons dans le cas 39 les élèves qui concluent à la non existence de la solution et ceux qui pensent qu'en continuant on pourrait s'approcher encore de la solution. Pour R41, nous regroupons dans P5 les élèves qui entament une procédure d'approximation. Les élèves qui utilisent P6 font référence au fait que le carré a une aire maximum. Parmi eux, 3 élèves font référence aux représentations graphiques dans le cas R39 pour justifier la non existence d'une solution.

La procédure de Sandrine : Une élève a essayé de garder l'aire constante: elle choisit une valeur de a (18) inférieure à 39, divise 402 par a, ajoute a au résultat b obtenu et compare à 39 ; c'est trop grand, elle choisit 12 et trouve un résultat encore plus grand pour a+b, essaie encore 8 qui donne un résultat encore plus grand et conclut que ce n'est pas possible. Elle recommence la même procédure dans le cas R41 et réutilise les calculs déjà faits : 12 + 33,5 = 45,5 trop grand , essai de 10, 9, 8 le nombre grandit de plus en plus : étonnement de Sandrine. Je lui demande de reprendre l'exemple 18 : on avait trouvé 40,3, moins que 41 ; Sandrine essaie alors 19, 20, 21, 22 : on trouve toujours dans les 40 ! Malgré les questions destinées à faire expliciter le sens de variation, Sandrine n'arrive pas à le formuler ni à l'utiliser : elle pense que c'est comme pour R39, qu'il n'y aura pas de solution ; on s'arrête là.

Le cas de Sandrine illustre assez bien l'hypothèse implicite de croissance de toutes les fonctions dont nous parlions dans l'analyse des problèmes (§2) et la plus grande difficulté qu'il y a pour les élèves à gérer une recherche à aire constante plutôt qu'à périmètre constant, en particulier parce que d'un côté a+b varie peu en fontion de b alors que de l'autre côté, on a une variation rapide.

d) <u>comparaison des deux classes</u>.

Les conditions étaient assez différentes :

- en 6ème L, l'entretien était individuel et non par deux comme en 6ème A.
- l'entretien total durait environ une heure en 6ème L : une demi-heure au moins était consacrée au premier problème et il restait 20 à 30 minutes pour le second problème et non 50 minutes comme en 6ème A. Faute de temps, nous n'avons même pas posé le problème R41 à certains élèves.
- en 6ème L, on posait le problème dans deux cas : d'abord le cas où il n'y a pas de solution (R39), ensuite le cas où il y a une solution irrationnelle (R41), alors qu'en 6ème A on demandait seulement le deuxième cas.
- en 6ème L, les élèves ne disposaient pas de calculette. Cette condition, ajoutée au manque de temps, a fait que les approximations n'ont pas été poussées très loin dans cette classe : les élèves ont plutôt été testés sur l'utilisation des décimaux dans des problèmes d'encadrement au cours du problème I (recherche de la hauteur du triangle d'aire 7 : encadrements du résultat d'une division ou résolution par tests et encadrements)..

Nous nous contenterons de pointer quelques régularités et quelques différences entre les deux classes.

Régularités observées :

- difficulté due à la gestion de 2 variables et de 2 équations que l'on trouve chez les élèves qui traitent séparément les deux relations et que l'on retrouve à un autre niveau dans les erreurs de choix. Dans les deux classes, les élèves qui s'intéressent à une fonction croissante ou qui font des encadrements font moins d'erreurs de choix.
- l'implicite de monotonie de la fonction fait dans les entiers semble ne pas toujours rester valable dans les décimaux.
- certains élèves refusent d'abord les procédures d'approximation avec des arguments arithmétiques : la multiplication devrait se terminer par un 0
- certains élèves sont bloqués devant l'étendue des choix quand il passent aux décimaux "c'est un peu le hasard, si j'ai 10 minutes je n'y arriverai pas, il doit y avoir une opération!" et ne cherchent pas de sens de variation.

- certains élèves, dans les deux classes, ont du mal à trouver a et b tels que a+b = 39 ou a+b = 41 par exemple.

Différences :

Il semble qu'en 6ème L il y ait davantage d'élèves qui utilisent des procédures "algébriques" qui ici sont toutes inadaptées : écriture d'équations en rapport avec le problème et essai de traitement par des opérations : par exemple, Laurent écrit Lxl = 402   402 : l = L   39 - L = l   et dit "si je multiplie ces deux résultats, je dois trouver 402. Il vérifie ses relations sur un exemple , déclare que c'est bon puis s'aperçoit qu'il ne connaît pas la largeur, fait un essai et c'est alors qu'il déclare "c'est un peu le hasard ... (cf ci-dessus)".

Faut-il interpréter cette différence comme un effet du contrat didactique ou révèle-t-elle une meilleure aisance avec les opérations, une plus grande confiance en des méthodes de résolution éprouvées ? C'est difficile d'en décider. Il est probable que les deux facteurs interviennent.

2.4. Retour sur les résultats aux tests

Nous avons déjà dit dans le chapitre 2 que les résultats de cette classe de 6ème n'étaient pas meilleurs, et même moins bons sur certains points que ceux des classes de ZEP. Rappelons que nous n'avions pas repris avec ces élèves les situations d'introduction des décimaux à partir des fractions. Ils ont été traités par le professeur dans son cours. Dans les séances préparées en commun, nous les avons seulement utilisés à propos des aires de rectangle. Détaillons les différentes questions. Comme pour les CM2, des tests ont été faits en décembre 83 et en mai 84. Les élèves ont donc répondu 2 fois à certaines questions ou à des questions très voisines. Nous adoptons le même plan que pour les CM2.

*** Représentations.**

Les représentations figurées proposées pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont toutes sous formes de surfaces, parfois des rectangles mais surtout des disques. La moitié d'entre elles seulement sont correctes. Pour 2,3 il y a 4 dessins, aucun correct (2 confusions avec $\frac{2}{3}$). Un élève répond "c'est un nombre décimal, il a une partie entière et une partie décimale", deux autres font des réponses curieuses : 2,5 et 2,7 (ils font des réponses de ce genre dans les autres cas aussi). Un élève manifeste dans les 3 cas une conception de la fraction ou de l'écriture à virgule comme un couple de 2 entiers (disques partagés en 1 + 3 parts etc...). Beaucoup ne répondent pas.

Très peu d'élèves ont donc en décembre une idée correcte de ce qu'est une fraction, ce qui est normal puisqu'elles n'ont pas été travaillées en 6ème et sans doute très peu vues à l'école élémentaire mais aucun ne peut expliquer ce qu'est 2,3 ni faire de dessin qui l'explique.

*** Heures.**

Beaucoup d'élèves (18) savent que $\frac{1}{4}$ heure fait 15 minutes mais un seul peut trouver les réponses correctes pour $\frac{1}{3}$ heure et pour $\frac{1}{5}$ heure : c'est l'élève étranger qui fait en réalité partie de la classe d'initiation au français et qui a dû étudier les fractions dans son pays (il répond correctement aux questions sur les fractions mais pas à celles sur les décimaux). Les erreurs les plus fréquentes pour $\frac{1}{3}$ sont 30 mn et 45 mn, pour $\frac{1}{5}$ ce sont 30 mn, 5 mn et 15 mn. Notons deux élèves qui utilisent +1, -1 et répondent 14, 13, 15 pour l'un, 15, 14, 16 pour l'autre respectivement pour $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{5}$.

***Sommes**

Un seul élève répond correctement, l'élève étranger dont nous avons parlé. Dix élèves ne répondent pas, deux élèves font le total des deux numérateurs et des deux dénominateurs, ce qui leur donne un entier, quatre élèves ajoutent séparément numérateurs ensemble, dénominaterus ensemble, obtiennent une fraction, 2 élèves utilisent cette règle quand les dénominateurs sont différents et répondent correctement quand les deux fractions ont le même dénominateur. Quatre élèves essaient de se servir des heures mais font des réponses fausses.

Pour la moitié de $\frac{1}{100}$ 11 élèves répondent $\frac{1}{50}$ (y compris des élèves qui disent qu'ils n'ont pas appris les fractions), un seul répond correctement $\frac{0,5}{100}$; l'élève étranger fait ici une erreur d'ordre de grandeur : $\frac{5}{100}$.

*** Ages**

Trois élèves répondent avant de tourner la page que c'est impossible parce qu'on ne connaît pas l'âge de Martine. Onze élève fournissent la réponse correcte, le plus souvent après avoir calculé les âges. Deux élèves la trouvent directement en faisant 2x5. Quatre élèves répondent "6 fois" sans calculer les âges. Deux élèves calculent les âges mais pas le rapport entre l'âge du grand-père et celui du frère.

*** Carreleur**

Trois élèves seulement fournissent la réponse correcte, un dit qu'il faut les dimensions de la pièce, deux écrivent 25 x la longueur, 15 x la largeur, longueur + largeur. Les autres n'abordent pas le problème.

*** Intercalation**

On trouve un net progrès entre décembre et mai : les réponses entièrement correctes passent de 2 à 8 et un élève fait une seule erreur en mai. C'est surtout l'erreur E4 (restriction à un seul chiffre derrière la virgule) qui a régressé, les autres restant plutôt stationnaires. La comparaison individuelle montre que les élèves qui donnaient une réponse juste continuent et que les élèves font moins d'erruers de types différents. Peu d'élèves se limitent maintenant aux nombres à une seule décimale mais ils font parfois un autre type d'erreur (intercaler un 0 ou sortir de l'intervalle).

*** Rangement de décimaux**

En décembre, deux élèves avaient l'ordre entièrement correct, un l'a encore en mai, l'ordre classe les parties décimales comme des entiers (ordre b). Deux élèves avaient une seule erreur, un a l'ordre correct en mai, l'autre utilise l'ordre b. D'une manière générale le nombre des élèves qui utilisent l'ordre b passe de 6 à 16 entre décembre et mai.

En décembre, les révisions du début d'année étaient encore assez proches mais elles n'ont pas eu un effet stable : en mai, les élèves recourent massivement à l'ordre b pour classer 9 nombres. Il est probable que les révisions de début d'année n'ont pas modifié les conceptions des élèves sur les nombres entiers. Il n'est pas sûr que les progrès sur l'intercalation aient un rapport avec la résolution du problème d'approximation dans les entretiens du deuxième trimestre. Même si c'était le cas, cette situation n'a pas suffi pour remettre en question les algorithmes de rangement des nombres.

*** Problème des œufs.**

En décembre, pour cette classe les rangements des œufs étaient par 12 dans la première partie. Nous l'avons changé après pour faire intervenir des nombres moins grands. Seize élèves n'avaient pas répondu, trois avaient utilisé une démarche correcte pour la première partie mais avec erreurs de calcul et n'avaientt pas traité la seconde, trois élèves avaient fait 12x10x8x50, l'un d'eux a, à partir de son résultat traité correctement la deuxième partie. Deux autres ont fait une début de résolution mais mélangé de multiplications par 12 et par 10.

En mai, le problème est placé en premier. Quatre élèves résolvent les deux parties, avec éventuellement des erreurs de calcul ou des réponses décimales pour la deuxième partie. Cinq élèves résolvent la première partie (avec éventuellement erreur de calcul) mais pas la deuxième, 2 résolvent la deuxième question à partir de leurs données de la première avec une démarche incorrecte dans la première partie. Les autres ont des démarches incomplètes ou multiplient insuffisamment par 6 dans le cas des cartons ou des caisses. Dans la deuxième partie, beaucoup s'abstiennent de répondre, les autres répètent les données ou calculent le nombre d'œufs dans les caisses et les cartons . Trois élèves font des calculs qui mélangent les deux parties du problème : multiplications par 6 et par 10.

*** Axe gradué.**

Un seul élève place correctement tous les points, cinq placent correctement 2,5. Trois élèves rangent les nombres dans le bon ordre mais sans les placer sur la graduation. Onze autres élèves n'ont placé aucun nombre, se contentant de les ranger mais avec un ordre incorrect, correspondant le plus souvent à l'ordre b décrit plus haut, les avis étant partagés à propos de 1,7 et 1,08. Ainsi 7 élèves classent les nombres dans l'ordre 0,8 0,62 1,7 1,08 1,45 2,5 2,87 et 6 dans l'ordre 0,8 0,62 1,08 1,7 1,45 2,5 2,87. Sept élèves se réfèrent au moins partiellement aux cm et mm dont un transforme systématiquementle nombre de dixièmes en nombre de mm (ex; 1,45 à 4,5 mm de 1), ce qui donne les points dans le bon ordre, deux élèves ont pris la partie décimale comme un nombre de mm quand il y avait un seul chiffre derrière la virgule (sauf 2,5 bien placé) et l'ont divisée par 2 quand il y avait 2 chiffres, ce qui donne dans ce cas un placement correct.

Conclusion

Au départ, l'expérience réalisée avait plusieurs objectifs pédagogiques ou didactiques :

- assurer une liaison entre une classe de 6ème d'un collège et des classes de CM2 d'une des écoles primaires du même secteur scolaire. Ces écoles étaient fréquentées par une population issue majoritairement de milieux socio-culturels défavorisés et à fort pourcentage d'immigrés.

- repérer les difficultés spécifiques de ces élèves en les situant par rapport aux difficultés connues, en particulier dans l'apprentissage des nombres décimaux et de la notion d'aire.

- (re)donner du sens à des concepts (en particulier celui de nombre décimal) éventuellement déjà introduits au CM dans un cadre purement numérique, en proposant aux élèves des situations déjà utilisées avec succès dans d'autres classes et permettant des jeux de cadres entre le cadre des nombres et celui des objets géométriques.

Nous nous appuyions sur les résultats de la thèse de Régine Douady où elle a montré qu'on pouvait mettre en place un enseignement des nombres décimaux qui développe chez les élèves des conceptions différentes de celles qu'on rencontre habituellement et qui permet d'éviter un certain nombre d'erreurs habituellement commises par les élèves du même âge. Le recrutement social de la classe concernée dans cette recherche était moyen. Nous faisions l'hypothèse que les mêmes résultats pourraient être obtenus avec des élèves issus de milieux socio-culturels défavorisés.

Les résultats de notre expérience au niveau de l'apprentissage des élèves, bien que positifs en CM, au moins dans l'une des classes, si l'on en juge par la comparaison avec des classes de 6ème de ZEP, n'ont pas été aussi nets qu'on aurait pu l'espérer. Nous conservons cependant notre hypothèse mais nous pensons qu'il faut lui ajouter la condition de pouvoir travailler de cette manière sur une très longue période, avec des élèves assez jeunes. Cette hypothèse n'est pas facile à vérifier car il est difficile de réunir les conditions qui permettraient de la réaliser: pour la construction des décimaux, qui met en jeu toute la construction du nombre et de la mesure, il faudrait pouvoir suivre les mêmes élèves pendant tout le cursus primaire.

Sur la notion d'aire (voir première partie), nous avons pu mettre en place chez des élèves de CM1 et de CM2 dont beaucoup étaient issus de milieu socio-culturel modeste, des conceptions telles qu'ils obtiennent à des tests mis au point par J. Rogalski des résultats significativement meilleurs que ceux qu'elle a obtenus en faisant passer les mêmes tests à des élèves du CM1 à la 4ème. Il est vrai que nous avons travaillé sur la notion d'aire dans ces classes beaucoup plus longtemps qu'on ne le fait habituellement.

Les moyens d'observation très frustres que nous avons utilisés ont cependant permis de pointer quelques phénomènes didactiques, particulièrement visibles avec le public scolaire étudié, notamment :

- la difficulté de réinvestissement des élèves que nous interprétons comme une difficulté pour les enseignants comme pour les élèves d'utiliser les situations d'action comme une référence lors de l'institutionnalisation.
- la résistance des enseignants à faire avancer à des rythmes trop différents le temps didactique et le temps d'horloge : on peut pas se permettre de travailler trop longtemps sur des notions qui ne paraissent pas strictement au programme de la classe ou sur des problèmes qui ne ressemblent pas suffisamment à ceux que l'on attend que les élèves sachent traiter.
- des effets pervers de l'intervention d'un didacticien dans le fonctionnement ordinaire de la relation didactique.

La suite de notre travail revient largement sur l'étude de ces phénomènes.

CHAPITRE 3 B

OBSERVATIONS EN CLASSE

année 1984 - 1985

Introduction

L'année suivante, nous avons repris l'expérience avec l'un des instituteurs de CM2 (celui de CM2B, l'autre ayant changé d'école) et le professeur de 6ème. Nous avons amélioré les conditions d'observation en CM2 et recueilli davantage d'éléments d'évaluation que l'année précédente. En sixième l'observation n'a duré que jusqu'à la fin janvier par manque de disponibilité de l'observateur au deuxième semestre. La population n'était pas tout à fait la même : les élèves de sixième avaient été répartis en groupes de niveaux et nous travaillions avec le groupe des "moyens". Nous avons pu remédier à certaines des difficultés signalées, en particulier au niveau des implicites entre le professeur et l'expérimentateur. Il reste cependant des problèmes qui résistent.

Nous avons travaillé sur les mêmes notions : fractions et décimaux, proportionnalité, aires. Sur les aires, nous avions notamment l'intention d'expérimenter les nouvelles séquences prévues après l'analyse a posteriori de l'ingénierie didactique exposée en première partie. Nous avons souvent utilisé les mêmes situations en CM2 et en 6ème. Un même test a été passé dans les deux classes, en décembre pour la 6ème, en janvier pour le CM2. Nous collaborions avec les enseignants pour la deuxième année, ce qui a permis de clarifier les attentes réciproques.

Après avoir pointé, pour chaque classe, ce qui a changé dans les conditions d'expérimentation, nous décrivons le déroulement des séances observées d'une part pour le mettre en rapport avec l'évaluation des élèves, d'autre part pour illustrer les évolutions dans les rapports entre le didacticien et l'enseignant.

1. Eléments de suivi en CM2 en 1984 1985

La classe de CM2 comptait 25 élèves et avait à peu près les mêmes caractéristiques que les classes de l'année précédente. Les conditions de travail avec l'instituteur étaient les mêmes (réunions pendant l'heure du déjeuner) mais nous avons pu cette fois observer une séance par semaine et enregistrer les phases collectives. Nous avons aussi demandé que des tests soient passés régulièrement par les élèves. Nous avons ainsi pu récupérer 4 paquets de copies.

Ces modifications ont plusieurs raisons. Nous avions repéré l'année précédente, notamment à travers les différences de résultats des deux CM2 aux tests, que cet enseignant faisait porter ses efforts sur la phase de recherche et n'accordait peut-être pas une place assez importante à l'institutionnalisation, à l'entraînement des élèves et à leur évaluation. L'entretien que nous avons eu avec lui quatre ans plus tard (voir chapitre 6) nous confirmera cette analyse. En choisissant avec lui des exercices pour évaluer les élèves, nous voulions à la fois lui montrer l'importance que nous attachions à cet aspect, donner une occasion aux élèves de fixer les acquis par un travail individuel et aussi recueillir des données plus précises sur l'évolution des élèves.

Nous avons utilisé le plus souvent les mêmes situations que l'année précédente, en en modifiant certaines. Sur la proportionnalité, nous avons choisi le thème des taxis au lieu de celui des courses et nous avons consacré plus de temps aux aires. Nous avons choisi d'introduire assez tôt les représentations graphiques et de s'en servir à diverses occasions pour donner aux élèves la possibilité et l'habitude de changer de cadre pour traiter certains problèmes.

Nous allons maintenant donner un bref compte-rendu chronologique des séances observées et les résultats des tests.

1.1. Test de début d'année.

Au début de l'année, le travail a surtout porté sur la numération et les grands nombres et les premières séances sur les fractions (déjà réalisées par la maîtresse l'année précédente). Nous n'avons pas assisté à ces séances : un test que nous avions en partie préparé avec l'instituteur et que les élèves ont passé le 6 octobre nous renseigne sur leurs connaissances à ce moment.

test du 6-10-84

Après un mois de travail sur la numération, on a proposé le test suivant aux élèves (l'exercice sur les billes avait été donné pour tester le sens direct dans les groupements par 10, suite aux difficultés repérées au cours de l'année précédente dans le problème sur les œufs : voir chapitres 2 et 3A).

Exercice 1. Tu ranges les nombres du plus petit au plus grand :
4 530 197 - 435 721 - 547 312 - 5 047 312 - 453 127 - 4 357 021 - 573 241 - 4 531 207 - 5 073 241.
Exercice 2. Que représente le chiffre 7 dans les quatre premiers nombres.
Exercice 3. Des nombres à deviner
le premier : le chiffre des unités est 8. Il y a 61 dizaines. Il y a 54 unités de mille. Il n'y a pas de centaine de mille. Il y a 8 unités de million.
le second : le chiffre des mille est 7, il y a 23 millions, le chiffre des centaines est 4, le chiffre des unités est 8. Il y a 2351 dizaines de mille et le chiffre des dizaines est 5.
Exercice 4. Un marchand vend ses billes dans des sacs de 10 billes. Il range 10 sacs dans une boîte et 10 boîtes pleines dans un carton. Il y a dans son magasin 15 cartons pleins + 8 boîtes pleines + 7 sacs. Combien a-t-il de billes dans son magasin ?

Les résultats sont les suivants, sur 22 élèves :
Exercice 1 : 9 élèves ont l'ordre correct, 3 l'ont avec 1 oubli, 2 élèves ont fait une interversion, 6 élèves ont classé d'abord tous les nombres qui commencent par un 4 puis tous ceux qui commencent par un 5 (dont 5 ont rangé correctement à l'intérieur de chaque catégorie et 1 a fait une interversion en plus), 2 élèves ont fait d'autres erreurs. Finalement, plus d'un élève sur 3 fait plusieurs erreurs sur cet exercice.
Exercice 2 : 18 élèves le traitent correctement, 2 élèves traitent 2 cas correctement et ne traitent pas les 2 autres, 1 élève fait une erreur, 1 élève a tout faux.
Exercice 3 : premier nombre (8 0546 18) : 20 corrects, 2 ont des zéros en trop (8 054 000 618 et 800 54 618) ; deuxième nombre (23 517 458): 8 corrects (dont 1 a remplacé un 4 par un 6 pour le chiffre des centaines), 4 non réponse, 4 élèves ont compté 2 fois les 23 millions (1 a 46 517 458, 1 a de plus oublié un chiffre et écrit 4657458, 1 a 23 23517458, 1 a 232 351 058 en oubliant de plus 2 autres renseignements), 1 élève a oublié 1 chiffre (23 51 458), 1 élève a oublié 2 informations (23 517 050), 4 ont fait d'autres erreurs (réponses 23 030 918, 23 351 008, 4 057 458, 58 423 0007000). Seuls la moitié des élèves ont des réponses qui se terminent par 7458 bien que ces 4 chiffres aient été donnés explicitement, au milieu d'autres informations il est vrai.
Exercice 4 : 4 réponses correctes , 4 incomplètes ou avec "petite erreur" (réponse dans les 15 000), 4 réponses 300 billes ou début de démarche analogue (150 + 80 +70), 2 réponses 2370 (1500 + 800 + 70), 1 réponse 15 + 8 + 7, 3 élèves abordent à peine le problème et 4 pas du tout.
Ce problème n'abordait que le sens de la multiplication, il correspondait à la première partie du problème des œufs donné l'année précédente (voir chapitres 2 et 3A). On avait choisi des multiplications par 10 pour ne tester que la numération. Nous voyons que moins de la moitié des élèves (10) sont capables de trouver qu'une boîte contient 100 billes (les autres pourraient peut-être le trouver si on leur posait la question, mais ils ne peuvent isoler ce sous-problème). On retrouve l'insuffisance des multiplications par 10, comme pour le problème des œufs, mais pas les multiplications successives dénuées de sens comme 10x8x15 que l'on avait rencontrées l'année précédente dans le problème des œufs.
Au cours de la correction, on demande aux élèves de dessiner les sacs, les boîtes et les cartons parce qu'au départ beaucoup d'élèves proposent 15x10 = 150, 8x10 = 80, 7x10 = 70, 150+80+70 = 300.

Ce test permet de montrer que, malgré le travail fait pendant le premier mois, beaucoup d'élèves ont encore des lacunes importantes dans la maîtrise de la numération quand les nombres dépassent le millier ou dans des situations non familières (2ème exemple de l'exercice 3). La situation des groupements répétitifs n'est pas maîtrisée dès qu'on dépasse le deuxième niveau: non seulement les élèves ne peuvent pas se la représenter mentalement mais ils ont beaucoup de mal à la représenter par un dessin.

Nous avons observé la classe à partir du 8 octobre. Trois thèmes principaux ont été abordés : autour des fractions, proportionnalité et représentations graphiques, aires.

1.2. Autour des fractions

Séance du 8/10/84

Les élèves ont commencé à travailler sur les fractions, en particulier, ils ont fait la situation des messages pour reproduire un segment et la situation de comparaison de segments dispersés dans la feuille (décrites dans les brochures 48 et 62 de l'IREM de Paris7 et dont nous avons déjà parlé dans le chapitre précédent). La séance du 8 octobre est une séance de rappel de ce qui a été fait et d'institutionnalisation.

Dans les messages, les élèves ont utilisé les 1/2, les 1/4, les 1/8, les 1/3. Exemples de messages : 1unité + $\frac{1}{4}$; 1unité + $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; 1 unité - $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ (message effectivement envoyé par Djillali) ; 1 unité + $\frac{2}{3}$; 1 unité + $\frac{1}{2}$; 3 unités + $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$. Tous ces messages sont énoncés oralement au moment du bilan, il n'est pas sûr qu'ils aient tous réellement été utilisés. Des élèves viennent ensuite au tableau écrire ces fractions et des relations : $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}= 1$, ou en plus court $\frac{1}{4}$x 4 = 1, 3x($\frac{1}{3}$) = 1, 2 x$\frac{1}{2}$= 1...

Au cours du bilan, des élèves parlent aussi des $\frac{1}{5}$ et des $\frac{1}{6}$: 5 x$\frac{1}{5}$= 1, 6 x$\frac{1}{6}$= 1, $\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ ou 2 x $\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$. La référence est le pliage de la bandelette : on plie en deux, on a 2 demis, la moitié d'un demi, c'est un quart parce qu'on a 4 morceaux.

Les expressions des enfants sont souvent : "le demi c'est la bandelette partagée en 2", la maîtresse dit aussi "le tiers c'est l'unité partagée en 3".

Les élèves sont à l'aise quand il s'agit du pliage de bandelettes mais certains transposent difficilement au dessin sur le tableau : des élèves ont du mal à comprendre 2x(1/6) = 1/3, en reprenant la bandelette, ils la plient en 3 puis en deux pour obtenir des sixièmes et vérifient la relation, mais l'élève qui est au tableau a du mal à trouver les 1/3 sur une unité de 6 carreaux dessinée au tableau alors qu'il a facilement trouvé les demis. Dans le cadre du calcul, les relations avec l'unité : nx1/n = 1 sont facilement utilisées par les élèves et semblent bien mémorisées, les autres sont encore difficiles pour certains élèves qui ont besoin de recourir aux bandelettes pour trouver que 4x1/8 = 1/2 ou 2x1/8 = 1/4. Pour voir si cette difficulté est liée au manque d'aisance des élèves à trouver des décompositions d'un nombre en produit, il est décidé de poser la question dans un contrôle sur les fractions le samedi suivant (voir contrôle du 18-10).

Dans la situation où il faut comparer des segments dispersés dans la feuille, les élèves disposaient de la petite bande unité et aussi d'une grande bande de papier blanc (voir analyse de la situation dans la brochure n° 48 ou n°62 de l'IREM de Paris 7 : la situation avait été modifiée après l'expérimentation de l'année précédente décrite dans le chapitre 3A). Des groupes ont utilisé la grande bande de papier blanc et reporté les segments, ils ont très vite obtenu la comparaison ; d'autres groupes ont utilisé la bande unité pour mesurer la longueur des segments. La première méthode est très rapide mais ne donne pas la mesure des segments. La maîtresse a demandé si on pouvait trouver un moyen d'avoir les avantages des deux méthodes. Les élèves ont alors fabriqué une règle avec l'unité, on a marqué 1, 2, 3, on a marqué les 1/2, les 1/3, les 1/4 ; un élève a fait les 1/5 chez lui par la suite.

contrôle du 18-10-84

Texte :

1) Décompose les nombres donnés en produit de 2 nombres. Ex : 15 = 5x3 (plusieurs solutions sont parfois possibles)

12 =
18 =
16 =
25 =
28 =
36 =

2) Trouve d'autres écritures pour les nombres fractionnaire donnés.

Exemple : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}=$

$\frac{2}{6}=$

$\frac{1}{4}=$

$\frac{3}{8}=$

$\frac{5}{2}=$

3) Voici une unité |————————————————|
(10 cm sur la feuille polycopiée dont disposaient les élèves)
Représente les longueurs $\frac{1}{2}$u, $\frac{1}{4}$u, $\frac{3}{4}$u, $\frac{1}{5}$u, $\frac{2}{5}$u, $\frac{4}{10}$u

4) Combien y a-t-il d'entiers dans
$\frac{5}{4}$:　　$\frac{13}{3}$:　　$\frac{14}{5}$:　　$\frac{21}{10}$:　　$\frac{18}{6}$:

Elèves en difficulté.

Le test a été fait par les élèves le jeudi 18 octobre. Nous avons récupéré 22 copies, les résultats étaient les suivants :

Exercice 1

Les décompositions fournies sont le plus souvent celles qu'on trouve dans les tables usuelles (12 élèves). Certains donnent systématiquement les 2x... sauf pour 25 où ils donnent 5x5 (5 élèves). Un élève donne presque tous les produits dans les 2 sens, y compris les 1x..., une autre élève donne les 1x..., 3 élèves écrivent les produits dans les deux sens (ex 3x4 et 4x3). Six élèves donnent des décompositions avec additions, soustractions ou même division euclidienne en même temps que des décompositions multiplicatives correctes. Un élève donne des produits faux. Chaque élève a donné au moins une décomposition correcte de chaque nombre.

Exercice 2

La majorité des élèves (14) fournissent des décompositions additives correctes ($\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; $\frac{2}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$; $\frac{5}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, parfois écrites sous la forme multiplicative : $\frac{5}{2}=5 \times \frac{1}{2}$). Quelques-uns (8) fournissent de plus des fractions équivalentes (exemple $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ ou $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$). Un autre élève ne fournit que des écritures de ce type.

Parmi les 13 élèves qui donnent des réponses justes à 4 questions sur 5 (dont 9 élèves à toutes les questions), certains fournissent aussi des fractions équivalentes fausses (6 écrivent $\frac{3}{8}=\frac{1}{3}$ et 4 écrivent $\frac{3}{4}=\frac{5}{6}$).

Trois élèves ne répondent pas à la question (dont une qui a barré toutes ses réponses parmi lesquelles seule $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ était correcte). Restent six élèves qui font des réponses partielles ou beaucoup de fautes :

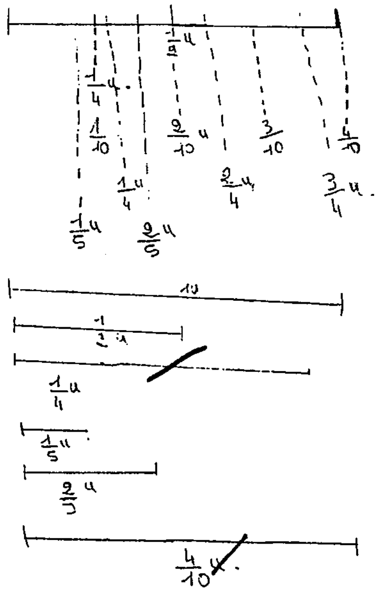
- un n'écrit que $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$
- un écrit $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{4}=\frac{1}{}$
- un autre $\frac{3}{4}=1u+\frac{1}{2}$ $\frac{2}{6}=\frac{1}{6}x2$ $\frac{1}{4}=$ 1u partagé en 4 $\frac{3}{8}=\frac{1}{3}$(ou $\frac{3}{3}$: le 1 et le 3 sont superposés) $\frac{5}{2}=2u$ et $\frac{1}{2}$
- un quatrième $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{5}{6}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{6}{8}$; $\frac{2}{6}=\frac{3}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+$; $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$ $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$; $\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$
- un cinquième : $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{5}{6}$ $3x\frac{1}{4}=1$; $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=\frac{3}{8}$; $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$; $\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$
- et le sixième : $\frac{3}{4}=$ $\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; $\frac{3}{8}=\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; $\frac{5}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

Les décompositions additives sont donc relativement disponibles pour beaucoup d'élèves, même s'ils ne fournissent pas toutes les décompositions possibles. Un entraînement sur les écritures multiplicatives des entiers ne suffirait sans doute pas à entraîner un progrès important sur les fractions. C'est sans doute plutôt le lien entre les deux connaissances qui est en jeu.

Exercice 3

La moitié des élèves fait au moins deux erreurs

- 6 segments justes : 5 élèves dont 1 place seulement des points sur le segment donné, sans redessiner d'autres segments.
- 5 segments justes : 6 élèves ; pour 5 d'entre eux l'oubli (2) ou l'erreur (3) porte sur $\frac{4}{10}$; le dernier a oublié $\frac{3}{4}$.
- 4 segments justes : 2 élèves qui représentent $\frac{3}{4}$ par 8 cm et $\frac{2}{5}$ pour l'un, $\frac{1}{4}$ pour l'autre par 3 cm
- 3 segments justes : 4 élèves ($\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ pour deux, $\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{2}{5}$ pour les autres).
- 2 segments justes ($\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$) : 2 élèves dont l'un avait placé $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$ sur le segment et a tout effacé
- seul $\frac{1}{2}$ est correct pour 3 élèves.



Remarquons que 3 élèves représentent $\frac{1}{5}$ par 1,5 cm mais pour 2 d'entre eux cela semble cohérent avec une unité de 8 cm : peut-être ont-ils utilisé leur cahier de brouillon avec une unité de 10 carreaux au lieu de 10 cm.
Seuls 8 élèves ont représenté correctement $\frac{4}{10}$; il faut cependant noter qu'elle était en dernier et apparaissait très mal sur le texte polycopié (ceci explique peut-être que 2 élèves l'aient oubliée).
Notons également les réponses d'une élève qui fait coexister deux graduations incompatibles : une correcte avec $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ l'autre qui prend $\frac{4}{10}$ = 1 et place $\frac{1}{10}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{10}$ en conséquence (voir ci-contre).

Exercice 4

10 élèves ont les 5 réponses correctes
1 élève a une erreur (3 pour $\frac{13}{3}$)
1 élève a deux erreurs (5u pour $\frac{13}{3}$ et 10u pour $\frac{21}{10}$)
1 élève a exprimé tous les restes correctement mais s'est trompé 3 fois dans les parties entières
3 autres élèves ont 1 ou 2 réponses correctes
1 élève n'écrit que $\frac{5}{4} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4}$
5 élèves n'abordent pas le problème.

Les résultats des exercices 3 et 4 sont liés :

4 \ 3	≤ 2 erreurs	≥ 3 erreurs
≤ 2 erreurs	10	2
≥ 3 erreurs	3	7

Les 3 élèves qui ont au moins 3 erreurs à l'exercice 4 et au plus 2 à l'exercice 3 n'ont en fait pas répondu à l'exercice 4 ; les deux élèves qui ont au moins 3 erreurs à l'exercice 3 et au plus 2 à l'exercice 4 semblent avoir changé d'échelle en cours d'exercice 3.

Les résultats des exercices 2 et 3 sont liés également :

3 \ 2	≤ 1 erreur	≥ 2 erreurs
≤ 2 erreurs	10	4
≥ 3 erreurs	3	4

Remarquons que les élèves qui fournissent des fractions équivalentes sont aussi plus performants sur les longueurs (sur les dix élèves qui fournissent des fractions équivalentes correctes, 8 font au plus 2 erreurs sur les longueurs).

<u>Séance du 20/10/84</u>

L'objectif est d'utiliser les fractions dans un autre contexte. Les élèves ont à résoudre le problème suivant : Deux villes A et B sont distantes de 42 km. Un piéton part de A vers B, un cycliste part en même temps de B vers A à la rencontre du piéton. Le cycliste va 2 fois plus vite que le piéton. Ils empruntent le même chemin en sens inverse. A quelle distance de A et B vont-ils se rencontrer ? Fais un dessin pour représenter ce problème et résous-le.
Après un temps de recherche de la part des élèves, on reprend le problème collectivement au tableau. La maîtresse demande aux élèves de représenter plusieurs positions du piéton et du cycliste. La première idée exprimée est de partager en 4 parce 2 ou 3 ce n'est pas assez (l'élève a envie qu'il reste de la place entre le cycliste et le piéton pour continuer à les faire avancer. Un élève a fait une représentation à l'échelle sur sa feuille (1/2 cm pour 2 km), l'élève qui est au tableau propose de prendre 42 cm pour 42 km ; les élèves résolvent le problème par approximations en commençant par suivre mentalement les déplacements et les faire figurer sur la représentation : un élève dit "si le piéton fait 1 km, le cycliste en fait 2, si le piéton fait 10 km, le cycliste en fait 20". Un autre annonce tout de suite que la moitié c'est trop "si le piéton fait 21, le cycliste fait 42, il est arrivé, c'est trop", il propose alors d'essayer 12 "si le piéton fait 12, le cycliste fait 24, on va faire le total pour voir s'ils sont arrivés 12 +24 = 36". Un troisième élève intervient : "s'il fait 13, le cycliste fait 26, ça fait 39, il en manque encore 3". Alors le chœur des élèves annonce "14 c'est bon !"

Une élève explique qu'il fallait diviser 42 par 3, au début elle a divisé par 4 et a vu ensuite que c'était par 3 parce que 42 : 3 = 14 et 2 x 14 = 28 ; 14 + 28 = 42. C'est la raison la plus satisfaisante trouvée dans la classe pour expliquer pourquoi le piéton parcourt le tiers du chemein. Personne ne peut donner l'explication en disant que 1/3 + 2x(1/3) = 1, même avec l'aide d'une représentation du parcours par des segments comme ceci :

I———I—————I qui est cependant vue comme une explication de la division par 3.

La plupart des élèves ont adopté la solution trouvée dans les entiers par essais et erreurs et ne pouvaient mettre en œuvre les connaissances sur les fractions même pour donner une explication a posteriori : cela aurait demandé qu'ils puissent voir le trajet total comme une unité, ce qui n'était pas le cas — le total était 42 et non 1 — ou alors qu'ils passent d'un point de vue partage à un point de vue commensuration — 2 pour 1 si on compare le cycliste au piéton, 3 pour 1 si on compare le trajet total parcouru à celui du piétion — mais pour cela, il aurait fallu de plus donner un sens à la somme des trajets effectués par le cycliste et le piéton.

Une écriture algébrique du problème $x + 2x = 42$ aurait bien sûr pu les aider et n'était pas hors de portée de ces élèves mais il aurait fallu, pour qu'ils puissent l'utiliser, qu'ils aient l'habitude de nommer ce qu'ils cherchaient. La représentation par des segments aurait pu jouer ce rôle si les élèves l'avaient utilisée pour analyser ce qui se passe au moment du point de rencontre. Or la plupart des élèves ne portaient pas leur attention sur ce moment mais sur l'ensemble du déplacement vu dans son déroulement.

Ce problème n'était donc pas vraiment adapté pour réinvestir les connaissances sur les fractions.

<u>Séance du 10/11/84</u>

Dans la suite, on a l'intention de travailler sur le thème des rectangles dans le but d'utiliser un jeu de cadres numérique - géométrique pour donner du sens à la somme et au produit de fractions. Pour que ce jeu de cadres soit possible, un travail préalable sur les caractéristiques géométriques du rectangle est nécessaire. Les élèves ont déjà travaillé sur le rectangle à la séance précédente. Aujourd'hui, nouvelle consigne : "Chacun de vous va essayer de dessiner un rectangle, ensuite vous allez écrire un message le plus court possible de manière que la personne qui reçoit le message dessine le même rectangle." Le deuxième rectangle (correspondant au message reçu) est dessiné sur papier calque de façon que la comparaison soit facile à faire.

L'échange de messages se passe bien. Quelques messages insuffisants dans un premier temps (une seule dimension), un peu de mauvaise foi chez les récepteurs (il m'a donné seulement une longueur et une largeur alors qu'il y en a deux alors j'ai dessiné une longueur et une largeur). Un message n'est pas compris : l'émetteur a dit 1 u = 5 cm et a donné ses dimensions en u.

Exemples de messages bien compris : "tu fais un rectangle dont la largeur fait 3,5 cm et la longueur 5,5 cm" ; "tu fais 3 cm et 7 cm, 3 cm, 7 cm, ton rectangle, tu le fais en hauteur" ; "la ligne fait 10,5 cm et le trait fait 3 cm" ; "tu fais 5 cm de haut et 8 cm de côté".

Finalement, pour faire le message le plus court possible, les enfants se mettent d'accord sur le fait qu'il faut donner la longueur et la largeur qu'on peut symboliser par L et l.

Remarques sur la situation émetteur-récepteur : Dans cette classe, on a constaté qu'un certain nombre d'élèves avaient envie de compliquer leur message pour que le travail du récepteur soit plus difficile. On aurait pu rendre les équipes solidaires en donnant un enjeu commun à l'émetteur et au récepteur. Dans ce cas, on encourage au contraire la complicité entre émetteur et récepteur et la compréhension de messages incorrects ou incomplets.

Certains élèves ont voulu dans leur message donner aussi la position du rectangle dans la feuille. Cela amène à préciser qu'il faut comprendre "même rectangle" comme "superposable". Ce genre de précisions qui arrivent en cours de résolution font partie de la dévolution du problème : on ne peut jamais donner directement la consigne souhaitée.

Après une discussion sur ce qu'est le périmètre défini par certains comme le tour, les 4 côtés ou (longueur + largeur) x 2, la ligne qui délimite le rectangle (personne ne dit ce que la maîtresse attend : la mesure du tour ou la longueur de tour), la maîtresse donne une nouvelle consigne : dessiner des rectangles dont le périmètre mesure 10 u (avec une nouvelle unité u qui est distribuée aux élèves).

Les élèves travaillent individuellement, en échangeant éventuellement avec leur voisin.

Certains commencent par produire des rectangles dont le demi-périmètre fait 10 u, d'autres même des rectangles dont la longueur fait 10 u. On récapitule les rectangles répondant à la consigne produits par la classe :

L = 3u ; l = 2u   L = 4u ; l =1u   L = 3,5 u ; l = 1,5 u   L= $4+\frac{1}{2}$u ; l = $\frac{1}{2}$u

L = 2,5 u ; l = 2,5 u.

D'après leurs explications, les élèves ne se sont pas servis du demi-périmètre mais ont pris une dimension, l'ont multipliée par deux, ont calculé ce qu'il restait pour les autres dimensions et ont divisé par 2.
Les élèves remarquent qu'on a toujours le même périmètre mais pas toujours les mêmes dimensions et que plus la longueur augmente, plus la largeur diminue.

Les élèves ne se sont pas ramenés au demi-périmètre et n'ont pas proposé d'autres fractions que les demis. Une des raisons en est dans doute qu'ici la dévolution du problème s'est faite dans le cadre géométrique et que les élèves n'ont pas transporté le problème dans le cadre numérique, même s'ils utilisent des nombres pour le résoudre. Le problème dans le cadre numérique serait "chercher des couples de nombres dont la somme est 5". Pour le faire les élèves doivent d'abord voir le périmètre comme le double du demi périmètre. Ils peuvent le faire soit dans le cadre géométrique, soit dans le cadre algébrique (formule de calcul). Ce travail doit se faire dans la prochaine séance. Il est donc prévu avec la maîtresse que les élèves fassent une autre séance de recherche de rectangles à périmètre donné et placent leurs résultats sur un graphique, pour leur donner des outils supplémentaires.

Séance du 19 novembre

Les élèves rappellent le travail qui a déjà été fait sur le rectangle. D'abord les messages : pour que le camarade puisse dessiner un rectangle superposable, il fallait donner la longueur et la largeur. Recherche de rectangles de périmètre 10 u : ils en ont cherché d'autres et ont traduit la consigne sous une nouvelle forme : L + l = 5 u. En travail à la maison les élèves devaient chercher quelques rectangles nouveaux dont le périmètre faisait toujours 10 u. Les propositions nouvelles sont les suivantes :
$L = 3u + \frac{1}{4}$; $l = 2u + \frac{3}{4}$ corrigé en $L = 3u + \frac{1}{4}$; $l = 1u + \frac{3}{4}$; $L = 2 + \frac{5}{6}$; $l = 2 + \frac{1}{6}$;
$L = 3u + \frac{2}{5}$; $l = 1u + \frac{3}{5}$; $L = 3u + \frac{1}{6}$; $l = 1u + \frac{1}{3}$ (l'élève explique parce que $\frac{1}{6}$ c'est la moitié d'$\frac{1}{3}$) corrigé en $L = 3u + \frac{2}{3}$; $l = 1u + \frac{1}{3}$ par plusieurs élèves oralement et par l'élève concerné en $L = 3u + \frac{1}{6}$; $l = 1u + \frac{5}{6}$;
$L = 2u + \frac{7}{8}$; $l = 2u + \frac{1}{8}$; $L = 3u + \frac{2}{3}$; $l = 1u + \frac{1}{3}$; $L = 3u + \frac{5}{6}$; $l = 1u + \frac{1}{6}$.
Les élèves ont toujours sélectionné une unité qu'ils ont partagée en 2 fractions dont la somme est 1. Ils disent qu'on pourrait continuer à l'infini, qu'on peut toujours faire une moitié d'une moitié.

On peut voir au cours de cette phase de rappel que, dans le courant de la semaine, le problème a évolué pour les élèves : il a été traduit en L + l = 5u et les élèves ont mis au point dans le cadre numérique une stratégie de production de réponses : écrire une unité comme la somme de 2 fractions. La dévolution a été réussie sur ce point. La maîtresse doit maintenant introduire les représentations graphiques.

La maîtresse demande "un moyen d'écrire les renseignements de manière que quand on connaît un renseignement, par exemple la longueur, on puisse immédiatement trouver le deuxième, par exemple la largeur." On peut penser que la maîtresse attend là un jeu sur les écritures algébriques : L = 5u - l ou l = 5u - L. En fait elle attend la représentation graphique.
Elle reformule sa question "un moyen de *placer* nos renseignements, ici on a beaucoup de renseignements, on pourrait en avoir d'autres puisqu'on a une multitude de rectangles possible, ... un moyen d'écrire nos renseignements de manière à ce que, on se donne par exemple la longueur, et toc, on ait immédiatement sur notre feuille la largeur ou réciproquement, on a la largeur, on regarde notre feuille et on lit automatiquement la longueur. Comment on pourrait organiser sur notre feuille cette manière de lire très très rapide ?"

En fait les élèves ne peuvent pas deviner, comme l'attend la maîtresse, que la représentation graphique répond au problème, vu leur manque de familiarité avec cet outil. Les élèves proposent de ranger les informations dans le tableau du plus grand au plus petit. Nous reproduisons un extrait de la séance qui montre comment, en se saisissant de cette idée du rangement, elle va alors négocier un chemin pour amener les élèves à ce qu'elle veut :

M. "Ensuite, ça va se compliquer là, et comment je pourrais les ranger ?

E. par colonne, en un tableau ...

M. *"oui, en une espèce de tableau...* Comment tu vois ça ? Qui est-ce qui a dit ça, Henri ? comment tu vois ça ?

H. Eh, ben, tu mets d'abord 1u, 2u, 3u, M. Hum! H. on met celles qui sont dans les 1u, on met celles qui sont dans les 2u ...

Brouhaha ... E. Maîtresse, j'ai une idée !

M."Comment tu verrais ranger ça, alors là on mettrait 1u, 2u, 3u "

et la maîtresse dessine un axe qu'elle commence à graduer au tableau ...

Les élèves approuvent, l'un remarque que ça ne tombe pas toujours pile exact

M. "Est-ce que c'est un problème ? Oui ? non ? un peu ? peut-être ?

Franck "un peu"

M. "Prenons un exemple".... *Ils traitent un exemple et placent L = 3u + 1/2.*

M. "bon alors voilà, donc on va ranger ici, c'est notre L, hein ? d'accord ? c'est les mesures de notre L. Bon, alors on va placer toutes nos mesures, à chaque fois on pourra ... 3u +1/2 d'accord, c'est ici ... Alors comment maintenant lire sur notre schéma, sur notre graphique, comment lire automatiquement la mesure du l qui va aller avec ce L puisqu'on sait qu'à partir du moment où on se donne une dimension, on a forcément l'autre ?"

Maxime :" quand on la longueur plus la largeur, on peut multiplier par 2.

M. Oui, mais ça bien sûr, pour refaire le périmètre, bien sûr, mais là, c'est pas exactement ça que je veux. On se dit ici, j'ai 3u +1/2, c'est ma longueur, bon, comment maintenant, je vais dire à mes camartades, que si ma longueur fait 3u + 1/2, obligatoirement, j'aurai ma largeur, 1u +1/2. Eh bien, il faut, il faudrait faire quoi ?

E. l'addition ... une soustraction...

M. oui, bien sûr, une addition, une soustraction, d'accord, mais sur mon schéma, comment je pourrais le noter ?

(intervention discrète de l'observateur auprès de la maîtresse disant qu'ils ne peuvent pas trouver, la maîtresse répond "je pensais qu'ils pouvaient trouver")

M. "Qu'est-ce qu'il faudrait que je fasse pour ma largeur ?" Brouhaha dans lequel les enfants proposent encore des opérations

M. *"Dans sa tête, on est d'accord, oui, mais sur mon dessin ? Qu'est-ce que j'ai fait pour la longueur ? j'ai fait la proposition d'Henri, j'ai fait une droite et j'ai mis mes points, pour la largeur, je pourrais faire ?* E. *"la même chose !"*

M. *"la même chose ! bon ! et après ? bon alors celle-là effectivement... comment on pourrait disposer ça ?* E. *"On refait la même chose pour la largeur"*

M. Absolument !

E. et puis ... M. *"d'accord, donc on va avoir une droite ici pour la longueur, on va avoir une autre droite graduée comme ça pour la largeur et on va essayer de faire correspondre les deux. Bon, alors, qui est-ce qui a déjà vu ce genre de représentation, où est-ce qu'on pourrait mettre la droite qui va représenter notre largeur ?* Maïssetou ?"

Maï : *"A partir du même point".*

M. *"Ben voilà ! c'est bien, Maïssetou, donc on va la mettre... ça va partir du même point et on va la mettre...*

E. *en hauteur.*

M. *En hauteur ce coup-ci, d'accord ? pour pas être dérangés, donc là on va porter toutes nos informations sur la largeur, ici qu'est-ce qu'on aura ?* Elle gradue sous la dictée des élèves 1u, 2u, 3u...).

Ils placent un exemple 3u +1/2, 1u + 1/2. Les élèves remarquent que les lignes de rappel dessinent le rectangle.

Les élèves placent des points correspondant aux rectangles trouvés ; chacun fait la représentation sur sa feuille (la maîtresse donne l'échelle 1u est représenté par 6 carreaux : c'est le u de la réglette) et on en fait une au tableau. Quelques élèves ont des problèmes de représentation : une élève veut placer le rectangle de dimensions 1u, 4u en plaçant 4u sur l'axe des abscisses, 1u sur l'axe des ordonnées et en joignant les deux points obtenus. Les autres protestent parce que ça ne fait pas un rectangle.

Les élèves sont sur le plan de la figuration du rectangle : ils dessinent les rectangles emboîtés les uns dans les autres mais ne sont pas sur le plan de la représentation. C'est une ambiguïté de la situation : le rectangle est représenté par un point mais il est en même temps dessiné par les lignes de rappel qui permettent de placer le point. Ici la présentation de l'enseignant a contribué à renforcer le point de vue géométrique (dessin de rectangle). Il me paraît alors nécessaire d'intervenir sur la signification de l'outil représentation graphique comme le montre l'extrait suivant.

Intervention de l'observateur : "Tous les points vont représenter des rectangles, mais où sont représentés tous les rectangles qui ont une largeur 1u ?" ... "Il y en a beaucoup qui ont une largeur 1u."

Les élèves n'ont pas l'air de comprendre. "1u +1/2, 1u + 1/4..."

M. "des rectangles qui vont avoir comme largeur 1u, il n'y en a qu'un ...?"

E. "non, il y en a plusieurs !"

M. "ou pas ?"

E. "si, y'en aura qu'un!"

Obs. "Non, avec le périmètre 10, y'en aura qu'un d'accord, mais parmi tous les rectangles qui existent, il peut y en avoir d'autres"

M. "et parmi toutes les solutions qui existent, nous on s'était dit, on va choisir celle qui nous convient, 10u de périmètre on n'en aura qu'un mais tous les rectangles de largeur 1u seront sur cette droite là, et parmi ceux là on va choisir celui qui nous intéresse"

E. "le 4".

Obs. reprend en disant qu'il s'agit d'une représentation, que tous les rectangles qui ont une largeur 1u vont se trouver sur une droite (qu'il montre), tous ceux qui ont une longueur 4u vont se trouver sur une autre droite (qu'il montre) et que le rectangle de longueur 4u et de largeur 1u se trouve à l'intersection des deux droites "c'est le point de rencontre, le croisement".

Les élèves placent les points trouvés et constatent qu'on a "un petit escalier". Ils remarquent également que quand on a trouvé un point, on a aussi "le contraire" en échangeant les dimensions. La maîtresse rappelle ce qu'on a appelé longueur et largeur.

On peut ici pointer plusieurs phénomènes qui jalonnent souvent la négociation d'un contrat didactique et qui permettent à l'enseignant de faire comprendre aux élèves ce qu'il ne veut pas leur dire explicitement, que G. Brousseau a identifiés comme des paradoxes du contrat didactique :

- l'enseignant veut laisser un espace de liberté aux élèves dans la consigne même : il ne doit pas imposer l'outil qui est peut-être disponible pour les élèves.

- il reconnaît dans ce que disent les élèves, quitte à interpréter beaucoup, ce qui va dans le sens de ses attentes et il les oriente ainsi : par exemple l'élève propose de ranger les dimensions "d'abord les 1u, 2u..." et l'enseignant dessine un axe gradué.

L'instituteur est obligé ici de recourir à tous ces effets parce que les élèves ne peuvent pas fournir la réponse qu'il attend.

A propos de la représentation graphique elle-même, on voit surgir une difficulté qui se rencontre fréquemment : pour faire apparaître le lien entre deux informations, on relie simplement les points correspondants sur les axes de coordonnées, visualisant le lien qui existe entre 2 objets sans voir que le couple représente un nouvel objet différent des précédents.

Nous décidons de reprendre la même situation avec une mesure du périmètre en cm, ce qui devrait pouvoir se faire rapidement, et de faire réaliser par chaque élève la représentation graphique dans ce cas. Ensuite on proposera aux élèves de résoudre un petit problème où ils pourraient utiliser la représentation graphique : on cherche tous les rectangles dont le périmètre fait 30 cm, parmi ceux là, y en a-t-il un dont la longueur soit 4 fois la largeur ? On espère dans ce problème que les élèves pourront utiliser le cadre graphique pour résoudre le problème posé en faisant sur le même graphique la représentation des rectangles de périmètre 30 cm et des rectangles dont la longueur mesure 4 fois la largeur. Nous allons voir que la représentation graphique n'est pas encore suffisamment disponible pour cela.

Séance du lundi 26 novembre

La maîtresse fait rappeller par les élèves les séances sur les recherches de rectangles à périmètre constant. Elle propose ensuite un nouveau problème : "on travaille avec l'unité cm, on cherche un rectangle dont le périmètre fait 30 cm. Il y en a combien ?" E. beaucoup M. "on retrouve la situation de l'autre fois, il va y avoir des tas de rectangles qui ont un périmètre de 30 cm, parmi tous ceux-là je voudrais que vous me dessiniez un rectangle particulier, c'est celui qui a L, la longueur, qui fait 3 fois la largeur".

La maîtresse réexplique la consigne plusieurs fois et écrit L = 3 l et P = 30 cm.

Au cours de la préparation avec l'instituteur, on avait décidé de traiter d'abord le cas où L = 4l qui a une solution dans les entiers, pour voir que le problème était possible. J'en fais la remarque à l'enseignant qui demande aux élèves de traiter d'abord le problème L = 4 l, en disant qu'on reprendra le premier ensuite. En fait seul ce cas est traité. Ce changement est une mauvaise idée et on aurait pu le prévoir : des élèves trouvent un peu par hasard et n'ont pas envie de valider cette réponse ni de trouver une méthode qui permettrait de résoudre des cas moins évidents. Ils ont du mal à concevoir le rectangle cherché comme faisant partie de deux familles de rectangles : ceux qui ont un périmètre de 30 cm et ceux qui vérifient L = 4l. Ils ont également du mal à traiter le problème de façon arithmétique : pendant la phase de recherche, l'observateur suggère à un groupe de représenter l et L par des segments, ils le font en respectant la relation, mettent l et L bout à bout mais ils ne pensent à utiliser cela pour écrire 5 l = 15. Quand ils le font, ils ne savent pas toujours résoudre.

Cette méthode est reprise collectivement : on dessine les segments, quand on connaît l, on connait L, et on a l + L = 15. Grâce au schéma les élèves transforment en 5 x l = 15 donc l = 3. Cependant il n'est pas clair que les enfants auraient su résoudre 5 x l = 15 si la solution n'avait pas été évidente.

Les fractions et les divisions ne sont pas encore pour tous les élèves un outil suffisamment disponible pour traiter des relations comme 5l = 15. La représentation des segments bout à bout ne suffit pas pour tous les élèves à expliciter la relation.

Par ailleurs, les élèves ont du mal à prendre en compte les deux relations à la fois, d'autant plus que celle qu'ils ont déjà travaillée est privilégiée dans l'énoncé. Cette disymétrie était voulue pour que les essais ne soient pas fait complètement au hasard et que les élèves conservent le périmètre. Cependant, si les élèves savent que les rectangles de périmètre 30 cm forment une famille, qu'il y en a "une multitude" comme ils l'ont rappelé au début de la séance, ce n'est pas le cas pour les rectangles dont la longueur est le quadruple de la largeur. La variation du *rapport entre longueur et largeur parmi les rectangles de périmètre 30 cm est trop difficile à gérer pour les élèves qui n'ont donc pas d'autre moyen que des essais au hasard, à l'intérieur des rectangles de périmètre 30 cm, pour trouver le rectangle cherché. Pour qu'il en soit autrement, il faudrait que les élèves puissent voir le rectangle cherché comme faisant partie de 2 familles. Pour les aider à considérer les deux relations, il faut donner aux élèves l'occasion de travailler la deuxième relation comme ils ont travaillé la première, c'est pourquoi nous leur donnons une nouvelle consigne.*

Nouvelle consigne : trouver le plus possible de rectangles qui vérifient L = 4l et les représenter graphiquement.

Des élèves ont du mal à laisser tomber le demi-périmètre et reviennent à la situation de recherche de rectangles tels que l + L = 15

On retrouve là la difficulté à changer de point de vue déjà rencontrée à plusieurs reprises.

Samedi 1er décembre

Reprise des graduations en dixièmes ... et agrandissements "à la loupe" pour l'ensemble de la classe.

Pendant ce temps je travaille avec un groupe de 5 élèves qui ont des difficultés sur les fractions (Valérie, Virginie, Franck, Nadia, Abdoullah) : recherche de parties entières, dans un contexte de quarts de pommes ; chacun travaille sur un exemple différent : 36/4, 52/4, 75/4, 18/4, 45/4, on cherche combien on a de pommes entières.

Les enfants arrivent à résoudre ces questions, ils passent par la moitié en utilisant le plus souvent une représentation additive : Franck "9 + 9 = 18, 18 + 18 = 36, j'ai partagé en 4" mais il n'utilise pas tout seul l'écriture 36/4 = 18/2 = 9. Nadia "j'ai fait la moitié de 52, c'est 26, la moitié de 26, c'est 13" mais elle perd le fil et a du mal à exprimer son résultat final.

Pour 3 de ces élèves, il est difficile d'écouter les démarches des autres, chacun veut s'exprimer à tout instant. Ils sont cependant contents et disent à la fin de la séance qu'ils ont tout compris.

Séance du 10 décembre : jeu du pendu, fractions et division euclidienne.

Une séance a déjà eu lieu. Les élèves en rendent compte : la maîtresse choisit une fraction entre 0 et 100 et la cache, les enfants doivent trouver où se situe la fraction, entre quels entiers. Pour chaque question on dessine un élément de la potence, il faut situer la fraction avant que le pendu ne soit terminé.

Cette première phase où les élèves ne jouent qu'un rôle, qu'on va appeler celui du récepteur, avait pour but la dévolution de la règle du jeu et d'une stratégie sur les entiers : comment trouver en posant le moins de questions possible un entier situé entre 0 et 100. Cette statégie sur les entiers est suffisante pour le récepteur. L'émetteur doit maîtriser cette stratégie du récepteur pour répondre rapidement aux questions qu'on va lui poser : il doit savoir que pour répondre aux questions il lui suffit de connaître les deux entiers qui entourent la fraction qu'il a choisie. Dans la deuxième phase des élèves vont jouer l'autre rôle et répondre aux questions.

Sur le plan du contenu, on veut travailler les fractions plus grandes que 1 et faire le lien avec la division euclidienne.

Aujourd'hui on reprend le même jeu mais c'est un élève qui choisit la fraction. Chacun choisit une fraction et la situe entre 2 entiers consécutifs pour se préparer à répondre aux questions. Beaucoup choisissent des fractions décimales parce qu'ils ont déjà remarqué au cours de la séance précédente qu'elles facilitaient les calculs. D'autres traitent le problème à l'envers. Ainsi Philippe décide de choisir une fraction entre 8 et 9 avec pour dénominateur 77 : il fait 8x77 = 616 et 9x77 = 693 et choisit 664/77.

Les exemples sur lesquels a lieu le jeu collectivement sont 664/77 et 35/3.

En même temps qu'il répond aux questions, l'élève qui est au tableau visualise sa réponse sur un axe gradué. Quand le reste de la classe a déterminé l'intervalle à 1 près, le meneur de jeu donne sa fraction et tout le monde vérifie qu'elle est bien dans cet intervalle. La méthode qui s'impose dans la classe est celle des multiplications : par exemple 77/77 = 1 ; 8x77 = 616, 8 = 616/77 ; 9x77 = 693, 9 = 693/77 et 616/77 < 664/77 < 693/77.

La maîtresse propose ensuite de situer 35915/55 entre 2 entiers.

Les élèves procèdent par multiplications et encadrements : au début ils prennent des nombres beaucoup trop petits puis essaient 100, 500, 600, 700, 650, 660... A partir de 650, certains enfants ont regardé ce qui leur restait : 165. Or 165 = 3x55 ce qui leur permet de trouver le résultat : 153. Le bilan permet de produire des écritures diverses : 35915/55 = 650 + 165/55 = 650 + 3 = 653

35915 = (650x55) + 165...

Très peu d'élèves ont eu recours à la division bien qu'ils l'aient tous abordée en CM1 et ceux qui ont essayé de le faire avaient des techniques inadaptées : par exemple pour diviser 664 par 77 une élève divise séparément par les deux 7 : 66 divisé par 7, 9 fois reste 3 qu'elle écrit sous le 6, elle "abaisse" le 4 : 34 divisé par le deuxième 7, 4 fois...

contrôle du 29 janvier 1985

Après les vacances de Noël, le travail porte sur la proportionnalité et les représentations graphiques. Fin janvier, un mois après la fin du travail sur les fractions, nous avons proposé un test sur ce sujet. Le lien avec l'écriture à virgule avait été fait en décembre, en s'appuyant sur les fractions décimales et le tableau de numération.

Les élèves ont eu à traiter les exercices suivants (copie du texte distribué en supprimant la place qui était laissée pour répondre) ; il y avait 22 présents plus 1 qui est arrivé en retard et n'a traité que le dernier exercice. La maîtresse nous a donné les copies après avoir fait la correction avec les élèves : ceux-ci ont porté leurs corrections en vert comme ils en ont l'habitude mais certains ont effacé leurs réponses fausses, ce qui ne nous permet pas de repérer toutes les erreurs.

Texte ;

1. Combien y-a-t-il de fois $\frac{1}{15}$ dans 1 ?

   Combien y-a-t-il de fois $\frac{1}{7}$ dans 3 ?

2. Combien y-a-t-il d'entiers dans $\frac{97}{4}$; $\frac{154}{10}$; $\frac{275}{25}$; 37,58 ?

3. Place les nombres suivants sur l'axe gradué ci-dessous : $1+\frac{3}{4}$; 2,1 ; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{17}{10}$.

   0 1 2 3 4 5

L'axe est dessiné sur papier quadrillé, les graduations entières sont marquées de 0 à 5 avec 5 carreaux pour 1 unité.

4. Mets le signe qui convient < > ou =

27,5271	27,528
3,6	3,529
31,52	3,152
4,02	4,2
$18+\frac{1}{4}$	$18+\frac{1}{3}$
$\frac{171}{2}$	171,2
$\frac{56}{4}$	14,25

5. Un pâtissier range ses chocolats dans des sachets.
Il met 20 chocolats dans chaque sachet.
Quand il a rempli 20 sachets, il les met dans une boîte.
Il a 7845 chocolats à emballer.
Combien lui faudra-t-il de sachets ?
Combien lui faudra-t-il de boîtes ?

Exercice 1 : réussi par 19 élèves dont 6 ne répondent pas vraiment à la question mais écrivent $\frac{15}{15}$ et $\frac{21}{7}$, 1 le fait seulement dans le deuxième cas et 1 écrit $\frac{15}{15}$ fois et $\frac{21}{7}$ fois.

1 élève répond $\frac{15}{15}$ et $\frac{27}{7}$

1 élève écrit 3u dans $\frac{1}{15}$ 2u dans $\frac{1}{7}$

1 élève ne répond pas.

Exercice 2 : entièrement réussi par 10 élèves, 4 élèves font une erreur ou ne répondent pas à une des questions, 3 élèves ne fournissent une réponse juste que dans le cas de 37,58, un élève seulement dans le cas de $\frac{154}{10}$ et un autre dans ces deux cas mais pour $\frac{154}{10}$ il répond 15,0 dont on peut se demander si c'est vraiment une réponse juste, d'autant que ses réponses pour les autres fractions sont fausses ; 3 élèves ne répondent pas du tout. Dans le cas de $\frac{97}{4}$ les 3 réponses fausses sont toutes 96 ; pour $\frac{154}{10}$ il y a une réponse 150 ; pour $\frac{275}{25}$ on a une réponse 12, 2 réponses 251 et une réponse 27u + $\frac{5}{25}$; pour 37,58 la seule réponse fausse exprimée est 0u $\frac{37}{58}$ et correspond donc à une erreur de codage.

Exercice 3

Un seul élève a placé correctement les 6 points (notons que c'est un élève qui redouble à cause du français) ; en tenant compte de placements approximatifs, 4 autres élèves ont des réponses presque toutes justes : 2 élèves ont placé correctement 5 points et $\frac{9}{4}$ environ en 2,3 ; un élève a placé $1+\frac{3}{4}$ environ en 1,7 et $\frac{9}{4}$ environ en 2,2 ; un autre a fait la même chose mais en mettant de plus $\frac{5}{2}$ en 3,5. Les 17 autres élèves font au moins 3 erreurs ou non réponse.

La question la mieux réussie est $\frac{4}{5}$ (18 réponses justes) mais il faut remarquer qu'une réponse correcte est dans ce cas, puisqu'une unité vaut 5 carreaux, compatible avec une procédure erronée qui consiste à compter les traits et amène à placer par exemple 2,1 en 2,2 $\frac{5}{2}$ en 1 et $\frac{17}{10}$ en 3,4 (une élève l'a fait systématiquement mais n'a pas placé $1+\frac{3}{4}$ et $\frac{9}{4}$). Dans ce cas les réponses fausses sont un placement en 4,5 et un en 4,8.

Pour 2,1 on trouve 12 placements justes (dont 3 où 2,1 est écrit $\frac{2}{1}$) ; les réponses fausses sont des placements en 2,2 (5 fois) ou en 2,5 (1 fois).

Pour $\frac{5}{2}$ on a 12 réponses justes également, un placement en 1 et un en 3,5 dont nous avons déjà parlé, un placement respectivement en 2,2, 5,2, 4,5, 2,9.

Pour $\frac{17}{10}$ il n'y a que 9 placements justes dont un écrit $\frac{7}{10}$, les erreurs sont 3 placements en 3,4 (17 traits), 2 en 1,6, 1 en 1,8, 1 en 1, 5 et 1 en 0,9.

Les questions les moins bien réussies sont $1+\frac{3}{4}$ (3 réponses justes, 2 placements approximatifs en 1,7, 1 en 1,85 et 1 en 1,3) et $\frac{9}{4}$ (1 seule réponse juste, 5 placements approximatifs en 2,2 ou 2,3 dont 1 écrit $\frac{4}{9}$, 1 en 2, 1 en 2,5 (avec $\frac{5}{2}$) et 1 en 4,9.

Exercice 4

La moitié des élèves font au plus 2 erreurs : 2 élèves ont fourni les 7 réponses justes, 2 autres ne se trompent qu'à la dernière question et 7 élèves ne font que 2 erreurs (6 pour les 2 dernières questions et 1 pour 4,02 et la dernière), 2 élèves font 3 erreurs (les 2 dernières questions et l'avant-dernière pour l'un, 4,02 pour l'autre), 1 élève ne répond correctement qu'aux 2 premières questions ; pour les 8 autres on peut se demander si les réponses justes éventuelles (au maximum 3) ne sont pas le fruit du hasard.

Les questions les mieux réussies sont $18+\frac{1}{4} < 18+\frac{1}{3}$ (17 réponses justes, 5 inégalités dans l'autre sens) ; $27{,}5271 < 27{,}528$ et $3{,}6 > 3{,}529$ (16 réponses justes, 6 inégalités dans l'autre sens) ; $31{,}52 > 3{,}152$ (16 réponses justes, 1 =, 2 NR, 3 < pour des élèves dont les réponses semblent données au hasard).

Pour $4{,}02 < 4{,}2$ on a 10 réponses justes, 6 =, 5 > et 1 non réponse.

Les questions très mal réussies sont $\frac{171}{2} < 171{,}2$ (5 réponses justes, 16 = et 1 NR) et $\frac{56}{4} < 14{,}25$ (4 réponses justes, 13 >, 1 =, 4 NR).

A propos des fractions et décimaux on voit que les élèves répondent correctement à des questions très proches de l'institutionnalisation faite en classe (première question, ordre des décimaux "sans piège") mais que beaucoup ont encore de sérieux problèmes avec le codage : 16 élèves affirment que $\frac{171}{2} = 171{,}2$, certains écrivent $\frac{2}{1}$ pour 2,1 ; un élève fait même systématiquement cette confusion et place $\frac{4}{5}$ en 4,5 $\frac{5}{2}$ en 5,2 et $\frac{9}{4}$ en 4,9 (9,4 ne pouvait pas se placer sur la feuille).

Exercice 5

Les 23 élèves ont reconnu qu'il s'agissait d'un problème de division mais pour certains d'entre eux on peut se demander s'il ne s'agit pas d'une reconnaissance de forme sans véritable compréhension du problème : 9 élèves résolvent correctement le problème ; 7 autres ont une démarche correcte mais avec mauvaise interprétation des restes : pour 2 d'entre eux on peut penser qu'il s'agit d'un lapsus ou d'un oubli de l'énoncé ("il reste 5 bonbons et 12 boîtes", "392 sachets et 5 chocolats, 19 boîtes et 12 chocolats") ; pour 1 il s'agit d'une confusion entre décimale et reste mais le problème de division est bien compris (opération 7845 : 20 = 392,2 réponse 392 sachets + 2 chocolats) ; pour les 4 autres on peut se demander si le problème est vraiment bien compris : "il reste 19 sachets en trop, or 19 est le quotient et non le reste" ; " combien y-a-t-il de sachets : 7845 : 20 = 392 reste 5 sachets ; combien y-a-t-il de boîtes : 392 : 20 = 19 reste 19 boîtes" ; "7845 : 20 = 392, il lui faut 392 boîtes, 392 : 20 = 19, il lui

faut 19 sachets et il reste 12 chocolats" (opérations correctes) ; "il faudra 392 sachets et il lui reste aussi 5 sachets vides, il lui faudra 19 boîtes".
Une élève fait des opérations correctes mais en posant de mauvaises questions : "combien de chocolats qu'il va emballer ? 7845 : 20 = 392 reste 5 boîtes ; combien lui faudra-t-il de sachets ? 392 : 20 = 19 reste 12 sachets"
Trois élèves démarrent le problème avec une opération (7845 : 20) ou deux (20x20 en plus) en donnant au mieux une explication partielle ; l'un d'eux fait de plus une erreur de division en ne tenant pas compte du 0 ce qui donne 7845 : 2)
Trois élèves ont une mauvaise démarche. deux d'entre eux démarrent bien avec une autre interprétation du problème : il font 7845 : 400, trouvent 19 pour le quotient et 245 pour le reste, concluent correctement il faut 19 boîtes mais divisent ensuite 245 par 19 au lieu de le diviser par 20 ; le troisième fait 7845 : 20 pour les sachets (avec erreur d'opération) mais 7845 : 142 pour les boîtes (correctement) en concluant : "il a rempli 55 boîtes et il reste 35 qu'on ne peut pas prendre".
Finalement 12 élèves semblent avoir bien compris le problème même s'il y a parfois une mauvaise expression des réponses ; pour les autres il y a au moins un gros problème d'expression. On peut donc constater un certain progrès par rapport au mois d'octobre. Nous reviendrons sur la comparaison un peu plus tard. Il est vrai qu'entre les deux tests, il y a eu du travail sur la division, notamment à propos des fractions.

1.3. Proportionnalité et représentation graphique

Séance du 19 janvier : taxis.

Les élèves ont commencé une situation et en rendent compte :
Il y avait 3 taxis qui avaient chacun un tarif différent ; pour le taxi rouge, il y a 6 F de prise en charge et on paie 5 F pour chaque km ; le taxi bleu n'a pas de prise en charge et on paie 6 F par km ; pour le taxi jaune, on paie 50 F de 0 à 10 km, 90 F de 10 à 20 km, 140 F de 20 à 30 km. Ils avaient cherché le prix de courses proposées par les élèves et avaient constaté que ce n'était pas toujours le même taxi qui avait le tarif le moins cher.
Aujourd'hui on va représenter cette situation par des graphiques. La maîtresse demande aux élèves de rappeler à quelle occasion ils ont rencontré des représentations graphiques puis, par ses questions, elle amène les élèves à préciser les choix qu'il faudra faire : le choix des axes et des échelles, elle leur laisse un moment de réflexion pour faire les choix d'échelles en essayant de se servir au mieux de toute la feuille. C'est difficile et le choix de l'échelle prend du temps : on ne peut pas prendre 1 carreau pour 1 km, ça ne suffirait pas, on décide de prendre 1 carreau pour 2 km et de s'arrêter à 24. Pour l'autre axe, il faut trouver la plus grosse somme à placer : 180. Malgré le temps passé pour choisir l'échelle sur l'axe des distances et le graduer, il est difficile pour beaucoup d'élèves de trouver une graduation convenable. L'un d'eux propose 1 moyen carreau pour 10 F, ce qui est accepté : cela permet d'aller jusqu'à 200F.
La maîtresse demande aux élèves de faire la représentation graphique pour le taxi rouge en plaçant les points correspondant aux calculs déjà faits et à de nouveaux calculs. Cela ne pose pas de problème et les élèves constatent l'alignement des points sur une droite qui ne passe pas par l'origine et qui peut se prolonger jusqu'en (0,6) :"ça ne part pas de 0", "ça part de 6", "même si on ne fait pas de km, il y a quand même 6 F de prise en charge".

Séance du 28 janvier

Dans l'intervalle les élèves ont fait les représentations graphiques correspondant aux taxis rouge et bleu et s'en sont servis pour comparer les tarifs des deux taxis. La séance commence par un rappel de ce qui a été fait. Les élèves ont du mal à exprimer clairement ce qui a été fait : "quand je veux calculer le nombre de km, je regarde sur mon graphique et je trouve le prix", "on a regardé combien on avait de francs pour le taxi rouge", "on a pris des exemples de km et après on devait les faire en taxi rouge", "on regardait la distance et après on pouvait trouver le prix". La maîtresse redemande pourquoi on peut faire cela et comment. Enfin une élève répond "on fait 2 axes, d'un côté on marque les prix, de l'autre les distances jusqu'à 24 et puis..." la maîtresse l'interrompt.
Les autres élèves ont beaucoup de mal à exprimer que le prix d'une course est représenté par un point, ils savent tracer le graphique et s'en servir, décrivent plutôt leurs actions et perçoivent plus les lignes de rappel que les points : "on fait des essais, on a des traits, des pointillés...".
Le premier travail consiste aujourd'hui à tracer le graphique qui représente le tarif du taxi jaune (forfait 50 F jusqu'à 10 km, 90 F de 10 à 20 km, 140 F de 20 à 30 km). Les élèves le font rapidement et constatent que les points "restent sur une même ligne", une ligne étant évidemment une horizontale.

Pendant le reste de la séance on utilise le graphique pour répondre à des questions sur la comparaison des tarifs. Dans la première série de questions, la maîtresse propose des distances et demande quel est le taxi le plus avantageux. Les élèves répondent vite en lisant sur le graphique puis vérifient par le calcul mental. Ils savent très bien utiliser le graphique pour répondre à ces questions mais leurs explications montrent qu'ils *voient les représentations comme un ensemble de segments et non comme un ensemble de points* :

E. "on regarde le trait s'il est en dessous des autres traits" M. "le trait..." E. "la droite" M. "Explique-toi mieux" E. "le taxi rouge, la ligne..., la droite rouge, je regarde si elle est plus basse que les autres" M. "Tu y es presque, quelle partie de la droite tu vas regarder ?" E. "la droite rouge" M. "la droite rouge, si je regarde la droite rouge, des fois elle est au-dessus, des fois elle est en-dessous". E. "je regarde le point 14". M. "Voilà, tu regardes le point qui représente 14 km et si il est, répète-le..." ...

Dans la deuxième série de questions, la maîtresse donne des prix et demande avec quel taxi on peut aller le plus loin. Les élèves se servent facilement du graphique pour répondre et justifient en disant "on regarde le point le plus loin". La vérification par le calcul est plus difficile. Ils ne pensent pas à utiliser le calcul direct qui leur suffirait le plus souvent pour vérifier la lecture graphique. Ils veulent trouver la procédure de calcul qui leur permet de trouver les distances à partir des prix. Pour le taxi rouge, le recours à la désignation de la distance et du prix par des lettres x pour la distance et y pour le prix, les aide à expliciter la procédure de calcul $(x \times 5)+6 = y$ et à l'inverser "on fait y moins 6 et on divise le résultat par 5". Une représentation sous forme d'opérateurs est également proposée aux élèves qui l'utilisent (au niveau collectif) pour inverser.

<u>Séance du 4 février 1985</u>. Reprise de la situation des taxis avec d'autres valeurs numériques et un tarif supplémentaire.

La maîtresse distribue la feuille polycopiée suivante :

Voici 4 compagnies de taxis
A : 6 F le km et 8 F de prise en charge
B : 7 F le km, pas de prise en charge
C : 60 F jusqu'à 10 km
110 F de 10 à 20 km
180 F de 20 à 30 km
D : 70 F jusqu'à 10 km, puis 5 F le km supplémentaire

Quelle compagnie de taxis propose le tarif le plus intéressant pour un trajet long de 5 km ; 14 km ; 21 km ; 29 km ; 10,5 km ; 15,2 km ; 23,8 km ?

Quelle compagnie offre le voyage le plus long pour la somme de 84F ; 130F ; 155F ; 162,50F

Trouve un moyen de donner une réponse correcte immédiate.
Vérifie ensuite par le calcul (Tu peux présenter les résultats dans un tableau).

Des élèves réclament tout de suite du papier millimétré pour travailler. Le forfait pose encore quelques questions à certains élèves ; la plupart ont quelques difficultés à comprendre le tarif D et il est repris collectivement pour quelques distances : 5 km, 6 km, 9 km, 10 km, 11 km, 12 km, 14 km, 21 km, avec placement des points sur un graphique au tableau. Le calcul de proche en proche se fait facilement mais le saut de 14 à 21 n'est pas évident pour tout le monde.

Il y a deux procédures utilisées : commencer par le graphique ou par le tableau. Certains élèves ont cependant une procédure intermédiaire qui consiste à visualiser sur le graphique les calculs pour chaque distance :

D
. C
A
. B
──────►
5

<u>Dernière séance de février</u> (après les vacances). Péages d'autoroute : une autre situation de proportionnalité proposée sur la feuille polycopiée reproduite ci-dessous

Voici les distances indiquées sur les cartes du péage de l'autoroute du Sud, Paris - Lyon. En sortant à Villefranche Limas, on paie 92F quand on vient de Paris.

Peux-tu dire combien on paie en venant de Paris à chacune des sorties (on suppose que le prix payé est proportionnel à la distance parcourue et on arrondit les prix demandés au franc le plus proche).

km	F
Fleury	0
Ury	17
Nemours	29
Dordives	44
Courtenay	67
Joigny	84
Auxerre Nord	110
Auxerre Sud	121
Nitry	148
Avallon	166
Bierre les Semur	191
Pouilly	221
Beaune	263
Châlon Nord	285
Châlon Sud	292
Tournus	312
Mâcon Nord	338
Mâcon Sud	351
Belleville	369
Villefranche ville	383
Villefranche Limas	400

Les élèves utilisent de préférence des procédures "scalaires". Au début, pour certains élèves, les procédures utilisées sont plutôt du type "la fin justifie les moyens" (en reprenant la terminologie d'A. Robert), et mélangent parfois les francs et les kilomètres : pour trouver le prix jusqu'à Ury, deux élèves divisent 92 par 17 une autre fait 29 - 17 = 12 pour Ury, 44 - 29 = 15 pour Nemours, 67 - 44 = 23 pour Dordives 84 - 67 = 17 pour Courtenay et s'arrête là sur question de l'observateur : doit-on payer plus cher pour Dordives ou pour Courtenay ? Un élève fait même les opérations suivantes : 400 - 383 = 17 ; 92 - 17 = 75.

Les élèves ne contrôlent pas leurs résultats par le sens qu'ils ont dans le problème posé. Après un premier bilan destiné à redonner du sens à la question posée, le problème est de trouver le prix payé pour 1 km. Pour trouver le prix par km, beaucoup d'élèves font la division de 400 par 92. D'autres font une erreur d'ordre de grandeur et proposent 2,3 F par km. Le moyen de s'en sortir pour tous est une recherche par approximations : 1 F du km c'est trop, 50 centimes c'est encore trop, 25 centimes c'est encore un peu trop, 20 centimes, ce n'est pas assez, 22 centimes ..., 23 centimes ça va !

Aucun élève n'a pu faire la division pour trouver le prix de 1 km. Mais quand ils connaissent le prix de 1 km, les élèves transforment le problème en celui de faire des multiplications par 23, ce qui sera fait à la séance suivante.

1.4. Aires

A partir du 2 mars, on aborde les séquences sur les aires déjà décrites ailleurs[1]. L'enseignant disposait de la brochure n°48 de l'IREM de Paris 7 décrivant les séquences mises au point avec R. Douady (voir 1ère partie). Nous signalons rapidement ce qui a été fait dans cette classe au cours des séances observées. Nous décrivons plus précisément une séquence sur les aires de rectangles

2 mars

Première phase :

La maîtresse distribue une figure dessinée sur papier quadrillé. La consigne est

1) de reproduire la même figure, ce qui donne une surface S_1

2) de dessiner une autre surface S_2 qui ait une forme différente et qui occupe autant de place.

Cette séquence qui n'avait pas eu lieu dans les expérimentations précédentes avait pour but d'introduire la possibilité de faire intervenir un jeu de cadres entre le papier blanc et le papier quadrillé. Elle permettait aussi de démarrer le travail sur les aires en ayant un moyen de désigner l'invariant qui nous intéressait autrement que "place occupée" qui amenait le malentendu dont nous avons parlé dans la première partie.

Dans les productions des élèves, trois conceptions se dégagent :

- référence à l'encombrement : garder la même hauteur et la même largeur
- garder le même nombre de carreaux
- garder le même périmètre (carreaux du bord)

De plus des élèves essaient de garder le plus possible la forme : ils décalquent la surface et la retournent.

[1] voir 1ère partie de cette thèse ainsi que "petit x" n° 6 et 8 ou brochure n°48 de l'IREM de Paris 7.

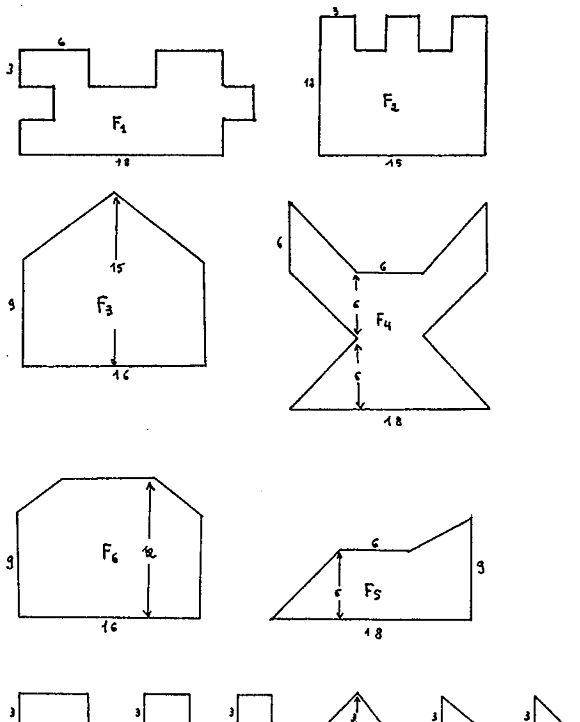
Pour compter les carreaux certains enfants procèdent en comptant un par un mais d'autres découpent la surface en rectangles.
Pour fabriquer une surface qui ait le même nombre de carreaux, les enfants ont souvent voulu fabriquer un rectangle en essayant de décomposer 192 en produit : un élève a trouvé 16x12, un autre a trouvé 19x10+2 (les autres rectangles avec dimensions entières ne tenaient pas dans la feuille). Isabelle a fait un carré de 17 de côté et s'aperçoit au bilan que c'est trop grand : elle enlève 97 carreaux (5x17+12), il lui reste un rectangle avec une bosse (11x17+5)
Le bilan permet de préciser les attentes : garder la longueur et la largeur est utile quand on veut ranger les surfaces dans une boîte, ce qu'on voulait c'est garder la quantité de papier à l'intérieur. Deux surfaces qu'on peut superposer par l'intermédiaire du papier calque (qu'on le retourne ou non), deux surfaces qui contiennent le même nombre de carreaux occupent la même place, on dit qu'elles ont la même aire.
On demande ensuite aux élèves de proposer une surface S_3 d'aire plus petite que S_1 et une surface S_4 d'aire plus grande. Les élèves se réfèrent tous au nombre de carreaux.

2ème phase : décalquer S_1 sur papier blanc, fabriquer ainsi une nouvelle surface de même aire et de même forme que la précédente et trouver un moyen pour faire une surface de forme différente et de même aire. Les élèves veulent tous mesurer les dimensions, ce n'est que quand on leur précise qu'ils ont le droit de découper qu'ils pensent. au découpage et recollement On peut penser que, vu le contexte, les élèves ont essayé de reconstituer d'une manière ou d'une autre le nombre de carreaux, ce qui amenait certains à recourir à des procédures périmétriques.

Suite à l'expérimentation précédente sur les aires, nous avons introduit le nombre de carreaux pour avoir une première définition de l'aire qui ne soit pas liée à la forme de la surface. Ce faisant, nous introduisions une mesure, donc des nombres et la tentation pour les élèves de se ramener à un travail sur les nombres par n'importe quel moyen. Cela nous confirme dans notre hypothèse sur l'importance d'une phase de travail sur les aires sans mesure.

Entre le 2 mars et le 22 mars, la maîtresse a proposé aux élèves les situations destinées à différencier aire et périmètre[2] mais nous n'avons pu les observer.

<u>22 mars</u>
Pavage des 5 surfaces décrites dans la première partie en utilisant les pavés indiqués. Nous les reproduisons pour mémoire en format réduit.



2 voir 1ère partie de cette thèse ainsi que "petit x" n° 6 et 8 ou brochure n°48 de l'IREM de Paris 7.

La maîtresse a modifié la situation prévue : elle n'a pas voulu donner les pavés tout de suite et demander le pavage explicitement mais faire découvrir le pavage comme moyen de comparaison. Elle demande aux élèves de classer les 5 surfaces de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande.
Première procédure quasiment unanime : les élèves sortent leur règle et mesurent les côtés et calculent le périmètre ! Isabelle "j'ai mesuré S_3 et S_5 j'ai trouvé 54, ils ont le même périmètre donc ils occupent la même place" ! Finalement une élève signale qu'on avait dit que le périmètre n'a rien à voir avec la surface. La maîtresse demande alors de rappeler ce qui avait été fait au cours des séances précédentes :
- on avait décalqué une figure et fabriqué une autre figure avec un périmètre plus grand et une aire plus petite,
- on avait une figure, on en a fait une autre en découpant et recollant, elles avaient la même aire et il fallait pas la même longueur de laine pour mettre autour;
- on avait fait des rectangles différents avec la même aire qu'on avait conservée par découpage et recollement de tous les morceaux bord à bord, et on avait trouvé les trois cas possibles : périmètre plus grand, périmètre plus petit, même périmètre.
Même après cette mise au point les élèves ont du mal à changer de procédure et aucun ne pense au pavage : ils proposent de superposer S_3 et S_5 et de regarder en transparence devant la fenêtre, ce qui est la procédure économique pour ces deux surfaces là (les deux petites maisons). La maîtresse les empêche d'utiliser cette procédure pour les autres surfaces en disant qu'on veut trouver une autre méthode. Ce n'est que quand elle annonce qu'elle va leur distribuer des enveloppes contenant des petites formes de couleur que les élèves comprennent qu'on attend d'eux un pavage.
Dans cette classe les pavés sont les suivants : rectangle bleu (3x6) noté rb, carré rouge (3x3) cr, rectangle jaune (3x4) rj, triangle vert (demi rectangle jaune) tv, triangle blanc (demi carré rouge) tb, triangle rose (demi triangle blanc) tr.
Comme dans toutes les classes observées, des élèves se débrouillent bien sur le plan géométrique et pavent assez vite, mais d'autres ont des difficultés avec les 3 dernières surfaces.
Pendant la fin de la séance, les élèves ont le temps de trouver les résultats directs du pavage et quelques relations très simples :
aire de S_1 8 rb ou 16 cr parce un carré rouge c'est la moitié d'un rectangle bleu
aire de S_2 13 rj ou 26 tv parce que le triangle vert c'est la moitié du rectangle jaune
aire de S_3 32 tv
aire de S_4 40 tr ou 20 tb
aire de S_5 30 tv.

La négociation de la consigne qui a eu lieu ici appelle quelques commentaires:
- l'association du classement des aires à une certaine mesure de la surface : le travail sur les aires n'a pas fait intervenir la mesure jusque là, toutes les comparaisons se sont faites par inclusion ou par découpage et réorganisation des morceaux, le seul moment où ont pu jusque là intervenir des nombres, c'est la toute première séance où on a pu utiliser le comptage de carreaux pour comparer des surfaces. Pourtant quand la maîtresse demande aux élèves de classer les surfaces, leur première idée est de se ramener au classement de nombres par l'intermédiaire ... du périmètre qui semble la seule mesure à leur disposition. Cela montre le poids de la conception nombre quand il s'agit de rendre compte de grandeurs et notamment d'aires (voir première partie).
- On voit ici que la différenciation de l'aire et du périmètre comme moyen d'apprécier la place occupée est encore très fragile et elle ne résiste pas face à l'attrait du recours à la mesure pour faire des comparaisons : les élèves ont besoin d'une mesure des surfaces mais n'ont pas pu l'inventer. On avait aussi constaté dans d'autres classes que l'amalgame entre variations de l'aire et du périmètre d'une surface fonctionnait comme un véritable obstacle épistémologique.
- Dans cette classe, le recours au périmètre a été beaucoup plus massif que nous ne pouvions le craindre, compte tenu des séances précédentes. Outre les raisons déjà évoquées (grand désir des élèves d'utiliser des mesures pour comparer des surfaces déjà observé dans d'autres classes[3], amalgame entre variations de l'aire et du périmètre), on peut l'attribuer aussi au manque de capitalisation de ces élèves et à leur difficulté de réinvestissement observés en maintes occasions. En effet, la différenciation entre aire et périmètre a été longuement travaillée dans les séances précédentes. Nous n'y avons pas assisté et ne connaissons donc pas l'institutionnalisation exacte qui en a été faite. Cependant, on peut penser qu'elle a existé puisque les élèves

[3] voir entretiens par deux au CM2 relatés dans la première partie

peuvent rappeler ce qui s'est passé dans ces séances, mais ils ne peuvent le réinvestir dans une situation nouvelle.

- nous constatons cette fois encore[4] que la maîtresse ne veut pas dire aux élèves ce qu'elle attend d'eux. Prévoir que le pavage des surfaces avec une unité est un moyen de répondre au problème alors même que cet outil ne leur est pas fourni et qu'ils doivent donc imaginer l'outil en même temps que son utilisation, est hors de portée des élèves.

Nous n'avons pas posé la question de cette façon à d'autres classes et n'avons donc aucun point de comparaison. Il nous paraissait en effet inutile de jouer aux devinettes et nous prévoyions que, sans le pavage, les élèves utiliseraient la comparaison directe par superposition pour comparer les surfaces (voir 1ère partie et brochure 48). Ce n'est d'ailleurs pas ce qui s'est passé ici puisque les élèves ont mesuré le périmètre une fois de plus !

Entre le 22 mars et le 26 avril, hors vacances de Pâques, cette situation a été terminée : introduction des termes "unité", "mesure de la surface" distinction entre pavage et mesure ; choix d'une unité commune pour mesurer toutes les surfaces, comparaison de toutes les surfaces. Je n'ai pas observé ces séances.

26 avril : mesure de l'aire d'un rectangle avec une unité de forme rectangle.[5]

On distribue aux élèves une feuille sur laquelle sont dessinés 3 petits rectangles (1x2), (3x4), (1,5x5). La consigne est de choisir un de ces petits rectangles et de dessiner sur la feuille blanche un rectangle pavable avec le petit rectangle choisi, puis d'écrire un message à un camarade de façon que le récepteur puisse reconstruire exactement le même rectangle. Les messages sont les suivants (orthographe corrigée) ; nous les avons classés en fonction de la première version, les questions du récepteur et réponses de l'émetteur sont données ensuite :

** 4 messages ne donnent que les dimensions en cm :*

M1 : 9 cm de longueur et 12 cm de largeur ;
M2 : la longueur du carré fait 8 cm et la largeur fait 9 cm ;
M3 : je fais 9 cm de longueur et 20 cm de largeur ;
M4 : en longueur 30 cm en largueur 20 cm remarque du récepteur : ma feuille ne fait pas 30 cm ; l'émetteur transforme le 30 en 15 ; question du récepteur : quelle est l'unité pour le paver ; réponse: le grand rectangle

** 7 messages donnent les dimensions finales et le rectangle choisi pour paver avec, dans 4 cas, le nombre de petits rectangles utilisés pour le pavage et, dans un cas, le nombre de reports dans chaque direction :*

M5 : Mon R mesure 12 cm de long et 9 de large, si ça ne marche pas, prends la plus grande unité et dessine la 9 fois ;
M6 : 15 petits rectangles qui fait 1,5 sur 5 hauteur 7,5 cm longueur 15 cm ;
M7 : tu prends la feuille en longueur et tu traces un trait de 9 cm en largeur et un trait de 4 cm en longueur et tu prends l'unité du milieu et tu mets l'unité dans le rectangle ;
M8 : Longueur 12, largeur 6,5 et tu prends le rectangle n°2, tu paves et ça fera 6 petits rectangles (remarque du récepteur : je ne comprends pas ton pavage car tu as mis 6,5 au lieu de 6).
M9 : pavable avec le petit rectangle mesure L = 20 cm l = 8 cm ;
M10 : $15\frac{1}{2}$ de hauteur et $10\frac{1}{2}$ sur le côté 3 rectangles en hauteur et 6 rectangles sur le côté ;
M11 prends le rectangle qui mesure 5 cm de longueur et 1,5 cm de largeur et pave le en 40 fois, cela devrait faire L = 20 cm l = 15 cm remarque du récepteur : si je multiplie 1,5x40 cela ne fait pas 15 cm (le rectangle final est réussi quand même)

** 10 messages donnent la méthode de construction sans les dimensions :*

M12 : reporte 3 fois la plus grande unité vers le bas et tu auras mon rectangle
M13 : vertical 11 rectangles, horizontal 9 rectangles, reconstruis mon rectangle ; question : quel rectangle ; réponse : le plus grand ; question : je n'arrive pas à le faire, donne d'autres précisions ; réponse : 20 cm de longueur et 13,5 cm de largeur ;
M14 : prends le plus petit rectangle 2 cm en longueur et 1 cm en largeur et x le en 5 (question du récepteur : je le multiplie par 5 en longueur ou en largeur ? réponse : les deux) ;
M15 : tu prends le premier rectangle, tu fais le double de la largeur, mais pas la longueur ;
M16 : j'ai pris le rectangle le plus grand, la longueur de mon rectangle fait 3 petits rectangles dans le sens de la longueur, la largeur de mon rectangle fait 3 petits rectangles dans le sens de la largeur j'ai utilisé 9 rectangles ;
M17 : j'ai choisi le rectangle qui a la plus petite aire et j'ai pu le paver 40 fois, 10 pavages en longueur et 4 en largeur jusqu'à 40 ; question du récepteur : combien de cm il fait en tout ? réponse : 10 en longueur, 8 en largeur ;
M18 : j'ai fait une figure avec un rectangle qui mesure 4 cm de longueur et 3 cm de largeur, j'ai mis 16 rectangles, 4 en longueur et 4 en largeur ;
M19 : prends la plus longue unité reporte la 4 fois en longueur et 3 fois en largeur en tout tu dois la reporter 12 fois ;
M20 : reporte 3 fois la plus petite figure longueur et encore 3 fois en largeur;
M21 : 4 grands rectangles en ---> et 5 grands rectangles en | ; question : comment as-tu multiplié ? réponse : 15 en largeur 16 en longueur ;
1 message se rattache à ce type mais est incompatible avec la consigne :
M22 : tu fais le double du rectangle du milieu par ex. 1,5 en haut ---> 3 1,5 en bas ----> 3, 1,5x2=3, 1 de côté ---> 2, 1 de l'autre côté ----> 2 ; récepteur : je ne comprends pas.

** 1 message indique seulement l'unité choisie et le nombre total de reports :*

[4] voir commentaire de la séance du 19 novembre
[5] séance prévue dans la brocure 48 mais qui n'avait pas encore été expérimentée.

M23 : j'ai fait ma figure avec le rectangle qui mesure 5 cm en longueur et 1,5 cm en largeur, et j'ai mis 21 rectangles ; question du récepteur : combien fait le grand rectangle que tu dois paver ? réponse : la longueur fait 14,5 la largeur fait 11.

Remarques :

- Deux messages sont incompatibles avec la consigne de construction : M22 (l'élève a en fait doublé chacun des rectangles) et M13 (il est possible que l'élève n'ait pas respecté la consigne ou qu'il ait tracé son rectangle avec l'unité de 1,5 sur 5 en se servant de la dimension 1,5 dans les 2 sens et en se trompant : 13,5 = 1,5x9, mais 11x1,5 ne fait que 16,5, peut-être a-t-il fait 13x1,5. Sur sa feuille il a essayé de repaver avec le rectangle 3 sur 4 mais les reports sont très inexacts). D'autres ont mesuré le rectangle après avoir fait des reports et les dimensions finales ne correspondent que grossièrement aux choix faits : par exemple M10 trouve $15\frac{1}{2}$ pour 3x5 et $10\frac{1}{2}$ pour 6x1,5.
- Le message du 4ème type et la plupart des messages du 3ème type ne permettent pas d'obtenir un rectangle sûrement superposable. Quand ils le permettent, c'est le plus souvent parce que l'élève a fait le même nombre de reports dans les deux directions ou que le récepteur a demandé les dimensions. Il y a souvent ambiguïté sur la direction des reports : est-ce qu'on reporte la longueur du petit rectangle pour avoir la longueur du grand ou le contraire ? Par exemple le message M17 avant la question du récepteur comporte cette ambiguïté alors que ce n'est pas le cas de M16 qui précise bien dans quel sens il place le petit rectangle pour obtenir le grand.
- Une autre ambiguïté provient du fait que, pour certains élèves, le rectangle le plus grand est le plus long, pour d'autres, c'est celui qui a la plus grande aire.
- Les messages qui indiquent le mode de construction sont les plus fréquents ; quand les deux élèves ont employé ce type de message, ils se sont bien compris
- Les élèves cherchent à avoir un message du même type que celui qu'ils ont envoyé et demandent des informations dans ce sens ; ceux qui ont donné les dimensions souhaitent un rectangle superposable et ils réclament les dimensions du rectangle de leur partenaire.
- Le nombre de reports peut être compris comme un report de segments ou un report de rectangles : voir la réaction du récepteur du message M11.
- Certains élèves n'ont en fait pas respecté la consigne de construction : ils ont reporté une même dimension du rectangle unité dans les deux sens, ce qui fait qu'ils n'ont pas forcément un rectangle pavable avec l'unité choisie. Cette erreur a pu se produire pour l'émetteur ou pour le récepteur.
- L'élève qui avait donné le message M23 avait fait remarquer l'erreur de mesure de son partenaire (M8) mais fait à son tour une erreur de mesure en donnant ses dimensions. En fait pour la plupart des élèves les mesures ne sont pas précises et les angles ne sont pas droits, ce qui a pour conséquence que des côtés qui devraient avoir même mesure ont parfois 1 cm d'écart.

Finalement 11 messages donnent spontanément les dimensions du rectangle obtenu, 19 donnent leur mode de construction parmi lesquels 17 précisent quel rectangle unité ils ont utilisé, même si c'est parfois de façon ambigüe.

La discussion qui a lieu ensuite permet de pointer que, pour avoir un rectangle superposable, le message le plus court est celui qui donne les dimensions. Quand le message indique seulement le mode de construction, les rectangles des deux coéquipiers ne sont pas toujours superposables pour 2 raisons : non indication de la dimension à reporter ou report d'une même dimension du petit rectangle dans les deux sens : par exemple l'élève qui a reçu le message M17 a fait un rectangle qui contenait 80 fois l'unité : il a reporté 10 fois 2 cm dans un sens et 4 fois 2 cm dans l'autre, l'émetteur avait fait au contraire un rectangle de 10 sur 8 en reportant 10 fois 1 cm dans un sens et 4 fois 2 cm dans l'autre.

La situation prévue dans la brochure 48 (pages 82 à 85) était légèrement différente de celle qui a été réalisée. La consigne donnée ici n'était que la première partie de la consigne prévue. Le récepteur devait ensuite paver à son tour le rectangle obtenu avec l'unité de son choix, ce n'est qu'alors qu'on procédait à la comparaison des deux. C'est-à-dire que les élèves devaient faire un pavage dans le sens de la construction d'un rectangle et un pavage dans le sens de l'analyse : trouver un ou plusieurs rectangles qui pavent.

La maîtresse a trouvé –sans doute à juste titre– la situation trop complexe et surtout la consigne trop longue ; elle n'a donné que la première partie, pensant peut-être donner la deuxième ensuite. On peut se demander si la consigne entière aurait produit les mêmes procédures.

Une partie des rectangles obtenus n'étaient pas superposables au rectangle de l'émetteur parce que les élèves ont eu tendance à décrire leur construction plutôt qu'à donner une description de l'objet géométrique obtenu. Ils ont de toute façon tendance à décrire leurs actions mais ils pouvaient y être encouragés ici par le fait qu'on ne voyait pas, si le récepteur n'avait pas lui-même à paver, pourquoi le rectangle devait être pavable avec une des unités. Un message qui ne donnait que les dimensions, comme ceux qu'on avait produits en novembre *avait beaucoup de chances d'être vu comme ne respectant pas le contrat : on n'avait pas fait n'importe quel rectangle, il fallait en rendre compte dans le message. Si on avait donné la consigne entière, il est possible que les élèves aient donné encore plus fréquemment le mode de pavage, voulant obtenir des rectangles identiques et pavés de la même façon.*

On voit en effet agir là deux "clauses" du contrat didactique :

- il faut produire des messages différents de ceux qu'on a déjà faits

- il faut donner le plus d'informations possible.

Nous voulions dans cette situation que les élèves aient à relier le report des rectangles unité (mesure de l'aire unidimensionnelle) au report des dimensions du rectangle unité (mesure des dimensions du rectangle final) et aborder ainsi l'aspect bidimensionnel de l'aire : si r a comme dimensions l et L, que R a comme dimensions n.L et k.l, alors r se reporte nxk dans R. Bien que les questions visées se soient effectivement posées, notamment à cause des ambiguïtés des messages, cette situation émetteur - récepteur ne semble pas bien adaptée à l'objectif. Peut-être était-il plus pertinent de mettre les élèves uniquement dans le rôle du récepteur avec des rectangles bien choisis et en demandant tous les pavages possibles avec les unités : pour que le pavage soit possible, il faut les dimensions du grand rectangle soient chacune multiple d'une des dimensions du petit.

Par ailleurs, le choix du rectangle 1,5x5 à la place de 2x5 fait ici que le rectangle 1x2 ne pave plus tous les rectangles qu'on peut obtenir. Cela limite le nombre de cas où il y a plusieurs pavages possibles. Cela n'avait pas d'importance vu le déroulement de la situation. Le choix des unités avait été fait pour qu'il y ait un contrôle possible dans le cas où émetteur et récepteur pavaient le même rectangle avec des unités différentes. Cela n'aurait pas toujours été possible ici : par exemple le rectangle 6x20 peut être pavé avec 10 rectangles 3x4 ou avec 16 rectangles 5x1,5 mais il n'y a plus de contrôle possible par un autre pavage, sauf à inventer de nouvelles unités.

10 mai. Etude de l'aire 1 cm² : sur papier à petits carreaux production de surfaces variées y compris des rectangles et des triangles, même chose pour l'aire 1/2 cm² et pour l'aire 1/4 cm² ; introduction des unités légales cm², mm², dm² à partir du papier millimétré, recherche des relations entre ces diverses unités ; calcul de l'aire d'un rectangle de 4,7 cm sur 2,3 cm.

17 mai. Aire du parallélogramme

La maîtresse fait rappeler ce qu'est un parallélogramme (côtés parallèles 2 à 2). Aussitôt des élèves, pour calculer l'aire, proposent de faire 2 fois la longueur et 2 fois la largeur ! La maîtresse fait appel à ce qui a été fait pour l'aire du rectangle. Le premier élève interrogé commence encore par donner la formule du périmètre.

La maîtresse distribue ensuite une feuille polycopiée avec un parallélogramme dessiné et les consignes suivantes : dessine un rectangle de même aire, calcule l'aire de ce parallélogramme, dessine plusieurs parallélogrammes de même aire.

La moitié de la classe mesure les longueurs des côtés (6 cm et 4,5 cm) et dessine un rectangle de dimensions 6 cm et 4,5 cm.

La maîtresse fait référence à la première situation rencontrée "comment on avait fait des surfaces de même aire tout au début, on ne savait pas calculer l'aire d'un rectangle." Les élèves pensent alors au découpage et recollement mais certains repartent alors complètement sur cette activité là : Nathalie propose de découper le parallélogramme suivant la diagonale.

La maîtresse redemande la caractérisation du rectangle : les côtés 2 à 2 parallèles et égaux sont cités très vite mais il faut 10 minutes pour que les élèves pensent à l'angle droit pour différencier rectangle et parallélogramme.

Quand le rectangle attendu est dessiné, la maîtresse demande de vérifier toutes les dimensions parce que les élèves ne sont pas persuadés que ce n'est pas la même chose. Au moment où on conclut que l'aire du rectangle est 24 cm², Djillalli proteste : "ça, c'est l'aire du rectangle, le parallélogramme c'est 27 cm²"! La maîtresse introduit le mot "hauteur".

La maîtresse demande ensuite aux élèves de fabriquer d'autres parallélogrammes d'aire 24 cm². Ils proposent d'autres rectangles d'aire 24 cm² (8x3, 2x12) et dessinent à partir de ce rectangle un parallélogramme de même aire par découpage et recollement, et ce n'est que quand la maîtresse leur demande si l'on peut couper ailleurs qu'ils proposent plusieurs parallélogrammes fabriqués à partir du même rectangle.

On peut noter encore quelques problèmes de confusion aire-périmètre : certains élèves ne sont pas d'accord avec le parallélogramme obtenu à partir du rectangle 8x3 parce que $8+8+3+3 \neq 24$.

Par ailleurs l'élève qui est au tableau a dessiné le parallélogramme suivant (côtés obliques tracés tous les deux à l'intérieur du rectangle).

La dernière consigne proposée est de fabriquer d'autres parallélogrammes d'aire 24 cm^2 ayant un côté de 6 cm. Il n'y a pas de bilan ce jour là.

On constate que les confusions aire - périmètre sont encore très présentes et ressurgissent à la moindre occasion. Par ailleurs les élèves s'accrochent autant qu'ils le peuvent au cadre numérique. Il est toujours difficile d'obtenir qu'ils fassent interagir les cadres géométrique et numérique.

24 mai

A chaque rangée, on donne le périmètre d'un rectangle, la consigne est de dessiner le plus possible de rectangles ayant ce périmètre. Les périmètres proposés sont : 20 cm, 14 cm, 16 cm, 18 cm.

Notre projet est de leur demander, dans un deuxième temps, de calculer l'aire de ces rectangles avec l'intention de travailler les produits de nombres fractionnaires ou décimaux : le périmètre étant fixé, avec une valeur assez petite, il y aura peu de rectangles de dimensions entières répondant à la question et les élèves seront obligés de sortir des entiers pour en trouver beaucoup.

Cette fois certains élèves ont commencé par rechercher des rectangles d'aire 20 ou 18... Quand ils se sont approprié la consigne, les élèves décomposent le périmètre en deux nombres pairs qu'ils partagent en deux, par exemple 18 = 10+8 = 12+6 ... Ils cherchent ainsi des dimensions entières pour leur rectangle en traduisant à nouveau le périmètre comme 2l + 2L. La maîtresse transforme la consigne en "trouver une longueur et une largeur connaissant le demi-périmètre mais ce n'est pas repris tout de suite par la plupart des élèves.

Les réponses de chaque groupe sont récapitulées collectivement au tableau .

Pour 18
6 3
8 1
7 2
5 4
Enfin un élève demande "il y a que des nombres entiers de cm ? puis propose
5,5 3,5. Les autres nombres en ,5 sont alors proposés assez vite :
6,5 2,5
8,5 0,5
7,5 1,5
4,5 4,5 C'est tout ! Comme la maîtresse et l'observateur leur demandent si c'est vraiment tout, cela repart
4,9 4,1
4,6 4,4
Observateur : Et quand on aura fini tous les dixièmes, il y en aura encore ? Les élèves répondent alors les centièmes, les millièmes...

Toute la classe réfléchit ensuite pour le périmètre 16. Marion propose 2 et 8. D'autres protestent vigoureusement "elle a encore fait l'aire !". Finalement, cela donne :
6 2
5 3
5,5 2,5 Pierre propose 4 et 5. On vérifie : le demi périmètre fait 9. Il n'a pas vu la relation entre les dimensions et le demi périmètre. Après explication les élèves traduisent le problème en "chercher 2 nombres dont la somme est 8".
6,5 1,5
7,5 0,5
4,5 3,5
7,99 1 centième qu'ils viennent écrire 0,01
7,999 et 1 millième. Il y a des milliers de solutions.

Pour 14, on a
5 2
4 3
6 1
7 0 C'est impossible !
3,99 0,01 Ah non ! on vérifie le total et quelqu'un propose 3,01
6,999 0,001
6,5 0,5
3,5 3,5
3,7 3,3

Pour 20
6 4
8 2
9,5 0,5
5,5 4,5
7,25 2,75
4,750 5,250
7,60 2,40
5,50 4,50 déjà mis c'est pareil que 4,5 5,5
5,98 4,02

Ce déroulement appelle quelques commentaires :

- On constate une fois de plus que des élèves ont tendance à redémarrer sur une consigne traitée prédemment en réutilisant les méthodes qu'ils utilisaient dans le problème précédent (ici aire constante).
- Les élèves traduisent le problème dans le cadre numérique mais ne considèrent dans un premier temps que des nombres entiers : les fractions et décimaux n'ont pas encore suffisamment le statut de nombres pour qu'on puisse les utiliser sans une autorisation spéciale :"il y a des nombres entiers de cm?" On peut les trouver comme résultat d'une opération mais il n'est pas encore naturel d'y avoir recours de soi-même.
- Malgré les conclusions établies au cours de séances précédentes, les élèves ne ramènent pas la condition sur le périmètre à une condition sur la somme des dimensions et, même quand le maître le propose, certains ont encore du mal à s'en emparer. Cela signifie qu'en fait ils ne sont pas vraiment passés dans le cadre numérique. Ils restent accrochés à une formule et ont des difficultés à faire interagir les cadres numérique et géométrique pour traiter le problème efficacement tout en donnant du sens à ce qu'ils font.
- Quand le processus a démarré, il fonctionne assez bien en s'accélérant. Il semble bien que les élèves aient appris un certain nombre de choses sur les décimaux, qu'ils peuvent les mettre en œuvre collectivement et avec une aide légère même s'ils ne le font pas encore seuls.

La maîtresse donne alors une nouvelle consigne "Vous allez reprendre vos calculs, seulement, voyez-vous ici, on les a dictés un peu dans le désordre, alors déjà vous allez refaire un tableau en rangeant un petit peu ces résultats. Et dans un deuxième temps, vous rajouterez une colonne supplémentaire à votre tableau et qu'est-ce qu'on pourrait s'amuser à calculer ?" Les élèves répondent "les aires !". La consigne est reprise trois fois en précisant que chacun s'occupe de son groupe et qu'on peut se partager le travail pour calculer les aires.
Après discussion on décide de classer les rectangles pour une dimension, par exemple la largeur, du plus petit au plus grand.
Pour calculer l'aire, on fait le produit des dimensions. Première constatation : les rectangles ont le même périmètre mais n'ont pas la même aire. Les élèves observent ensuite le sens de variation sur les résultats.

L'observation de l'année s'arrête là.

Test du 21 juin 1985

Ce contrôle de fin d'année portait sur les décimaux et sur les aires. Il y avait 21 élèves présents. Deux d'entre eux ont donné 2 feuilles de réponse et une en a donné 3 ; les modifications de réponse portaient sur la question 4 et pour un aussi sur la question 1. Le texte est reproduit ci-dessous :

Question 1. Compare les nombres a et b

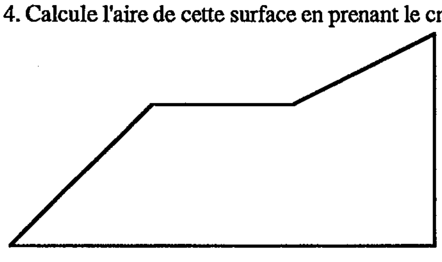
a	b
74,378	73,9
74,39	75,29
75	74,4
74,3807	74,378002
74,30708	74,308

Question 2; Ordonne les nombres suivants
75,02 ; 74,378 ; 73,9 ; 74,4 ; 74,3807 ; 75 ; 74,5 ; 74,3078 ; 74,378002 ; 75,012
du plus petit au plus grand.

Question 3. Coche la bonne affirmation.

entre ... et ...	il n'y a aucun nombre	il y a un nombre	il y a plusieurs nombres	Exemples
74 et 75 74,01 et 74,012 74,39 et 74,4				

4. Calcule l'aire de cette surface en prenant le cm^2 comme unité (surface reproduite ici en réduction)



5. Peux-tu trouver un carré d'aire 25 cm^2 ?
Peux-tu trouver un carré d'aire 30 cm^2 ?

Si oui, donne la mesure du côté en cm. Si tu ne peux pas donner une mesure exacte, donne une mesure approchée.

La première partie de ce test est empruntée à un chercheur zaïrois qui avait rencontré R. Douady quelques années auparavant : nous avions fait passer son questionnaire dans les classes où nous travaillions à ce moment là. Nous avons repris cette partie de son texte parce que le choix des variables nous convenait bien. La surface proposée pour la mesure est la surface S6 qui n'avait pas été étudiée en classe cette année là. La dernière question est celle qui avait été posée dans les entretiens individuels l'année précédente.

Ordre

* La première question est entièrement réussie par 17 élèves (dont 1 pour sa 2ème version, la première comptait 2 erreurs) et 3 élèves ne font qu'une erreur : seule une élève a 4 réponses fausses sur 5 ; elle avait déjà 6 réponses fausses sur 7 en janvier.

* La deuxième question est presque entièrement réussie par 12 élèves (dont 1 a oublié 75, ce qui n'est pas très significatif) ; 3 ont fait une seule interversion : 74,378002 < 74,378 ;, 2 en ont fait 2 (75,02 < 75,012 et 74,378002 < 74,378 dans un cas, 74,3807 < 74,378 dans l'autre) ; 1 en fait plusieurs ; 2 élèves utilisent systématiquement l'ordre "entier" (comparaison des parties décimales comme des entiers pour des décimaux de même partie entière) et un presque.

La plupart des élèves ont donc une bonne réussite sur l'ordre des décimaux, cependant quelques-uns font des erreurs ou retournent au modèle "entier" dans une tâche complexe.

Intercalation

En ce qui concerne l'intercalation, les résultats sont beaucoup moins bons : si 17 élèves donnent une réponse correcte dans le premier cas avec au moins 2 exemples, il n'y en a plus qu'un pour la 2ème question (plus 1 qui oublie le 0 mais a des réponses correctes partout ailleurs) et 4 pour la 3ème.

* Trois élèves font des erreurs pour les nombres entre 74 et 75 ($\frac{25}{3}$ pour le premier ; $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{25}{3}, \frac{24}{3}$ pour le second ; $\frac{74}{6}, \frac{74}{4}, \frac{74}{3}$ pour le troisième) et 1 élève répond "non".

* Entre 74,01 et 74,012 dix élèves donnent des réponses qui correspondent au modèle "entier" pour l'ordre : 74,05 ... 74,08 74,09 74,010 et 2 élèves font la même chose en omettant de plus le 0 ; deux élèves répondent qu'il n'y a que 74,011 et deux autres 74,11 ; 1 répond $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ mais on ne sait si c'est à cette question ou à la précédente pour laquelle il avait produit beaucoup de fractions, et 1 répond $\frac{74.01}{6}$ $\frac{74.01}{4}$ (elle écrit sa réponse en face de la 3ème question mais cette réponse est cohérente avec celle faite à la première question).

* Entre 74,39 et 74,4 cinq élèves répondent "aucun" 3 mettent un "oui" et deux mettent un "non"dans la colonne correspondante avec probablement le même sens, deux élèves mélangent des exemples justes et des exemples faux, un répond $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$(toujours le même élève) et un donne des réponses s'appuyant sans doute sur le modèle "entier" qui est utilisé par cette élève à toutes les questions (74,12, 74,10, 74,35).

On voit là que la plupart des élèves ont encore des difficultés avec l'intercalation au moins dans le cas où les deux bornes n'ont pas le même nombre de décimales.

Aires

* Pour l'aire de la surface donnée on a 15 réponses justes plus une au 3ème essai et 1 qui fait les calculs partiels justes mais ne conclut pas.

Un élève trouve 108 (36x3) : il a sans doute pensé que le triangle du haut compensait celui du bas ; un élève trouve 96 par 36 + 36 +24 sans qu'on puisse comprendre d'où viennent ces résultats, un a cherché l'aire des rectangles qui enveloppent : 36x3 + 9x2. Enfin un élève a fourni 2 réponses : une avec l'aire des morceaux correcte (sauf 9,5 pour 9) et un total faux et une autre feuille où il calcule le périmètre.

L'élève qui a réussi au 3ème essai avait dans les deux premiers fait des évaluations des cm^2 d'abord en dessinant des bandes de hauteur 1 cm (elle avait trouvé 81) puis en essayant de faire des compensations entre les morceaux (elle avait alors trouvé 30+36+24 = 90).

* Pour le carré d'aire 25, on a 17 réponses justes, 2 font une division par 4 et donnent une réponse approchée (l'un 6x4 = 24, l'autre 6,5x4 = 26), 2 ne répondent pas.

* Pour le carré d'aire 30, on a 7 réponses correctes avec un encadrement au dixième près au moins, 2 réponses approchées dans les entiers (5).

Cette fois 5 élèves recourent à la division par 4 et répondent 7,5 plus un qui se corrige et passe de 7,5 à 5,4 et 6 élèves ne répondent pas.

Dans leurs réponses plusieurs élèves font encore des confusions entre les unités de longueur et d'aire. Quelques élèves utilisent encore des procédures périmétriques dans ce contexte de résolution de problème assez complexe. On constate cependant que les réponses sur le carré sont bien meilleures que celles que nous avions eues l'année précédente au cours des entretiens par deux : peut-être y a-t-il eu diffusion de réponses correctes dans la classe ; peut-être aussi le travail sur les aires et sur les nombres a-t-il été plus approfondi et les résultats plus stables.

1.5. Evolution des élèves.

Des questions voisines ont été posées dans des tests différents. Nous avons comparé les résultats pour voir l'évolution des élèves sur plusieurs points :

- *Numération :*

Le problème des billes (octobre 84) mettait en œuvre des groupements dans le sens de la multiplication avec un facteur 10 et celui des chocolats (janvier 85) dans le sens de la division avec un facteur 20. Pourtant celui des chocolats semble mieux réussi, ce que l'on peut vérifier dans le tableau suivant

Billes / Chocolats	A	B	C	total
A	4	3	4	11
B	2	2	2	6
C	2	0	1	3
total	8	5	7	20

Nous avons mis dans la catégorie A pour les billes les élèves qui ont une résolution correcte ou incomplète, pour les chocolats ceux qui ont une réponse correcte avec éventuellement une mauvaise interprétation des restes qui semble plutôt relever du lapsus.

Dans la catégorie B, nous avons regroupé les élèves qui ont pour les billes une réponse du type 300 ou 2370 (pas assez de multiplications par 10) et pour les chocolats des opérations correctes avec des formulations douteuses.

Dans la catégorie C nous avons regroupé dans les deux cas les non réponse et autres erreurs.

Notons que les 2 élèves qui sont en A pour les billes et en C pour les chocolats ont dans ce dernier cas bien commencé mais adopté ensuite une mauvaise démarche : il semble s'agir dans ce cas d'un problème de division plus que de numération.

Parties entières

Nous avons sur ce point comparé les résultats d'octobre et de janvier : les résultats sont assez stables

octobre / janvier	0 ou 1 erreur	2 erreurs ou plus	total
0 ou 1 erreur	9	4	13
au moins 2 erreurs	2	5	7
total	11	9	20

Axe gradué - longueurs

Nous avons comparé les résultats à la question sur les longueurs d'octobre 84 à celle sur l'axe gradué de janvier 85. Cette fois les résultats semblent se dégrader ; il est vrai que le travail concernant l'axe gradué est plus complexe puisque les longueurs sont emboîtées. Dans un travail non publié (présenté à l'Ecole d'Eté de 1986), G. Vergnaud avait constaté que les élèves de 6ème et 5ème faisaient des erreurs sur la graduation, même dans le cas de nombres entiers à cause de cet emboîtement

octobre / janvier	≤ 1 erreur	2 ou 3 erreurs	≥ 4 erreurs	total
0 ou 1 erreur	4	1	0	5
2 ou 3 erreurs	3	3	1	7
4 erreurs ou plus	3	1	4	8
total	10	5	5	20

Ordre sur les décimaux

Nous avons comparé les résultats aux contrôles de janvier et juin 1985. Tous les élèves sauf une ont nettement progressé puisqu'ils font au plus une erreur à la première question ; une élève est même passée de 2 réponses justes sur 7 à des réponses toutes justes (y compris à la 2ème question). Nous comparons ci-dessous la question sur l'ordre de janvier au classement des 10 décimaux, dont 6 de même partie entière, en juin :

janvier / juin	≤ 2 erreurs	3 erreurs ou plus	total
0 ou 1 interversion	10	4	14
au moins 2 erreurs	0	6	6
total	10	10	20

Notons que sur les 4 élèves qui ont au moins 3 erreurs en janvier et au plus une interversion en juin, 2 n'avaient que 3 erreurs en janvier dont 2 sur les comparaisons de fractions et décimaux, mais les deux autres ont nettement progressé, passant de 1 ou 2 réponses justes - peut-être dues au hasard - à au plus une interversion dans le classement de 10 décimaux en juin.

Les comparaisons montrent donc que les élèves ont nettement progressé sur la numération et les décimaux. Il reste cependant des difficultés pour l'intercalation et le placement de nombres sur un axe gradué.

2. Observation dans la classe de 6ème en 1984 - 1985

Nous avons travaillé avec le même professeur que l'année précédente avec cette fois un groupe d'élèves moyens : trois classes fonctionnaient avec des horaires parallèles et par groupes de niveaux dans les matières principales. Nous avons observé le groupe moyen en mathématiques, qui comptait 26 élèves. Il y avait dans ce groupe 6 élèves qui venaient des classes de CM2 avec lesquelles nous avions travaillé l'année précédente (2 de CM2A et 4 de CM2B). Quelques changements de groupe ont eu lieu dans le courant de l'année.

Les conditions de travail étaient à peu près les mêmes que l'année précédente : ces séances étaient encore considérées comme des séances de travaux dirigés un peu en marge du cours de mathématiques mais elles ont cette fois davantage été intégrées par le professeur à l'ensemble du cours, et elles ont été évaluées. De plus nous avons pu récupérer une bonne partie des productions des élèves.

Nous avons observé et enregistré une séance par semaine au cours du premier semestre. Dans la deuxième partie de l'année des contraintes d'emploi du temps nous ont obligée à interrompre les observations. Au premier trimestre nous avons travaillé sur les fractions et décimaux en interaction avec le cadre géométrique, en janvier sur la proportionnalité en mettant en interaction les cadres numérique et graphique.

2.1. Fractions et décimaux

Séance du 18 octobre

Consigne : tracez un segment de droite de la longueur que vous voulez.
Le professeur distribue aux élèves des bandelettes de papier de couleur de même longueur avant de donner la fin de la consigne :
Envoyez un message à un camarade pour qu'il dessine un segment de même longueur ; on n'a pas le droit de se servir de la règle graduée, seulement de l'unité de longueur ; attention, toutes les bandes ont la même longueur mais pas nécessairement la même largeur.
Les élèves sont à la fois émetteur et récepteur.

Cinq des 6 élèves qui avaient déjà traité cette situation en CM2 ont fait intervenir des fractions écrites sous forme numérique 1L+ $\frac{1}{2}$L ; 1l + $\frac{3}{4}$; 2L + $\frac{1}{2}$L + $\frac{1}{4}$L ; 3 fois + la moitié d'un $\frac{1}{4}$; 2 l'unité + l'unité pliée + $\frac{1}{4}$; la sixième a voulu faire intervenir des fractions alors qu'elle n'en avait pas besoin et a écrit son message sous 2 formes : "4 fois la moitié de L, une unité et 2 moitiés de L".
Six autres élèves ont utilisé des fractions écrites en français : 1 rectangle et demi ; 1 rectangle + la moitié ; 2 fois le rectangle + le quart du rectangle ; un rectangle et trois quarts ; "3 rectangles écart" ; une longueur + une largeur + la moitié de la largeur.

Huit élèves ont utilisé des entiers, soit qu'ils aient eu de la chance (en traçant un segment de 10 cm, l'unité étant de 5 cm), soit qu'ils aient "arrangé" leur segment après coup (on voit les traces de gomme, le professeur n'avait pas demandé d'utiliser le stylo à bille parce que l'usage est de faire la géométrie au crayon et que c'est ce qu'elle exigeait habituellement des élèves), soit qu'ils aient arrondi.

Un élève s'est contenté d'un message imprécis : un rectangle et un bout du rectangle

Un élève a écrit 3x1x2 (il avait dessiné une ligne brisée composée de 3 segments à angles droits de longueur 3, 1, 2)

Quatre élèves n'ont pas respecté la consigne : 2 ont utilisé des cm et 2 la largeur (dont 1 déjà cité qui a utilisé la moitié de la largeur).

Certains élèves donnent des indications sur la position de leur segment dans la feuille.

Finalement 6 groupes sur les 12 (dont 1 groupe de 3) ont réussi pour les 2 segments.

Au cours du bilan, le professeur reprend les messages avec les élèves pour leur faire expliquer pourquoi certains groupes se sont compris et d'autres non ; ceux qui utilisent des fractions sont explicités. Elle demande à chacun de fabriquer avec son unité des demis, des quarts, la moitié d'un quart qu'il s'agit de nommer : la plupart des enfants pensent qu'il se reporte 6 fois dans l'unité avant de vérifier que c'est 8. Les enfants proposent alors de continuer à plier : les seizièmes et les trente-deuxièmes sont évoqués sans manipulation. Les élèves remesurent les 2 segments en utilisant les fractions.

$\frac{3}{4}$ est exprimé comme $3 \times \frac{1}{4}$ et comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

La mise au point doit être terminée dans le courant de la semaine.

Pour les élèves qui étaient dans les CM2 observés l'année précédente, cette situation a été reconnue comme devant faire intervenir des fractions puisque même l'élève qui n'en a pas besoin s'arrange pour les utiliser.

<u>25 octobre</u>

Les élèves travaillent sur une feuille à petits carreaux polycopiée de façon que les carreaux soient encore visibles.

Un segment AB est dessiné en tête de la feuille, de longueur 15 carreaux ; le texte est le suivant :

Soit AB un segment de longueur l

1) Dessiner des segments de longueurs respectives $\frac{1}{3}l$; $\frac{2}{5}l$; $\frac{1}{6}l$; $\frac{4}{6}l$; $\frac{1}{10}l$; $\frac{4}{10}l$; $\frac{7}{10}l$; $\frac{7}{10}l$; $\frac{2}{3}l$; $\frac{3}{15}l$; $\frac{8}{15}l$.

2) Classer dans l'ordre croissant les mesures des longueurs de ces segments (en prenant l pour unité)

3) Fabriquer de nouveaux segments en mettant bout à bout deux ou plusieurs des segments déjà dessinés. Exprimer la mesure de leur longueur en prenant l comme unité. Trouver plusieurs écritures pour cette mesure.

Les élèves peuvent réclamer du papier à petits carreaux s'ils en ont besoin.

Le professeur présente cette activité comme un test (pour que je puisse récupérer les productions).

Les élèves rencontrent beaucoup de difficultés : ils réclament des bandelettes pour les plier, il n'est pas prévu de leur en fournir, le professeur leur demande de s'en passer mais la plupart ont du mal à se débrouiller autrement, à se servir des carreaux. C'est difficile même pour les élèves qui ont travaillé sur les fractions l'année précédente : on peut penser qu'ils sont restés au niveau de la manipulation, qu'il n'y a pas eu vraiment de construction conceptuelle.

Certains élèves ne tiennent compte que du dénominateur et représentent de la même façon $\frac{1}{6}$ et $\frac{4}{6}$. Des dérapages apparaissent dans l'utilisation des carreaux : 3 carreaux pour $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ interprété comme 2 cm (de 1 à 3) ; $\frac{2}{5}$ comme 2,5.

Dès le début du travail, comme les élèves ont l'air assez désemparés, le professeur reprend ce qui a été dit sur les fractions mais toujours en termes de pliage et de partage, pas en termes de reports :

P. "si je veux représenter $\frac{1}{3}$, en combien de parties je vais plier mon segment ?" E. "en 3"

P. "en 3 parties, mais cette fois-ci, puisqu'on vous a dit le nombre de carreaux, c'est plus facile de partager des carreaux que de partager quelque chose qu'on ne connaît pas. Or combien y-a-t-il de carreaux ?" E. "15"

P. "il y en a 15, si vous voulez partager en 3, vous pouvez plier la feuille, mais elle serait froissée, ce n'est pas la peine, alors il suffit de réfléchir et vous avez appris à l'école primaire à faire ce partage. Comment fait-on un partage de 15 carreaux quand nous en voulons le tiers ?". E: "on divise 15 par 3" P : "c'est une opération de division. Vous n'avez pas appris à faire ça ?" E. "si".

Le professeur fait traiter 2 exemples collectivement : $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ représentés respectivement par 5 et 3 carreaux et conclut "Est-ce que tout le monde peut continuer sur ce modèle, ... c'est un principe de division, de partage de segments"

La séance se solde par un échec : 10 élèves seulement représentent correctement toutes les longueurs (dont 2 des ex-CM2B) ; 5 élèves font quelques erreurs (dont 3 des CM2) ; 12 élèves n'ont rien compris (dont 1 du CM2A) et recourent à des procédures numériques diverses. Parmi eux, un élève représente systématiquement le nombre de carreaux fourni par le dénominateur, un autre représente la différence entre le dénominateur et le numérateur (de 1 à 3 ...) un autre mélange ces procédures avec la confusion des codages fraction et virgule : 2/5 représenté par 2,5 carreaux.

Pour l'ordre, les erreurs sont la plupart du temps dues au mauvais tracé des segments, beaucoup d'élèves se contentant de redessiner les segments dans l'ordre, 5 élèves ne font rien. Finalement 9 élèves fournissent l'ordre correct (dont 2 des CM2) et 1 élève du CM2A a l'ordre correct avec 2 oublis (ses segments étaient presque bien dessinés, les 2 erreurs étant de 0,5 et 1,5 carreaux respectivement pour $\frac{4}{10}$ et $\frac{4}{6}$, elles n'affectaient pas l'ordre).

Une élève écrit les fractions dans l'ordre de **NxN** : $\frac{1}{3} < \frac{1}{6} < \frac{1}{10} < \frac{2}{3} < \frac{2}{5} < \frac{3}{15} < \frac{4}{6}$...

Pour les sommes, 8 élèves n'ont rien fait, 6 élèves ont produit des exemples corrects (dont 1 ex-CM2A et 1 ex-CM2B), 4 élèves donnent des sommes seulement en nombre de carreaux, 2 élèves ajoutent respectivement numérateurs et dénominateurs et 3 font d'autres erreurs.

Cette situation était prévue pour que les élèves remettent en service le report utilisé à la séance précédente pour définir les fractions, sans faire de pliage : le report doit être cette fois relié à la multiplication et à la division. En réalité le travail de la séance précédente n'a pas été décontextualisé du tout et les élèves ne peuvent pas se passer du pliage. L'interdiction de plier les a peut-être empêchés d'anticiper les résultats d'un pliage qui a été évoqué et non réalisé. Les élèves qui étaient l'année précédente dans les CM2 observés se débrouillent un peu mieux que les autres, sauf un, ce qui montre qu'il y a eu pour eux un certain apprentissage sur les fractions.

Un des malentendus avec le professeur vient de ce qu'il fait comme si tous les élèves avaient travaillé sur les fractions en CM2, ce qui n'est pas sûr, et même si c'est le cas, il se peut qu'un bon nombre d'entre eux ne les aient abordés que comme opérateurs et ne les reconnaissent pas du tout dans une situation de mesure.

De plus, par ses questions, elle pose le problème dans le cadre numérique en termes de nombre de carreaux et de division, bloquant la procédure pliage. Il était bien prévu que les élèves utilisent le nombre de carreaux, mais cela devait être un moyen à leur charge pour éviter de plier.

En réalité, en envisageant cette situation, nous avions négligé un point qui s'est révélé important dans les représentations que les professeurs se font de leur rôle (voir chapitre 6) qui est que le professeur enseigne et les élèves apprennent . Donc, pour ce professeur, comme pour beaucoup d'autres, les élèves ne peuvent pas faire quelque chose qu'on ne leur a pas enseigné explicitement : on ne peut les interroger que sur quelque chose qu'ils connaissent depuis l'école primaire ou qu'on leur a enseigné depuis.

<u>8 novembre</u>

La séance du 8 novembre est consacrée à une reprise sur le cahier de la séance précédente. Il s'agit aussi d'institutionnaliser ce qui a été fait au cours de la première séance.

En fait, on assiste ici à un conflit de conceptions entre le professeur et l'expérimentateur. Nous donnons ci-après quelques extraits[6] *du déroulement de la séance qui vont nous permettre de l'expliquer.*

Le professeur demande de rappeler ce qu'on a fait à la séance précédente. Une élève dit qu'on a partagé un segment. Le professeur fait préciser qu'il avait une longueur de 15 carreaux et annonce aux élèves qu'ils vont refaire sur le cahier le même travail qu'à la séance précédente. Elle demande de rappeler la technique trouvée pour faire $\frac{1}{3}$. Les élèves parlent de pliage mais le professeur leur fait remarquer que le pliage c'était la première fois et qu'on avait trouvé mieux la deuxième fois. A ce moment des élèves proposent la division et le professeur reprend avec les élèves :

P. On avait divisé par... E. 3 P. par 3, pour obtenir le ... E. tiers P. pour obtenir des sixièmes, on divise par ... E. 6 P. on divise par 6, on avait aussi demandé la dernière fois $\frac{4}{6}$l, alors une fois qu'on a divisé par 6, pour en obtenir 4, quelle est l'opération qu'il faut faire ? E. multiplier P. oui, multiplier par ... E. 4. P. 4. Bien, alors, on va les reprendre les uns après les autres...

Des élèves sont ensuite appelés au tableau pour traiter les exemples.

Cette présentation fait que les fractions sont traduites en nombre de carreaux et que les élèves ne raisonnent que sur les entiers. Ils peuvent de cette façon résoudre le problème proposé mais il n'y a pas de progrès conceptuel : pour expliquer que $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ les élèves comptent les carreaux au lieu de raisonner sur le lien entre les tiers et les sixièmes. D'ailleurs pour tracer $\frac{1}{6}$ au tableau, le professeur fait diviser 15 par 6 en posant la division au lieu de prendre la moitié du tiers ; elle vérifie que les élèves savent que le ",5" représente un demi carreau.

Quand elles sont toutes représentées, l'ordre des fractions est obtenu simplement en comptant les carreaux. De même les additions ne se font que sur le nombre de carreaux et l'écriture finale en quinzièmes est purement formelle, les élèves ne la font qu'après coup quand on le leur demande et tous ne peuvent pas la donner. Le professeur a donné à chercher $\frac{1}{3}$l + $\frac{2}{3}$l, $\frac{3}{15}$l + $\frac{8}{15}$l, $\frac{1}{10}$l + $\frac{1}{6}$l, $\frac{2}{5}$l + $\frac{7}{10}$l en précisant "si vous êtes obligés de les

---

[6] Les parties qui correspondent à des transcriptions de bandes sont données, comme les consignes, avec un caractère plus petit et une typographie plus serrée

mettre bout à bout et de les dessiner, ça ne me dérange pas mais je préfère que vous arriviez à compter les carreaux".

Après la correction de $\frac{1}{3}$ l + $\frac{2}{3}$l en carreaux, le professeur précise qu'il faut retraduire en l et ne pas se contenter d'une réponse en carreaux. J'interviens pour demander si on aurait pu se passer des carreaux pour trouver que $\frac{1}{3}$ l + $\frac{2}{3}$l = 1l. Beaucoup d'élèves répondent non. Une élève de l'ex-CM2A dit que $\frac{1}{3}$l + $\frac{2}{3}$l = $\frac{3}{3}$l. Le professeur reprend "3 tiers de l, c'est une longueur l." La plupart des autres élèves n'ont pas compris et quand le professeur leur demande combien de cinquièmes il faut pour refaire toute la longueur, ils répondent 3 aussi !

J'interviens en revenant au pliage :

O. Quand on a plié les bandes, on avait combien de cinquièmes dans une unité ? E. 5.
P. Alors, il faut combien de cinquièmes pour faire une unité ?" E. 5
P. C'est en prenant les 5 cinquièmes les uns à la suite des autres qu'on aura toute la longueur, donc si on veut avoir une égalité possible, à quoi va être égal 5 cinquièmes de l ? E. C'est la longueur.
P. On regarde si vous avez compris encore une fois. Maintenant, combien faut-il de sixièmes de l pour faire toute la longueur ? E. 6.
P. Et combien faudra-t-il de dixièmes de l pour faire toute la longueur ? E. 10
P. Et combien faudra-t-il de quinzièmes de l ? E. 15 ....
P. 3 tiers, 15 quinzièmes, c'est toujours la même chose, ça donne toute la longueur.

Il semble finalement que tous les élèves se convainquent que $n \times \frac{1}{n} = 1$.

La correction se continue... Pour $\frac{3}{15}$l + $\frac{8}{15}$l, un élève propose 11 carreaux. Le professeur demande combien fait 1 carreau, cela permet de traduire en $\frac{11}{15}$.

Un élève ne comprend pas, le professeur reprend en carreaux et demande ce qu'il manque pour faire une unité et fait écrire $\frac{11}{15}$l + $\frac{4}{15}$l = 1l

Pour $\frac{2}{5}$l + $\frac{7}{10}$ l, les élèves utilisent toujours les carreaux : 16,5 carreaux, c'est-à-dire 6 + 10,5. Ils peuvent dire que ça fait 1 l + 1,5 carreaux donc 1l + $\frac{1}{10}$ mais ne peuvent traduire tout ceci en $\frac{11}{10}$ malgré la demande pressante du professeur : ce qu'ils ont vu sur les fractions ne leur permet pas de concevoir des fractions plus grandes que l'unité ni de penser qu'elles sont légitimes.

J'interviens pour demander si on ne pouvait pas se débrouiller plus facilement sans compter les carreaux, (le professeur me fait remarquer que "ça, ils ne le possèdent pas")

O. 1 cinquième, est-ce que je peux mettre des dixièmes dedans ?
Certains enfants répondent "non", d'autres protestent "si".
O. Qu'est-ce que c'est $\frac{1}{10}$? On a dit qu'il y a combien de dixièmes dans 1 unité entière? E 10 O. Et les cinquièmes ? il y a combien de cinquièmes dans 1 unité entière ? E : 5 O. Alors dans 1 cinquième, il y a combien de dixièmes ? E: 1 O. Vous avez partagé votre unité en 10 pour les dixièmes, en 5 pour les cinquièmes, donc dans 1 cinquième, il y a combien de dixièmes ?
E. répète 1. O.Bon alors je mets 1 dixième pour 1 cinquième, pour le 2ème cinquième un autre dixième, pour le 3ème cinquième un autre dixième... alors 5 cinquièmes = 5 dixièmes ? E non O. on a dit que pour une unité il fallait 10 dixièmes, pour 1 cinquième, il vous faut combien de dixièmes ? E 2
O. oui, pour 1 cinquième, il vous faut 2 dixièmes. Alors pour 2 cinquièmes, ça fait combien de dixièmes ? E. 4 O. répète... Alors, quand vous êtes là, vous avez 2 cinquièmes qui fait 4 dixièmes, et 7 dixièmes. E. 4 cinquièmes, ça fait 8 dixièmes. O. répète et 5 cinquièmes ? Des élèves disent 10, d'autres 12.
P. Je crois que le problème n'est pas là, ils n'arrivent pas encore à avoir compris que un tiers plus deux tiers, ça en fait 3, c'est ça le problème. Vous pourrez leur faire compter les dixièmes... mais à partir du moment où...
O. tant qu'ils n'ont pas compris ça, on ne peut pas avancer.
P. C'est pour ça que le problème d'abstraction des nombres décimaux, vous ne pourrez pas le faire.
O. Il faut comprendre que dans une unité, on a 10 dixièmes... puisqu'on l'a partagée en 10.
P. tout ceci explique pourquoi les décimaux, vous n'arrivez pas à les manipuler hein, c'est que pratiquement, vous n'avez toujours pas acquis une chose qui est du CM1, c'est-à-dire que quand on fait les parties, quand on divise, on partage, et que quand on a dix dixièmes, on a une unité. Si vous en avez 3 d'un côté et 7 de l'autre, vous avez encore vos 10 dixièmes, si vous en avez 10 et 1, ça fait ? E. 11 (...)
O. Bon, des dixièmes, vous en mettez combien dans votre unité ? E. 10
O. et des cinquièmes ? E. 5 O. alors, il vous faut combien de dixièmes pour faire 1 cinquième? E. Ben 2. O. Oui, il vous faut 2 dixièmes pour faire 1 cinquième, voilà, c'est tout ! C'est ça qu'il faut comprendre ! E. Ah ! (...)
O. Les cinquièmes, ils sont plus grands ou plus petits que les dixièmes ? E. plus grands
O. et il faut combien de dixièmes pour faire 1 cinquième? E. 2
O. il vous faut combien de quinzièmes pour faire 1 cinquième? E. 3
O. 3, d'accord, si je mets 3 quinzièmes bout à bout, ça fait 1 cinquième, encore 3 quinzièmes, encore 1 cinquième, 3 + 3 + 3 + 3 + 3, 5 fois 3, 15. C'est ça qu'il faut vous mettre dans la tête.

La séance précédente a été un échec dans la mesure où la majorité des élèves ont fait beaucoup d'erreurs et ont totalement dérapé. Le professeur ne peut laisser les élèves sur cet échec, il lui faut cette fois leur donner le moyen de réussir, et ce moyen, c'est de les ramener sur un terrain connu : le nombre de carreaux et la division. Rappelons qu'à cette époque, les fractions n'étaient pas au programme de 6ème alors que la division en faisait partie et était un enjeu important de ce programme, les professeurs de 6ème déplorant beaucoup que les élèves du CM2 ne sachent plus faire de division ni s'en servir. Le professeur s'est laissé convaincre du fait que les erreurs *des élèves sur les décimaux venaient de ce qu'ils ne donnaient pas de sens aux dixièmes, centièmes etc... et que le sens était plus accessible sur des fractions plus simples. Mais il n'est pas sûr que les élèves peuvent comprendre et la séance précédente a conforté ses doutes. Il leur donne donc des moyens de réussir quand même l'exercice proposé. Il ne peut pas perdre de temps sur quelque chose d'inaccessible. L'observateur, lui, a observé des classes de cours moyen qui réussissaient ce genre d'exercice, il est persuadé que les élèves peuvent réussir sans qu'on transforme la tâche en un comptage de carreaux. Il pense qu'il faut institutionnaliser ce qui a été fait à la première séance en repartant du pliage. On assiste ainsi à un coup de force de l'observateur qui ne va pas forcément avoir des résultats positifs sur l'apprentissage des élèves et qui oblige le professeur à reprendre son autorité en disant aux élèves que leur incompréhension explique leurs erreurs sur les décimaux.*

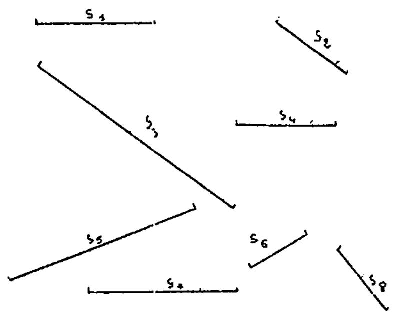
En concertation avec le professeur, nous demandons aux élèves de reprendre la même chose avec 12 carreaux pour 1 unité et de représenter $\frac{1}{6}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{1}{15}$. Le travail est à peine commencé et les élèves doivent le terminer à la maison.

Nous avons les productions de 18 élèves sur ce travail à la maison :
2 ont recommencé le travail fait en classe avec une unité de 15 carreaux
1 a représenté correctement les 5 fractions demandées
6 (dont 4 des CM2) ont fait une erreur pour $\frac{1}{15}$; une élève (ancienne du CM2A) a aussi essayé de représenter avec cette nouvelle unité les fractions du 8 novembre mais a fait des erreurs dues au fait qu'elle a représenté $\frac{1}{10}$ par "1 carreau et $\frac{2}{8}$ de carreaux", comme elle le dit ele même.
1 a représenté correctement $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{15}$ mais a confondu $\frac{3}{4}$ avec $\frac{1}{4}$ et $\frac{6}{8}$ avec $\frac{1}{6}$; elle a fait des divisions.
2 ont représenté correctement $\frac{1}{6}$ $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{8}$
2 ont représenté correctement $\frac{1}{8}$ et $\frac{6}{8}$
1 seulement $\frac{1}{6}$
1 n'a rien de juste mais des longueurs approximativement correctes : a-t-il mélangé les carreaux et les cm ?
2 n'ont rien de juste.

On voit que le travail sur le sens des fractions n'a pas vraiment eu lieu pour beaucoup d'élèves : il est parfois difficile de savoir ce qui motive leurs réponses mais certains prennent 6 carreaux pour $\frac{1}{6}$....

15 Novembre

Il s'agit au cours de cette séance de faire le lien entre la mesure avec une bandelette, en utilisant éventuellement le pliage, et la graduation d'une demi-droite, avec l'intention de donner du sens à l'écriture décimale à virgule en la rattachant à l'écriture fractionnaire.
On distribue aux élèves la feuille polycopiée reproduite ci-dessous en réduction :



1) Comparer les longueurs des segments.
2) quelle est la mesure des segments avec l'unité ?

Les élèves disposent d'une unité de mesure qui fait environ 4,5 cm et d'une grande bande de papier de longueur 29,7 cm. Pour la comparaison, les élèves peuvent mesurer avec l'unité fournie ou simplement reporter les longueurs emboîtées sur la grande bande et les représenter par des points : les travaux précédents sur les fractions ont porté sur des mesures, on s'attend donc, en conformité avec le contrat didactique usuel, à ce que les élèves mesurent mais on espère voir apparaître la deuxième procédure en vertu d'une autre clause du contrat didactique qui sous-entend que si on fournit du matériel, c'est pour s'en servir ! Si la deuxième question n'était pas posée tout de suite sur la feuille mais plus tard, cela favoriserait sans doute davantage cette deuxième procédure.

Comme prévu, le contrat précédent sur les mesures est très fort et la plupart des élèves mesurent avec l'unité en se servant du pliage avant de faire les comparaisons. En fait, pour beaucoup d'élèves, les comparaisons des segments sont faites à l'œil, ce qui explique qu'on trouve beaucoup d'ordres justes avec des mesures fausses. Cependant un élève, suivi par 1 ou 2 autres, a reporté les longueurs des segments sur la grande bande pour faire facilement les comparaisons.

Finalement, sur 25 élèves

- 6 (dont 4 des CM2) rangent les segments dans l'ordre et donnent des mesures correctes (en 1/2, 1/4, 1/8 et éventuellement 1/16)
- 4 élèves (dont 1 des CM2) font la même chose mais avec 1 ou 2 erreurs de mesure ($1+\frac{1}{8}$ au lieu de $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$; $1+\frac{1}{6}$ au lieu de $1-\frac{1}{6}$; mesures trop approximatives qui amènent à dire que $S_2 = S_4 = \frac{3}{4}$)
- 11 élèves rangent les segments dans l'ordre correct mais avec des mesures fausses (5) ou très approximatives (5) ou pas de mesure du tout (1)
- 1 élève donne des mesures en cm
- 2 élèves donnent ordre et mesures incorrects.

Au cours du bilan le professeur valorise nettement le report sur la grande bande de papier blanc, ce qui fait qu'au moment de la comparaison des avantages des 2 procédures les élèves trouvent que c'est la plus intéressante.

C'est quand on leur demande si on peut modifier cette bande pour qu'elle permette de trouver non seulement l'ordre mais aussi la mesure, que des élèves proposent de graduer.

La nouvelle consigne est donc de graduer la réglette en utilisant les $\frac{1}{2}$ les $\frac{1}{4}$ les $\frac{1}{8}$. Les graduations produites comportent beaucoup d'erreurs : sur les 14 que nous avons pu récupérer, on a

- 1 presque correcte en $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ de 0 à 6 mais $\frac{4}{4}$ a été oublié ce qui produit un décalage pour les quarts suivants
- 1 correcte en $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ réalisée entre 0 et 3 (les quarts sont indiqués également)
- 1 correcte mais ne donnant que $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$
- 1 où les graduations en $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ ont été faites de façon indépendante et avec report de l'unité pliée avec trop peu de soin : un décalage se produit
- 1 ne fait intervenir que des fractions de numérateur 1 qui marquent l'unité de la graduation

|--------|---------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|

$$0 \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad 1$$

- 2 graduent correctement en $\frac{1}{2}$ et font comme ci-dessus pour les $\frac{1}{4}$ et les $\frac{1}{8}$
- 1 gradue correctement en $\frac{1}{2}$ mais numérote les $\frac{1}{4}$ et les $\frac{1}{8}$ qui suivent les entiers :

|----|----|------|-------------|------|------|--------|-----------------|-----|-----|-----|

$$0 \ \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \qquad\qquad \underset{\frac{2}{2}}{1} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{2} \qquad\qquad \underset{\frac{4}{2}}{2} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{2}$$

- 1 fait la même chose, y compris pour les $\frac{1}{2}$
- 2 ont des graduations correctes pour les $\frac{1}{2}$ mais numérotent les $\frac{1}{4}$ et les $\frac{1}{8}$ en "sautant" les traits déjà pris. Pour l'un des deux, les reports sont de plus approximatifs.
- 1 fait cette erreur pour les $\frac{1}{2}$ et les $\frac{1}{8}$ mais place correctement les $\frac{1}{4}$ avec numérateurs impairs.
- 1 fait cette erreur dans les 3 cas.
- 1 marque les traits d'une graduation en $\frac{1}{8}$ mais n'écrit que les entiers.

Après 3 séances, un certain nombre d'élèves ont intégré le report dans l'unité pour définir $\frac{1}{n}$ mais non pour $\frac{p}{n}$. Pour eux, le lien avec la graduation reste lettre morte. Nous n'avons malheureusement pas évalué quelle maîtrise ils avaient de la graduation en nombres entiers.

<u>22 novembre</u>

L'objectif est de faire le lien entre les fractions, la graduation et la division en situant des fractions entre deux entiers, puis entre deux dixièmes au cours d'une prochaine séance.

Le professeur commence par faire reprendre collectivement la graduation en $\frac{1}{2}$ et demande à un élève de placer $\frac{17}{2}$

Jeu collectif 2 fois : le professeur pense à une fraction entre 0 et 100 et les élèves doivent en moins de 10 questions la situer entre 2 entiers. On ne répond que par oui ou par non (fractions choisies $\frac{15}{4}$ et $\frac{1530}{26}$).

Même jeu à deux pendant 15 minutes puis même jeu à deux sur des fractions imposées (tirées au sort parmi des fractions préparées à l'avance par nos soins).

Au cours de la phase collective, la division est institutionnalisée : le professeur demande de vérifier que la fraction choisie est bien dans l'intervalle trouvé. Pour la première, la procédure des élèves est $1 = \frac{4}{4}$, $2 = \frac{8}{4}$, $3 = \frac{12}{4}$, $4 = \frac{16}{4}$. Pour la deuxième, les élèves proposent de multiplier 26 par 58 qui est bien une procédure de vérification, mais le professeur demande comment on peut trouver sans connaître la réponse, un élève propose alors de diviser 1530 par 26. Cette procédure est reprise et valorisée par le professeur.

Cependant il s'avère que les élèves ne savent pas utiliser des procédures économiques pour le jeu dans les entiers, c'est-à-dire pour déterminer un entier par encadrements.

En fait il était prévu que la première phase du jeu à deux ait lieu après des exemples simples (comme le premier) dans le jeu collectif : on attendait à ce moment là plutôt des procédures multiplicatives ou même additives, le jeu sur les fractions imposées ayant lieu après un premier bilan et un jeu collectif sur l'exemple plus difficile. Le professeur a voulu accélérer le passage à la division parce qu'il pense que les élèves peuvent la reconnaître et l'utiliser puisque la division avait été l'objet d'une séance de travail dans la semaine : c'est quelque chose qu'ils ont appris.

Dans le jeu à deux, les élèves qui choisissent la fraction ont recours à la division pour la situer mais font parfois des erreurs dans leurs réponses d'encadrement ; leurs partenaires, de leur côté, ne savent pas poser des questions pertinentes. Il aurait été nécessaire de pratiquer le jeu dans les entiers dans un premier temps. De plus, comme la réponse attendue est un encadrement et non un nombre, les questions ont toujours été du type "est-ce entre 10 et 20 ?" et non du type "est-ce plus grand que 10 ?" et il est clair que ces questions n'étaient pas gérées correctement par la plupart des élèves.

Après cette séance, il se confirme que peu de connaissances solides ont été acquises sur les fractions et que nous assistons à certains dérapages. Nous décidons donc de ne pas continuer pour l'instant et de faire le point à la séance suivante en faisant raconter aux élèves tout ce qui a été fait sur les fractions avec pour objectif d'articuler le pliage, le report et la division. Il est prévu de reprendre en particulier les points suivants :

- *ce que veut dire* $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{3}{5}$ ...
- *y-a-t-il des nombres entre 2 et 3 ? exemples en diverses écritures,*
- *diverses écritures possibles pour un même nombre fractionnaire,*
- *placement de fractions sur un axe gradué ; reprise par tous les élèves de la graduation en* $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ *par tous les élèves sur du papier gradué en dixième de pouce,*
- *partie entière d'une fraction.*

<u>29 novembre</u>

Le professeur annonce qu'elle veut faire avec les élèves un bilan de ce qui a été fait dans les séances du jeudi et savoir à quoi ça sert. Les élèves répondent que ça sert à mieux comprendre les maths, les fractions, à savoir comment placer des nombres sur un axe et en plaçant les nombres sur un axe, on peut savoir, même pour les fractions, lequel est plus grand.

Ce qu'est une fraction : première réponse "une partie de quelque chose" avec des exemples : des tiers, des quarts, des huitièmes. Le professeur demande ce qu'est $\frac{3}{4}$. Pour un élève c'est l'unité pliée en 3 ; d'autres corrigent : "il reste $\frac{1}{4}$ pour que ça fasse $\frac{4}{4}$" "on a partagé l'unité en 4 et si c'est $\frac{2}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ on prend 2 parties pour $\frac{2}{4}$ ou 3 parties pour $\frac{3}{4}$". Un élève mentionne aussi qu'on a vu le rapport avec la division.

Le professeur reprend cette idée de partage et insiste sur le fait que le but était de faire du travail sur la division, que c'était là le rapport avec ce qui se passait dans les autres cours de mathématiques et que ce qu'on fait dans les séances du jeudi est important :. "en faisant cela, on a fait du travail sur la division, le but était là...(...) ça vous a peut-être paru à part...(...) mais il fallait aussi faire l'addition la soustraction...(...)... ce n'était pas pour faire des petits jeux.:. tout ce qu'on a fait le jeudi était fondamental pour la suite".

Dans le reste de la séance, on reprend le travail sur la graduation en entiers, demis, quarts, huitièmes que chacun réalise sur un grande feuille graduée en pouces, demi pouces et dixièmes de pouces. Le professeur

impose l'unité : 2 grands carreaux. Les élèves le font sur leur feuille et aussitôt le professeur place les nombres sur une graduation réalisée au tableau : les entiers sont placés et écrits en noir, les demis en rouge, les quarts en vert et les huitièmes en bleu, ce qui fait que certains traits sont repassés plusieurs fois et qu'il leur correspond des écritures de différentes couleurs. Le professeur le fait remarquer plusieurs fois au cours de la réalisation.
A la fin de la séance la graduation est utilisée pour placer des nombres et produire des écritures différentes : $2+\frac{1}{2}$; $3+\frac{1}{4}$; $5+\frac{3}{8}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{12}{8}$; $\frac{15}{2}$. Pour les premières, les élèves placent la fraction et lisent les écritures correspondantes, pour les dernières, ils repèrent la partie entière et évaluent le reste.

Pour la séance suivante, il est prévu de reprendre le même travail avec une graduation en dixièmes puis de placer des fractions assez simples entre 2 entiers puis entre 2 dixièmes. On décide de traiter collectivement le cas de $\frac{17}{5}$ puis de proposer aux élèves $\frac{18}{4}$ $\frac{15}{4}$ $\frac{9}{5}$ et $\frac{39}{8}$ avant de poser collectivement le problème de $\frac{11}{3}$. On a pour objectif d'aborder ensuite des fractions plus difficiles à situer dans une graduation en dixièmes de façon à faire plus tard le lien avec la division "poussée" après la virgule : par exemple si on veut placer $\frac{39}{7}$ on peut déjà dire que $5 < \frac{39}{7} < 6$ et que $\frac{39}{7} = 5 + \frac{4}{7}$; il reste à placer $\frac{4}{7}$ entre des dixièmes : pour cela, les élèves peuvent s'appuyer sur la proportionnalité en disant que s'il y a 10 dixièmes dans une unité, il y a $\frac{10}{7}$ de dixième dans $\frac{1}{7}$ et donc $\frac{40}{7}$ de dixième dans $\frac{4}{7}$ ou encore qu'il nous reste 4 entiers à partager en 7 ou 40 dixièmes à partager en 7, ce qui fait 5 dixièmes avec un reste de 5 dixièmes à partager en 7...

<u>6 Décembre</u>

On reprend la même unité et, sous la graduation précédente, on trace un nouvel axe et on fait une graduation en dixièmes. Le professeur explique qu'on va se servir de cette graduation pour savoir entre quels dixièmes se place une fraction et pose collectivement les questions qui permettent d'aboutir au fait qu'il faut représenter 1 dixième par 2 petits carreaux.

P. Dans une unité, combien de dixièmes ? E. 10. P. Vous allez donc partager votre unité en 10 parties, ça fera donc combien ? E. 2. P. 2 petits carreaux, oui, puisqu'il y a combien dans 2 grands carreaux ? E. 1 P. Combien de petits carreaux dans 2 grands carreaux ? E. 10... 20. P. Il y en a 20, donc, pour partager en 10, vous allez avoir 2 petits carreaux, tous les 2 petits carreaux, vous mettez un trait, et vous allez jusqu'au bout, c'est-à-dire jusqu'à 6. (...) P. On va se servir de la graduation pour répondre à une question qui est celle-ci ; entre quels dixièmes se trouve une fraction que je vais donner.

Un exemple ($\frac{17}{5}$) est traité collectivement. Le professeur rappelle le jeu fait 2 semaines plus tôt pour situer une fraction entre 2 entiers et demande ce qu'on a utilisé ce jour là ; un élève suggère la division ; on a donc facilement $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$. Reste à placer $\frac{2}{5}$ parmi les dixièmes. Pour la plupart des élèves, le rapport entre les dixièmes et les cinquièmes est encore loin d'être clair. Finalement tout le monde admet que $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$.

Nous donnons quelques extraits de cette phase collective qui montrent d'une part qu'à cette époque, "la règle de 3" n'a plus droit de cité en 6ème et d'autre part que le professeur pense que les élèves ne peuvent pas faire quelque chose qu'il ne leur a pas expliqué et que les faits lui donnent raison, contrairement aux espoirs de l'observateur..

P. ... Aujourd'hui, je voudrais qu'on aille un peu plus loin et qu'on précise entre quels dixièmes c'est compris. Je vais vous faire un petit raisonnement. Nous avons cherché avec MmePerrin... Bon, c'est pas à faire tout le temps, mais ça va vous aider à trouver une méthode simplement en comprenant ce qui se passe. C'est ce qu'on appelle en CM2 le principe de la règle de 3. Je vous l'explique. Qu'est-ce que vous savez jusqu'à maintenant ?... Pour savoir où je vais placer ces $\frac{2}{5}$ exactement, il faudrait que je sache combien il y a de dixièmes dans $\frac{2}{5}$ ...
O. Peut-être qu'ils le savent.
P. Peut-être qu'ils le savent, oui, d'accord E. y'en a 1. P. Combien il y a de dixièmes dans deux cinquièmes ? E1 Ben y'en a 1 E2 4 dixièmes P. dans 2 cinquièmes ? E Ben 2
P. Bon, essayons de trouver combien il y a de dixièmes dans 1 cinquième E.(ensemble) 5, y'en a 2, 2 demis, 10
P. à O. C'est pour ça qu'il faut le faire, aux E. Dans une unité, tout le monde est d'accord, combien y a-t-il de dixièmes ? E. 10
P. Il y a 10 dixièmes. Ça ne m'intéresse pas de savoir combien il y a de dixièmes dans une unité, ce qui m'intéresse, c'est de savoir combien il y a de dixièmes dans 1 cinquième E1 Ben y'en a 5 E2 Ben y'en a 20 P. Si vous avez 10 dixièmes dans 1, quelle est l'opération qu'il faut faire ? E. 10 divisé par 5, 2. P. Bien 2, donc ça correspond à 2 dixièmes. Dans un cinquième, il y a 2 dixièmes, et dans 2 cinquièmes, il va y avoir combien de dixièmes ? E. 4 ... P. 4 dixièmes, il y en a deux fois plus que dans 1 cinquième, oui ?

Les élèves travaillent ensuite individuellement sur le problème suivant : placer entre 2 dixièmes (ou sur un dixième) les fractions $\frac{18}{4}$ $\frac{15}{4}$ $\frac{9}{5}$.

La séance se termine par la correction au tableau de ce travail. Pour $\frac{15}{4}$ les élèves évaluent un quart comme 2,5 dixièmes à partir de un demi = 5 dixièmes

<u>13 Décembre</u>

Le travail sur la graduation décimale se poursuit. Le professeur reprend collectivement le cas de $\frac{17}{5}$ placé d'abord entre 2 entiers puis entre 2 dixièmes : $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5} = 3 + \frac{4}{10}$ puis fait le lien avec l'écriture à virgule : $\frac{372}{100} = 3{,}72$ $\frac{4}{10} = 0{,}4$ $\frac{17}{5} = 3{,}4$. et demande par quelle méthode on aurait pu trouver que $\frac{17}{5} = 3{,}4$. Des élèves proposent la division en indiquant que le 4 est le chiffre après la virgule.

Aujourd'hui les élèves doivent placer sur leur graduation $\frac{39}{8}$ $\frac{11}{3}$ et $\frac{25}{7}$.

Ils trouvent facilement que $\frac{39}{8}$ est entre 4 et 5 et vaut $4 + \frac{7}{8}$ mais n'arrivent pas à trouver combien il y a de dixièmes dans $\frac{7}{8}$.

Le raisonnement suivant, que nous avions envisagé dans l'analyse a priori de la brochure n° 62 de l'IREM, et qui permettrait de répondre directement ,

"dans 1 unité il y a 10 dixièmes

dans $\frac{1}{8}$ $\quad\quad$ $\frac{10}{8}$ de dixième

dans $\frac{7}{8}$ $\quad\quad$ $\frac{70}{8}$ de dixième et $\frac{70}{8} = 8 + \frac{6}{8}$ donc le point se place entre 4 + 8 dixièmes et 4 + 9 dixièmes "

est à peu près inaccessible pour la plupart des élèves. Ce qui peut par contre faire sens pour les élèves, c'est l'interprétation de la division de 39 par 8 : quand on a fait la division euclidienne, le reste 7 unités peut se convertir en 70 dixièmes, on cherche des dixièmes etc... On reste alors dans la problématique de la division en manipulant des entiers à chaque pas.

Le professeur refait le lien avec la division :

1ère étape $4 < \frac{39}{8} < 5$

2ème étape $4{,}8 < \frac{39}{8} < 4{,}9$

3ème étape $4{,}87 < \frac{39}{8} < 4{,}88$

4ème étape $4{,}875 = \frac{39}{8}$

La même démarche est reprise à propos de $\frac{11}{3}$. Cette fois la division ne s'arrête pas : on a un processus infini d'encadrements.

Test du 17 Décembre 84

Les élèves passent le même test que les CM2 (29 janvier 85). Les résultats sont moins bons qu'en CM2, sauf pour le problème et la comparaison des décimaux. Il y avait 21 présents parmi ceux qui étaient dans le groupe depuis le début de l'année plus 2 élèves qui ont intégré ce groupe depuis peu, nous noterons leurs résultats à part :

Exercice 1

Combien y-a-t-il de fois $\frac{1}{15}$ dans 1 ?

Combien y-a-t-il de fois $\frac{1}{7}$ dans 3 ?

6+1 élèves ont les 2 réponses justes, 7 ont seulement la première réponse juste ; 4+1 élèves n'abordent pas cet exercice, 2 élèves donnent 2 réponses fausses. Pour la deuxième question, l'erreur majoritaire présumée consiste à diviser 7 par 3 (5 élèves ont répondu 2 et 2 ont répondu 2,3)

Sur les 6 élèves qui viennent des CM2 observés l'année précédente, 3 donnent les 2 réponses justes, 3 ne donnent que la première.juste et répondent respectivement 2, $\frac{2}{14}$ et $\frac{6}{7} + 1 = \frac{7}{7}$.

Il semble que beaucoup d'élèves aient retenu la lettre de ce qui a été institutionnalisé : "il faut 15 quinzièmes pour faire 1" mais ne savent pas s'en servir même dans une situation assez proche : "combien de fois $\frac{1}{7}$ dans 3 ?" C'est ce que l'on avait observé l'année précédente pour les CM2B : l'institutionnalisation ne semble pas reliée au sens donné aux fractions dans les situations d'introduction.

Exercice 2

Combien y-a-t-il d'entiers dans $\frac{97}{4}$; $\frac{154}{10}$; $\frac{275}{25}$; 37,58 ?

Ci-dessous nous comptons comme justes des réponses qui consistent en une décomposition en partie entière et fractionnaire, même si ce n'est pas exactement ce qui est demandé, et même si les réponses sont mal exprimées, ce qui est souvent le cas.

1 élève a les 4 réponses justes (elle vient du CM2B avec lequel nous avons travaillé)

10 élèves ont 3 réponses justes (2 ont sans doute fait une erreur de calcul pour $\frac{275}{25}$ et répondu l'un 10 (1 élève de l'ex-CM2A), et l'autre 15 , 1 autre a répondu 920 pour $\frac{275}{25}$, 1 n'a pas traité le premier, 1 a répondu 154 pour $\frac{154}{10}$, 1 a répondu 10 pour 37,58, 1 autre 1816 et 3 n'ont pas traité ce cas.
4 élèves ont 1 réponse juste (dont 3 pour 37,58 et 1 pour $\frac{275}{25}$)
1 élève a traité un autre problème et répondu : "il n'y en qu'un c'est $\frac{275}{25}$"
1 élève a écrit $\frac{97}{4} = \frac{24}{4} + \frac{10}{10} + \frac{20}{100} ; \frac{154}{10} = \frac{15}{10} + \frac{40}{10} ; \frac{275}{25} = \frac{11}{25}$.
4 élèves n'ont pas abordé l'exercice.
Pour les "nouveaux", 1 n'a pas abordé l'exercice et 1 a seulement écrit $\frac{97}{4} = 22$.

Les anciens du CM2 ont 4 réponses justes (1 élève), 3 réponses justes (3 élèves), 1 réponse juste (1 élève), 1 n'a pas abordé l'exercice.
Pour les élèves qui n'ont répondu juste que dans le cas de 37, 1 a répété les numérateurs et 1 les dénominateurs pour les fractions, le troisième n'a pas traité le cas des fractions. Le quatrième élève qui n' a qu'une réponse juste confond les écritures fractionnaires et à virgule et a écrit : $97 : 4 = \frac{24}{25}$ $154 : 25 = \frac{6}{16}$ $275 : 25 = \frac{11}{1}$.

Exercice 3
Place les nombres suivants sur l'axe gradué ci-dessous : $1 + \frac{3}{4}$; 2,1 ; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{17}{10}$.

0 1 2 3 4 5

L'axe est dessiné sur papier quadrillé, les graduations entières sont marquées de 0 à 5 avec 5 carreaux pour 1 unité.
1 seule élève a tout juste (elle vient du CM2A avec lequel nous avons travaillé, ce n'est donc pas la même que pour l'exercice précédent). Pour les autres, 2 ont 2 réponses justes ($\frac{5}{2}$ et $1 + \frac{3}{4}$ dans un cas, ancienne élève d'un CM2 observé, $\frac{4}{5}$ et 2,1 dans l'autre), 5 élèves (dont 3 des CM2 observés) ont 1 réponse juste (2 fois $\frac{5}{2}$, 2 fois $1 + \frac{3}{4}$, 1 fois $\frac{4}{5}$), 8 élèves n'ont aucune réponse juste (dont 1 des CM2 observés) et 4 élèves n'abordent pas la question.
En ce qui concerne les nouveaux dans le groupe, un ne fournit aucune réponse (il n'a abordé que les exercices 4 et 5) et l'autre place correctement 2,1 mais place $\frac{4}{5}$ en 4,9 $\frac{5}{2}$ en 5,2, $\frac{17}{10}$ en 17,9.
Parmi les erreurs, il y a des placements imprécis ou des écritures des nombres au-dessus de la ligne sans marquer le trait correspondant, mais aussi des erreurs d'ordre de grandeur souvent dues à des confusions entre la notation décimale et la notation fractionnaire (exemple 4,5 pour $\frac{4}{5}$; $\frac{9}{4}$ entre 9 et 10 ou $\frac{17}{10}$ entre 17 et 18 ; 5 élèves placent $\frac{5}{2}$ entre 5 et 6) parfois jointe à une inversion de la fraction ($\frac{9}{4}$ en 4,8). Pour 2,1, l'erreur la plus fréquente est le placement en 2,2 (1ère subdivision marquée après 2) : c'est le cas de 8 élèves.

Exercice 4
Mets le signe qui convient < > ou =

27,5271	27,528
3,6	3,529
31,52	3,152
4,02	4,2
$18 + \frac{1}{4}$	$18 + \frac{1}{3}$
$\frac{171}{2}$	171,2
$\frac{56}{4}$	14,25

7 réponses justes : 2 élèves
6 réponses justes : 3 élèves
5 réponses justes : 5 élèves
4 réponses justes : 5 élèves
3 réponses justes : 4 élèves (dont un nouveau)
2 réponses justes : 1 élève
1 réponse juste : 2 élèves (dont un nouveau)
non réponse : 1 élève
Si on ne considère que les 4 premières questions qui ne comportent que des décimaux, 11 élèves ont 4 réponses justes, 4 en ont 3, 3 (dont 1 nouveau) en ont 2, 2 en ont 1 et 2 (dont 1 nouveau) en ont 0.
Parmi les CM2 observés l'an dernier, 1 (ex-CM2B) a 6 réponses justes, 2 (ex-CM2A) ont 5 réponses justes, 1 en a 3, 1 en a 2 et 1 n'a pas abordé l'exercice, tous 3 de l'ex-CM2B.

Les questions sont inégalement réussies :
27,5271 et 27,528 : 13 réponses justes
3,6 et 3,529 : 17 réponses justes
31,52 et 3,152 : 17 réponses justes
4,02 et 4,2 : 19 réponses justes
$18+\frac{1}{4}$ et $18+\frac{1}{3}$: 10 réponses justes
$\frac{171}{2}$ et 171,2 : 9 réponses justes
$\frac{56}{4}$ et 14,25 : 11 réponses justes
Pour $\frac{171}{2}$ et 171,2 , l'erreur la plus fréquente consiste à mettre une égalité (11élèves contre 2 qui mettent l'inégalité inverse) Pour 4,02 et 4,2, il y a 2 inégalités inverses et une égalité, dans les autres cas, l'erreur consiste toujours à mettre l'inégalité inverse.

Exercice 5
Un pâtissier range ses chocolats dans des sachets.
Il met 20 chocolats dans chaque sachet.
Quand il a rempli 20 sachets, il les met dans une boîte.
Il a 7845 chocolats à emballer.
Combien lui faudra-t-il de sachets ?
Combien lui faudra-t-il de boîtes ?

14 élèves posent les 2 divisions correctes dont
- 6 énoncent clairement les résultats
- 2 ne donnent pas le résultat ou le donnent en nombre non entier
- 4 font une erreur de virgule (revenant à diviser par 2 au lieu de 20) : 2 le font 2 fois et 2 le font 1 fois
- 1 fait une erreur de calcul
- 1 fait une autre erreur : confusion entre la partie décimale du quotient et un reste

2 élèves confondent les sachets et les boîtes et font 7845 : 400, réponse 19 sachets puis 19x20, réponse 380 boîtes

6 élèves ne posent la division correcte que dans le premier cas :
- 2 ne traitent pas le 2ème
- 1 fait une autre division (7845 : 389 – 389 est le résultat trouvé)
- 3 font une multiplication 7845x392 ; 391x20 ; 7845x20)

1 élève utilise une procédure erronée dans les 2 cas : 7845 x 20 = 156900 puis 156900 : 7845 = 21

Conclusion

Les résultats d'ensemble sont faibles. En notant un point par réponse juste pour les 3 premières questions, 0,5 point par réponse juste à la 4ème question, ce qui donne un maximum de 15,5 points, nous avons
1 élève qui totalise 2
2 élèves qui totalisent 3
2 élèves qui totalisent 3,5 dont 1 de l'ex-CM2B
4 élèves qui totalisent 4,5
2 élèves qui totalisent 5 dont 1 de l'ex-CM2B
1 élève qui totalise 5,5
1 élève qui totalise 6 (élève de l'ex-CM2B)
2 élèves qui totalisent 6,5
3 élèves qui totalisent 7 dont 1 de l'ex-CM2B
2 élèves qui totalisent 7,5 dont 1 de l'ex-CM2A
1 élève qui totalise 10
1 élève qui totalise 12,5 : elle vient de l'ex-CM2A.
L'exercice le plus mal réussi est le placement sur la graduation.
Le problème est en général réussi par les élèves qui réussissent le reste à quelques exceptions près : 1 élève réussit le problème avec 2 sur le reste, un autre avec 5. Notons que l'élève qui a le meilleur score sur le reste fait des divisions fausses et ne réussit pas le problème pour cette raison.
Les élèves avec lesquels nous avions travaillé en CM2 réussissent en moyenne un peu mieux que les autres (4 sur 6 ont un score supérieur ou égal à 6 contre 6 sur 16 pour les autres élèves). Remarquons que l'élève de l'ex-CM2A qui avait l'air perdue dans les séquences d'apprentissage a relativement bien réussi ce test

Les résultats montrent que les objectifs de l'apprentissage n'ont pas été atteints sauf pour quelques élèves.

2.2. Proportionnalité et graphiques

Au cours du mois de janvier, on décide de travailler sur la proportionnalité en faisant interagir le cadre de la représentation graphique et le cadre numérique. Le thème choisi est celui de tarifs de taxi. On en a retenu 3 : un qui correspond à une fonction linéaire (prix proportionnel à la distance parcourue), un à une fonction affine (prise en charge) et un à une fonction en escalier (forfait).

10 janvier.

Le professeur annonce qu'on va travailler pendant plusieurs séances sur des représentations graphiques et donne la consigne : on a 3 taxis avec des tarifs différents et le problème est de savoir, pour des parcours qui vont différer d'une équipe à l'autre, quel est le taxi le plus avantageux :
taxi rouge : 6F de prise en charge et 5F du km
taxi bleu : 6F du km
taxi vert : forfait : 50Fjusqu'à 10 km, 90F de 10 à 20 km.

Un exemple est traité collectivement au tableau : on cherche le prix à payer pour parcourir 4 km avec chaque taxi. Le professeur demande comment présenter les résultats. Des élèves proposent un tableau avec nom du taxi, distance et prix ; le professeur suggère alors de faire des colonnes et de présenter le tableau ainsi :
distances | Taxi rouge | Taxi bleu | Taxi vert
et demande comment signaler le plus avantageux ; les élèves proposent de souligner.
Les distances sont les suivantes :

1ère rangée	5 km	7,5 km	10 km	12,3 km
2ème rangée	4,2 km	9 km	6,5 km	12 km
3ème rangée	3,7 km	8 km	14 km	17,5 km

Le professeur demande de calculer tous les prix pour les 3 taxis et les 4 distances.
Récapitulation des tableaux obtenus par tous les élèves.

distances	taxi rouge	taxi bleu	taxi vert
5	31	30	50
7,5	43,5	45	50
10	56	60	50
12,3	67,5	73,8	90
4,2	27	25,2	50
9	51	54	50
6,5	38,5	39	50
12	66	72	90
3,7	24,5	22,2	50
8	46	48	50
14	76	84	90
17,5	93,5	105	90

Les élèves constatent que ce n'est pas toujours le même taxi qui est le plus avantageux et que les taxis avantageux n'apparaissent pas toujours dans le même ordre pour les différents parcours ; le taxi bleu semble avantageux pour des petites distances.

Ensuite, le professeur annonce qu'on va s'intéresser à chaque taxi séparément (le bleu pour aujourd'hui) et faire une représentation graphique en reportant tous les renseignements calculés ; pour cela, il demande de refaire un tableau pour le taxi bleu en rangeant les distances dans l'ordre croissant et donne l'échelle à utiliser : 1 cm (2 carreaux) pour 1 km sur l'axe horizontal et 2 carreaux pour 5 F sur l'axe vertical. Les élèves disposent de papier à petits carreaux.

C'est la première représentation graphique de l'année ; le professeur explique comment on va représenter chaque renseignement concernant le taxi bleu par un point du quadrillage. Les élèves ont du mal à repérer sur les axes les points de coordonnées non entières, et même entières dans le cas des prix. Le travail n'est pas terminé à la fin de la séance.

17 janvier

On reprend les 3 tarifs de taxi pour faire les représentations graphiques. Cette fois, on ne reprend pas les distances données mais les élèves prennent toutes les distances entières de 1 à 17 km.

On commence par le taxi bleu. L'activité est très rapide : 5 à 10 minutes ; les élèves remarquent qu'ils ont fait la table des 6. Le professeur reprend collectivement les résultats jusqu'à 10 et demande ensuite aux élèves de se servir du tableau et du graphique pour répondre à des questions :

P "Vous avez récité la table de multiplication par 6, je vais vous faire constater que vous auriez pu faire autrement : 1 km + 2 km = 3 km ; que se passe-t-il pour les prix ?"

E on ajoute pareil.

P oui, si on voulait trouver combien payer pour 19 km, comment pourrait-on se servir de ce qui est écrit au tableau ?

E on fait 54 + 60 (...)

P pour 17 km sans faire la multiplication par 6 ?

E 42 + 60

P par exemple : 7 + 10 il correspond 42 + 60 , (...)

P autre méthode ? E 9 + 8   48 + 54 (...)

P si on a un nombre de km a et un autre b auxquels il correspond des prix p et p', quel va être le prix de a + b km ?   E p + p'

P. Quand vous aurez une distance qui est la somme de deux distances, vous ferez la somme des prix. Maintenant est-ce que la propriété est vraie pour la multiplication ? Exemple, vous prenez 3 km, combien vous payez ?   E 18   P si vous voulez 2x3 km, c'est à dire   E 6

P. combien vous payez ?   E 36   P Est-ce que c'est 2 fois 18, 36 ?   E oui

P. si vous multipliez les km par 2, les prix sont aussi multipliés par 2 ; j'ai multiplié par 2, mais j'aurais pu aussi multiplier par 3. 3 multiplié par 3, ça fait combien ?   E 9

P. Et si vous multipliez 18 par 3 ?   E 54

P. vous pouvez multiplier un nombre, vous trouverez l'autre en multipliant. Si vous connaissez le prix pour 9, vous pourrez aussi connaître le prix pour 18. E 2 fois.

P. oui 2x9 = 18 et si vous savez que pour 9 c'est 54F, combien on va payer pour 18 ?   E. 108

P. on connaît le prix pour 19   E. 114

P. on pourrait trouver pour 2x19?   E. 38   P oui, pour 38 ?   E. 228

P. pour des nombres un peu plus grands 54 par exemple, on va voir s'il y a plusieurs manières   E. 324   P. comment a-t-il fait ? E_1 j'ai multiplié par 6 : 54x6

E_2 18x3 = 54, on peut faire 108x3   P. ça fait combien ?   E 324

Autre proposition : 24 + 30 ; pour 24 on prend 4x6 et pour 30 on prend 5x6 :

Le calcul est vérifié collectivement : 24x6 + 30x6 = 144 + 180

Autre proposition : je fais 5x60 ...   P comment tu trouves 54 ?   E. 5x10+4   P oui,

E. 5x60+24, 300 + 24   P. c'était le plus facile

P En se servant de la représentatrion, vous la tracez en bleu. Quand on augmente de 1 km, par exemple qu'on passe de 5 à 6, ça augmente de combien pour le prix ?   E 6F

P si maintenant j'augmente de 2km, je passe de 5 à 7 et le prix de 30 à 42, ça augmente de combien ?   E de 12.

Les élèves commencent ensuite la représentation graphique pour le taxi rouge. Ils ont du mal à accepter de prolonger la droite jusqu'à 0 : dès qu'on monte dans le taxi on doit payer 6F.

On voit ici une fois de plus une manifestation des conceptions du professeur sur l'enseignement, et en quoi elles s'opposent à celle de l'observateur : les élèves doivent utiliser des propriétés que le professeur leur a enseignées ou montrées. Les propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire sont illustrées sur des exemples très simples pour lesquels les élèves font sans problème le calcul par multiplication directe (ce sont des résultats des tables), et ce n'est qu'après l'explicitation des propriétés de linéarité qu'il leur propose des grands nombres qui nécessitent pour le calcul mental l'utilisation de ces propriétés. Remarquons qu'il ne demande pas de nombres décimaux.

<u>24 Janvier</u>

Le professeur demande d'abord aux élèves de rappeler ce qui a été fait au cours des séances précédentes, en particulier sur les représentations graphiques. Elle refait avec les élèves le tableau des prix :

km	prix taxi bleu	prix taxi rouge	prix taxi vert
1	6	11	50
2	12	16	50
3	18	21	50
4	24	26	50
5	30	31	50
6	36	36	50
7	42	41	50
8	48	46	50
...			

et fait formuler les remarques faites sur les représentations : pour le taxi bleu et pour le taxi rouge les points sont alignés, les droites se croisent.

Les élèves terminent les représentations graphiques (elles sont faites sur la même feuille) et le professeur leur demande de dire en regardant le graphique quel taxi est le plus intéressant pour 1 km. Les élèves répondent que c'est le bleu parce que "le début de la courbe est plus bas". Le professeur fait vérifier sur le graphique, "sur la droite de 1 km", les prix payés pour chaque taxi, les élèves remarquent que "on croise d'abord la ligne bleue, puis la rouge, puis la verte". Le professeur pose la même question pour 4 autres distances : 8 km; 9,5 km; 10,5 km; 15 km. "Vous allez repérer ces 4 distances et entourer au crayon le taxi le plus intéressant". Cela ne pose pas de problème aux élèves.

Le professeur pose alors des questions qui nécessitent une lecture du graphique dans l'autre sens : quel taxi m'emmène le plus loin pour 15F ? Au départ les réponses sont variées, on entend citer les trois taxis, la lecture du graphique permet de trancher : cette fois il faut repérer le plus loin sur une ligne horizontale. Le professeur propose 4 autres prix : 26F 45F 50F et 95F. Les élèves travaillent individuellement. Le professeur demande ensuite de retrouver les résultats par le calcul. Le travail ne peut être fait ce jour là puisque c'est la fin de l'heure et le professeur le donne en devoir à la maison en précisant "ça n'a rien à voir avec les représentations graphiques, c'est un problème."

Nous avons récupéré les copies de 12 élèves.
Un élève n'a pas du tout traité la question et a calculé pour toutes les distances entières de 1 à 15 km les prix à payer pour chaque taxi.
Les 11 autres élèves ont traité correctement le cas du taxi bleu.
Pour le taxi rouge, il y a 6 réponses correctes ; 1 élève divise par 5, 2 élèves divisent par 11 ; 1 élève divise la somme par 5 puis ajoute 6 : par exemple 26:5 = 5,2 5,2+6 = 11,2 réponse 11,2 km ; 1 élève divise la somme par 5 puis ajoute la prise en charge à la somme : exemple 26:5 = 5,2 26F+6F = 32F mais répond 5,2.
Pour le taxi vert il y a une réponse parfaitement correcte et bien exprimée (0, 0, 0 à10, 0 à 20) et 3 autres réponses pratiquement correctes : 2 élèves qui avaient répondu correctement pour le taxi rouge et qui répondent ici correctement pour les 3 premiers prix (0, 0, 10), et pour 95F "un peu plus de 20 km" pour l'un "entre 20 et 30" pour l'autre. La quatrième réponse presque correcte est donnée par l'élève qui avait divisé par 5 pour le taxi rouge, mais en rajoutant la prise en charge à la somme (26:5 = 5,2 26F+6F = 32F) ; pour le taxi vert elle fait les réponses suivantes : "pour 26 F Quel que soit le nombre de km de 1 à 10 km le taxi ne prendra pas 26F mais 50F", pour 45F et 50F "de 1 à 10 km 50F", "pour 95F = 21km, de 10 à 20 km = 90F + 1 km = 5F = 95F = 21 km".
2 élèves répondent 10 pour les 3 premiers prix et 20 (resp. 20 à 30) pour le 4ème.
3 élèves adoptent systématiquement la procédure de calcul suivante : (10xS):50 où S désigne la somme.
1 élève distingue 2 cas : "pour 50F", "pour 90F" et divise toutes les sommes par 50 (resp. par 90).
1 élève ne traite pas le cas du taxi vert.

Nous avons relevé les représentations graphiques. Elles sont rarement soignées parce que beaucoup d'élèves ont eu besoin de faire des corrections. Il faut dire que, pour certains élèves, c'est sans doute la première représentation graphique réalisée. Pour le taxi vert 2 élèves ont tracé une verticale entre (11, 50) et (11,90) et 1 une oblique entre (10,50) et (11,90) ; d'autres élèves avaient tracé la même oblique ou une verticale entre (10, 50) et (10, 90) mais l'ont effacée ; 5 élèves n'ont représenté le tarif du taxi vert qu'entre 0 et 10 ; 1 élève a représenté 2 traits verts entre les abscisses 0 et 10, l'un à l'ordonnée 50, l'autre à l'ordonnée 90 ; 4 élèves ont des erreurs sur les taxis bleu ou rouge ; 1 élève n'a pas représenté le taxi rouge ; 2 élèves ont des représentations très partielles, très peu soignées et avec erreurs donc inutilisables.

3. Conclusion.

Du côté des élèves.

- Au niveau des contenus, on constate que le placement de décimaux sur une graduation reste mal réussi par les élèves aussi bien en CM2 qu'en 6ème et que le recours aux procédures périmétriques pour traiter des aires ressurgit constamment..

- Ce que les élèves retiennent, c'est ce qui sort directement de l'institutionnalisation. Ils le répètent tel quel, comme $n \times \frac{1}{n} = 1$, mais ne l'utilisent pas pour trouver d'autres résultats comme $n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

- La difficulté à changer de point de vue se manifeste par exemple lors d'un changement d'activité : des élèves restent sur une consigne précédente ou continuent à utiliser les procédures qui convenaient pour l'activité précédente. De plus, certains élèves ont du mal à tenir compte de 2 relations en même temps.

- Pour beaucoup d'élèves, on a une réponse juste ou on ne l'a pas pas. Ils n'ont pas l'idée qu'on peut s'approcher de la solution. Par exemple, s'ils font des additions répétées pour trouver la solution d'une division, ils peuvent le faire quand les nombres sont simples et qu'ils peuvent trouver tout de suite le résultat mais ne peuvent pas engager un processus à partir de cette méthode quand les nombres sont plus compliqués.

- Ils ne peuvent le plus souvent pas mettre en place une procédure de vérification qui soit différente d'une procédure de résolution : par exemple, dans la situation des taxis, les élèves sont capables de trouver une réponse sur le graphique mais ne peuvent la vérifier par un calcul en partant de cette solution supposée ; si on leur demande de vérifier par le calcul, ils recherchent une résolution par le calcul. La question qui se pose là dépasse largement le cadre des élèves en difficulté, c'est aussi celle de ce qu'il est légitime de faire en mathématiques. C. Margolinas a montré dans sa thèse la difficulté pour des élèves de seconde d'élaborer des procédures de validation ou de vérification qui ne soient pas des procédures de résolution.

- Par ailleurs, les règles et les codages qu'ils retiennent ne sont pas précis ; par exemple confusion entre $\frac{171}{2}$ et 171,2 pour 16 élèves du CM2 sur 22 au test de janvier 1985 ; c'est sans dout aussi une des raisons qui expliquent la réponse $\frac{56}{4} > 14{,}25$ donnée par 13 élèves. Un autre exemple que j'ai plusieurs fois observé à propos de la division : il arrive qu'un élève propose de faire a : b alors qu'il faudrait faire b : a, qu'après une demi-heure de travail, on arrive enfin à la bonne méthode et que l'élève proteste en disant "je l'avais dit depuis le début!" Certains élèves ne voient pas la différence entre a : b et b : a ; après tout la multiplication et l'addition sont bien commutatives!

Du côté des enseignants

Le lien entre activité des élèves et institutionnalisation reste difficile à réaliser. On constate à ce sujet des attitudes opposées entre l'instituteur du CM2 et le professeur de 6ème. L'instituteur s'appuie bien sur l'activité des élèves mais il a tendance à ne pas vraiment institutionnaliser : il garde les formulations des élèves comme "un tiers c'est l'unité pliée en 3" et ne dégage pas toujours ce qui est général de ce qui est lié à la situation. Le professeur de 6ème au contraire institutionnalise le savoir mathématique décontextualisé sans partir des conceptions ou des formulations des élèves : il exige d'eux une formulation correcte tout de suite.

Le lien entre l'institutionnalisation et les activités de recherche des élèves est un des points délicats du rôle du maître quand on propose des activités de recherche aux élèves ; et il nous semble que cet ancrage de l'institutionnalisation dans l'activité des élèves est d'autant plus important que les élèves sont issus de milieux socio-culturels modestes.

De même les notions d'activité de l'élève et de responsabilité de l'élève sont très différentes chez ces deux enseignants : activité très contrôlée et très dirigée pour l'un, leur faire tout trouver, presque jusqu'à deviner la consigne, pour l'autre.

Rapports enseignant- observateur.

Les incompatibilités entre les conceptions de l'enseignant et celle du didacticien amènent des perturbations sur le fonctionnement de l'enseignant : il arrive même que le didacticien obtienne l'effet inverse de celui qu'il voulait. Nous avons pu en voir quelques exemples dans les chapitre 3A et 3B. En voici un qui concerne l'enseignement de la proportionnalité, avec un autre enseignant. Nous avions développé une analyse des difficultés des élèves qui ne disposaient que d'un modèle additif pour la proportionnalité et qui pensaient en termes d'additions répétées même s'ils faisaient des multiplications. Nous avions alors suggéré qu'il était important de les laisser développer les procédures scalaires qu'ils étaient capables de comprendre et de s'appuyer sur elles pour mettre en place des procédures de type fonction. Ce professeur avait une classe "forte" et une classe "faible". Il avait donné à tous les élèves un problème de modèles réduits de voiture. Dans la classe forte, tous les élèves avaient utilisé la multiplication par le coefficient de proportionnalité qui était donné sous la forme "1 cm sur le modèle réduit représente 43 cm dans la réalité". Au cours de la correction, le professeur a essayé de leur faire trouver une autre méthode —c'est-à-dire la procédure scalaire qui était ici inadaptée, étant donnés les nombres en jeu. Les élèves répétaient toujours la même procédure en variant quelque peu la formulation jusqu'à ce qu'une bonne élève comprenne ce qu'attendait l'enseignant et dise : "on fait 1 cm fois 3,4, ça fait 3,4... et après on fait 43x3,4", ce qui a permis de mettre des flèches verticales dans le tableau. Remarquons que la méthode des élèves (procédure fonction) consistait à faire 3,4x43 et que la distinction entre les deux procédures était, sur cet exemple, bien délicate !

Pour ce professeur, ce que nous avions dit était important et devait être institutionnalisé ; d'autre part, conformément à l'idéologie ambiante actuellemnt, il fallait que ça vienne des élèves. Cette séquence, à notre avis inutile, sinon perturbante pour les élèves, n'aurait sûrement pas eu lieu sans notre intervention.

Cela pose d'ailleurs le problème de la diffusion et de l'utilisation dans l'enseignement des ingénieries didactiques fabriquées pour la recherche.

Les difficultés analysées succinctement ici nous ont incitée à étudier d'un peu plus près les conceptions des enseignants et des élèves sur ce que sont l'activité mathématique, le rôle de l'enseignant et le rôle de l'élève. C'est sur ce sujet que portent principalement les chapitres suivants.

CHAPITRE 4

ETUDE DE CAS : DIDIER ET LE CALCUL

1 Retour sur la problématique et la méthodologie

A l'issue de la phase d'expérimentation développée dans les chapitre 3A et 3B, et en partie évaluée par les tests décrits dans les chapitres 2 et 3B, il s'est avéré d'une part que nous n'avions pas obtenu les résultats escomptés pour les performances des élèves sur les nombres décimaux, d'autre part que nous avions rencontré beaucoup de difficultés pour faire fonctionner dans les classes un enseignement reposant sur les hypothèses didactiques qui étaient les nôtres. Nous avons alors infléchi l'axe de notre recherche : il s'agissait maintenant pour nous d'analyser les raisons de ces difficultés et d'affiner nos hypothèses pour une expérimentation ultérieure. Nous avons donc arrêté les expérimentations en classe pour nous donner de nouveaux moyens d'analyse.

Dans la première phase de cette recherche, en 1983-1984, nous avions supposé implicitement que les élèves et les enseignants allaient jouer le jeu, qu'ils devaient jouer le jeu et les distorsions observées entre ce qui était prévu dans l'expérience et ce qui était réalisé, étaient vues comme des perturbations qu'il fallait s'efforcer d'éliminer : elles étaient attribuées à une incompréhension des enseignants, due essentiellement à de mauvaises explications de notre part, ainsi qu'à une connaissance trop imprécise des difficultés des élèves. L'année suivante, nous avons fait des efforts d'explicitation et pris quelques mesures pour recueillir des productions écrites des élèves. Il s'est néanmoins avéré qu'il n'était pas facile de retrouver un équilibre en modifiant le fonctionnement habituel des classes. Le changement de problématique a consisté d'une part à prendre ces distorsions comme objet d'étude et à chercher des raisons pour lesquelles les enseignants faisaient autre chose que ce qui semblait convenu entre nous, d'autre part à essayer d'analyser plus précisément les difficultés des élèves. Nous avons commencé par rechercher de nouvelles informations et de nouveaux moyens d'investigation.

De nombreux travaux, notamment en psychologie et sociologie, ont étudié la relation entre origine sociale des élèves et réussite scolaire et, au cours de l'année 84-85, nous avons commencé par faire une revue bibliographique d'un certain nombre de ces travaux parus jusqu'en 1985, qui a abouti à la rédaction du cahier 36 de didactique des mathématiques, que l'on peut trouver en annexe. Mais il nous est apparu que, parmi ces recherches, il en existait peu qui prennent en compte le contenu à enseigner. Ces travaux nous apportaient des éléments d'information et nous aidaient à forger des hypothèses d'explication, mais il nous fallait trouver comment ces éléments d'explication pouvaient se traduire en classe de mathématiques.

Notre projet était en effet de cerner concrètement comment certains élèves passaient dans le système scolaire à côté de certains apprentissages de base et de chercher des variables intermédiaires possibles pour expliquer les différences d'apprentissage à partir de situations en apparence identiques. Pour cela, il nous fallait interroger la relation didactique qui fait intervenir maître, élèves et contenu pour analyser comment les interactions entre maître et élèves qui se nouent (ou non) dans les classes au sein du contrat didactique, à propos d'un savoir précis, peuvent engendrer l'échec de certains élèves, et comment des éléments que nous n'avions pas pris en compte jusque là pouvaient intervenir sur la nature de ce contrat didactique.

A l'issue des premières observations, une de nos hypothèses d'explication des difficultés rencontrées du côté des élèves concernait le projet général que ceux-ci formaient vis-à-vis de l'école. Nous avions remarqué au cours de la première année que les élèves de 6ème avec lesquels nous avions travaillé avaient des projets à la fois très raisonnables et très modestes pour l'avenir, aussi avons-nous demandé aux élèves de CM2 observés en 84-85, de nous dire par écrit quel métier ils voudraient faire plus tard et à quoi selon eux servaient l'école et les mathématiques. Il ne s'agissait pour nous que de recueillir quelques indications sur les projets que pouvaient avoir les enfants à propos de l'école. Le questionnaire était naïf et vague, nous ne pouvions donc attendre beaucoup d'informations des réponses. Nous donnons cependant un compte-rendu rapide des résultats parce qu'il s'agit des élèves de CM2 observés en 84-85, sur lesquels nous avons donc d'autres éléments d'information (voir chapitre 3B), et que ces réponses nous ont quand même guidée pour élaborer les questionnaires suivants. Dans le paragraphe 3, nous rendons compte de cette première enquête informelle.

Par ailleurs, à la suite de nos observations en classe, nos interprétations, du côté des élèves, des difficultés qu'ils rencontraient, s'articulaient, outre le projet général que ceux-ci formaient vis-à-vis de l'école, autour des éléments suivants :

- rapport qu'ils entretenaient avec les mathématiques,
- interprétation des attentes de l'enseignant,
- investissement dans les situations et reconnaissance de leur enjeu,
- création de représentations mentales au cours des situations d'action.

Notre première intention était d'affiner notre diagnostic et de relever des observations précises. C'est un des objectifs de l'étude de cas qui fait l'objet de l'essentiel de ce chapitre.

Pour analyser les résistances des professeurs et des élèves, nous avons eu recours à un concept emprunté à la psychologie sociale, celui de représentation sociale, que nous avons adapté à notre problématique. Nous le présentons d'abord.

Les informations dont nous disposions à l'issue de nos observations étaient insuffisantes pour répondre aux nouvelles questions, nous avons donc mis au point un autre questionnement, à partir d'entretiens et de questionnaires écrits. Les élèves ne sont évidemment pas ceux des premières observations, mais les enseignants sont les mêmes. Les réflexions concernant les représentations des élèves feront l'objet du chapitre 5, celles qui concernent les enseignants se trouvent au chapitre 6.

2. Ce que nous entendons par représentation et comment l'approcher.

2.1. La représentation.

Nous nous référons au point de vue développé par Abric (1987) à partir de la définition de Moscovici (1961, 1969). Contrairement à ce qui se passe pour l'image ou la perception, il n'y a pas dans le concept de représentation de dichotomie entre l'objet et le sujet qui y sont tous deux présents et interdépendants :

> *La représentation est le produit et le processus d'une activité mentale par laquelle un individu ou un groupe reconstitue le réel auquel il est confronté, et lui attribue une signification spécifique.* (Abric, 1987 p. 64)

Pour décrire la représentation en tant que *produit*, il distingue *ses éléments constitutifs* et *sa structure interne*.

> Les éléments constitutifs *"sont d'une part les informations relatives à l'objet et en possession de l'individu, d'autre part ses attitudes et opinions"* ... *"qui introduisent dans la représentation une dimension normative, évaluative, à partir de laquelle les informations sont pondérées, évaluées, voire scotomisées par le sujet"*

La représentation est organisée autour d'un *noyau central* autour duquel s'agencent des éléments périphériques.
En tant que *processus*, Abric distingue, à la suite de Moscovici, 3 phases dans la constitution de la représentation (p. 65-67) :

- la première phase permet de passer de l'objet au modèle figuratif : par sélection, tri, simplification, décontextualisation ... et avec cohérence l'individu constitue le *noyau de base* ou *noyau imageant* qui servira à organiser la représentation
- la deuxième phase fait passer à *l'instrument de catégorisation* : le modèle figuratif prend un statut d'évidence, de réalité du sens commun, il devient cadre d'interprétation et de catégorisation
- la troisième phase mène au *modèle actif* : le noyau imageant est confronté à la réalité, la représentation se complète et se module face à la réalité sociale et concrète
- la quatrième phase est celle de la représentation proprement dite, *"système cohérent et hiérarchisé, organisé autour du noyau imageant, elle est une vision du monde".*

Il dégage ensuite les caractéristiques de la représentation :

> *"Toute représentation est constituée de trois éléments fondamentaux : un noyau central, un ensemble d'informations, d'attitudes et de croyances organisé autour de ce noyau central, et un système de catégorisation".*

2.2. Les représentations sociales

Parmi les représentations, Abric caractérise celles qui sont plus spécifiquement sociales (p. 75-76). Il part des définitions de Durkheim (1898) pour qui "la représentation sociale est un ensemble organisé et spécifique qui ne résulte pas de la sommation des représentations individuelles", ... "elle est extérieure au sujet qui la reçoit passivement". Mais pour Abric, ces représentations "résultent d'un processus de médiation ou d'équilibration entre d'une part les forces et les contraintes sociales, et d'autre part les forces et mécanismes psychologiques". Il reprend la définition de Herzlich (1972 p. 306) pour qui ces représentations *"sont des constructions mentales de l'objet, non*

séparables de l'activité symbolique du sujet, elle-même solidaire de son insertion dans le champ social". Il explicite ensuite trois critères spécifiques de la représentation sociale :
- *extensivité* : pour être sociale, une représentation doit être partagée par un ensemble d'individus,
- *origine et mode de production de la représentation* : elle est collectivement produite et engendrée,
- *fonction sociale de cette représentation* : si une représentation est partagée par toute une population mais n'a qu'un caractère instrumental, on ne la qualifiera pas de sociale.

Abric cite à ce propos Moscovici (1961 p. 307) *"sa fonction essentielle sera de contribuer aux processus formateurs et aux processus d'orientation des communications et des comportements sociaux".*

2.3. Les représentations métacognitives

Nous allons, à la suite d'A. Robert et de J. Robinet (1989 a et b) nous intéresser à ce qu'elles appellent des *représentations métacognitives,* c'est à dire les représentations des enseignants ou des élèves sur ce que sont les mathématiques, la manière de les enseigner et de les apprendre. Elles les décrivent comme faites de convictions, d'idées que ceux-ci ont sur les mathématiques, leur rôle, la manière de les enseigner ou de les apprendre, ces idées étant envisagées dans la relation qu'elles peuvent avoir avec les pratiques des enseignants ou des élèves en question quand ils "font" des mathématiques pour les enseigner ou les étudier. Même si elles ne sont pas explicites, elles sont au niveau conscient, ou au moins préconscient, et peuvent s'expliciter ne serait-ce que partiellement, après coup, lors d'explications données par le professeur ou l'élève à propos de certaines de ses décisions ou conduites.

Ce sont à notre avis des représentations sociales au sens défini ci-dessus puisqu'elles sont partagées par un ensemble d'individus, qu'elles ont une fonction sociale dans la transmission des connaissances de mathématiques et qu'elles sont produites collectivement : A. Robert et J. Robinet relèvent même qu'elles "sont datées socialement, révélatrices d'un certain contexte et d'une certaine époque,... d'une certaine "ambiance"", même si elles sont largement variables d'un individu à l'autre.

Elles nous intéressent en didactique des mathématiques parce que nous pensons qu'elles peuvent avoir un impact sur la manière d'enseigner des professeurs et la manière d'apprendre des élèves. De plus, comme le soulignent A. Robert et J. Robinet, c'est à travers elles que les enseignants interprètent les résultats de la didactique et lisent les séquences d'ingénierie didactique qui leur sont proposées.

Toutefois, la plus grande prudence s'impose sur l'utilisation que nous pouvons en faire : si elles sont sans doute à mettre en relation avec des pratiques différentes des enseignants, l'effet de cette différence de pratiques est autrement difficile à évaluer et il n'est pas dans notre propos de laisser entendre que certaines représentations seraient meilleures que d'autres pour enseigner les mathématiques. Il se peut que des représentations différentes des professeurs donnent le même résultat du point de vue de l'apprentissage des élèves, même si cela change les représentations que les élèves se font des mathématiques. Il est probable en outre que les effets ne sont pas les mêmes suivant les élèves, notamment suivant les représentations véhiculées dans leur milieu, même si, comme l'ont constaté A. Robert et E. Bautier-Castaing (1988), les représentations des élèves sont extrêmement labiles et dépendantes de celles du professeur.

Le concept de représentations métacognitives tel qu'il est défini ici nous paraît apporter un élément intéressant pour notre étude à un double titre :
- d'une part, il nous semble pouvoir éclairer certaines difficultés de communication entre l'enseignant et l'observateur que nous avons signalées précédemment
- d'autre part, parce que nous pensons que les représentations des enseignants comprennent des nuances importantes sur ce qu'il convient ou qu'il est possible de faire suivant le public concerné.

Comme dans le cas de la situation de jeu avec partenaire analysée par Abric (1987), la représentation de la situation d'enseignement va faire intervenir pour chacun des partenaires, enseignant et élèves, la représentation de soi, la représentation du partenaire et la représentation de la tâche (enseigner ou apprendre suivant le cas) que l'on a soi-même et celle que l'on suppose au partenaire, ces différents termes étant largement interdépendants. De plus, la situation d'enseignement se trouve toujours actualisée à propos d'un contenu précis, les conceptions des différents partenaires sur le contenu va donc interférer avec les représentations précédentes. Suivant la situation, c'est un élément ou un autre qui occupera une position centrale.

2.4. Comment aborder l'étude de ces représentations ?

Abric souligne les difficultés que l'on rencontre dans ce domaine. Il adopte quant à lui une méthode expérimentale où il étudie l'effet de représentations induites par l'expérimentateur sur le comportement des sujets.

Pour l'approche de la représentation de soi (dans les situations qu'il étudie), il utilise des questionnaires en signalant la difficulté qu'il y a à trouver un questionnement où la distance entre le moi déclaré et le moi intime (dans la situation) ne soit pas trop grand.

Pour étudier les représentations métacognitives des professeurs de mathématiques, A. Robert et J. Robinet adoptent plusieurs méthodes : elles en dégagent une certaine expression collective, caractéristique d'un certain milieu professionnel et d'une époque, dans le bulletin de l'APMEP entre 1968 et 1988, elles recueillent des traces directes de représentations individuelles à travers des questionnaires et des interviews en soulignant les difficultés de ce mode d'investigation (écart entre représentations exprimées et représentations intimes, influence du questionnement...), elles en recueillent des traces indirectes en analysant des séquences de classe et en trouvent des indices dans les dysfonctionnements au niveau de la transmission de séquences didactiques.

Dans ce chapitre, nous analysons des observations d'un élève sur une période de 6 mois, en essayant de tirer un bilan aussi bien sur les acquisitions mathématiques, en liaison avec des analyses didactiques sur le contenu, que sur le plan des représentations métacognitives, en essayant de dégager les interactions entre le plan cognitif et le plan métacognitif. Il s'agit d'une première étude, tout à fait empirique, destinée à définir des pistes de réflexion.

Dans les chapitres suivants, nous nous intéressons aux représentations métacognitives des enseignants et des élèves telles qu'elles sont exprimées dans des entretiens ou en réponse à des questionnaires écrits, hors de tout contexte précis d'enseignement et nous essayerons de les mettre en relation, pour les élèves avec des performances sur le contenu, pour les enseignants avec les observations en classe décrites au chapitre 3. Les deux analyses devraient être complémentaires puisqu'à notre avis, dans les déclarations nous recueillons plutôt la composante normative de la représentation, c'est-à-dire ce que les sujets pensent devoir faire ; dans les observations, nous tirons des informations plutôt sur sa composante fonctionnelle, c'est-à-dire comment elles interviennent dans des situations. Pour les élèves, nous ne pouvons mettre en relation les déclarations avec les comportement en classe puisque les élèves interrogés ne sont pas les élèves observés.

Notre travail ne constitue en aucun cas une étude expérimentale sur les représentations. Il s'agit plutôt de l'étude de quelques cas que nous avons cherché à relier à d'autres informations complémentaires. En effet, pour les enseignants, nous nous appuyons essentiellement sur des témoignages recueillis auprès des enseignants avec lesquels nous avons travaillé en classe ou pour animer des stages de formation continue de l'IREM. Pour les élèves, notre analyse se fonde sur des observations informelles en classe, sur une étude de cas et sur les réponses de quelques classes à des questionnaires, l'élaboration du questionnaire étant elle-même un des objets d'étude.

3. Première approche : à quoi sert l'école ?

A la fin de l'année scolaire 84-85, nous avons donc demandé aux élèves de CM2 de la classe que nous suivions de répondre par écrit à 4 questions : A quoi sert l'école ? A quoi servent les mathématiques ? Quel métier aimerais-tu faire plus tard ? Les mathématiques te serviront-elles ? Nous avons reçu les réponses de 18 élèves qui n'abordent pas toujours toutes les questions.

Sur l'école, on a les réponses de 11 élèves qui se répartissent également en 2 catégories : ceux pour qui l'école est associée à un projet social : elle sert pour avoir un métier plus tard (5 élèves), ceux pour qui elle est plutôt associée à un projet culturel : apprendre à lire, écrire, compter (5 élèves). Une seule élève cite les deux, encore que très vaguement pour le projet culturel :"l'école sert à étudier et à apprendre un métier pour plus tard"

Sur les mathématiques, 2 élèves disent simplement que c'est utile, les 16 autres donnent des précisions ; ce sont les utilisations dans la vie courante et particulièrement celles qui sont liées à l'argent, qui sont presque toujours uniquement citées.

C'est parfois lié à une représentation sociale très forte "ça sert à ne pas se faire voler dans les magasins", "si tu reçois ta paye et que tu ne sais pas compter ton patron peut te voler", "quand tu reçois la paye si tu ne sais pas compter ni lire on peut voler ou bien si tu payes le loyer tu peux payer plus cher qu'il ne le faut"; cette élève avait répondu à la première question "pour moi l'école sert à apprendre beaucoup de choses, à écrire, à lire etc...", on voit que, dans ce cas, le projet culturel exprimé est fortement relié à un projet social.

Les autres utilisations citées concernent des plans, des calculs d'aire ou de périmètre (thème récent d'activités mathématiques en classe). Un élève dit que ça lui servira à faire un métier et son métier sera électromécanicien.

Trois enfants citent des utilisations scientifiques, parfois liées à l'imaginaire : "faire des calculs avec les nombres savants", "faire des inventions pour faire évoluer la science", "ils me serviront à fabriquer des ordinateurs, des robots et je fabriquerai des outils qui nous aideront à savoir dans quelle terre nous vivons et peut-être à calculer comment sortir de la terre par le sol en perçant un trou et sortir de l'autre côté de la terre". Les deux premiers de ces élèves expriment une vue culturelle de l'école, le troisième ne répond pas à la première question.

L'un des enfants répond surtout sur le plan affectif avec une réaction positive à l'égard de l'observateur "Les maths servent à être mathématicien et à faire des calculs quand on veut et à être maître mathématicien. J'aimerais être mathématicien". Une autre élève exprime encore plus clairement ses sentiments "Les maths me serviront plus tard quand je serai grande à compter mon argent. Et j'aimerais être mathématicienne. Je souhaiterais y être car cela m'intéresse beaucoup énormément. Je vous embrasse très fort".

Pour leur métier, à part les deux dont nous venons de parler et qui veulent être mathématiciens, 10 élèves (4 garçons, et 6 filles) ont une idée, parfois très réaliste et très précise : deux garçons veulent être ingénieur en électronique (dont un pense que les mathématiques lui serviront à faire des calculs sur les nombres savants), un électromécanicien, un veut "aller au CAP pour faire boulanger sur un loyer de 2500F par mois". Les filles veulent être sage-femme, infirmière, puéricultrice, garder des enfants dans une crèche, être vendeuse de vêtements ou de chaussures, être coiffeuse (cette dernière élève dit "je voudrais faire aussi institutrice mais je crois que ce n'est pas possible car je ne suis pas bonne en maths").

Rien de bien net ne se dessine au sujet des projets professionnels des élèves. La modestie et le réalisme des projets qui nous avait frappée pour les élèves de 6ème l'année précédente semble ici surtout le cas des filles.

Nous n'avions pas demandé aux élèves de mettre leur nom sur leur réponse, nous ne pouvons donc pas relier les résultats scolaires au fait d'avoir un projet culturel associé à l'école. De toute façon, le fait que les élèves mentionnent un projet qu'on peut qualifier de culturel plutôt qu'un projet social n'est pas forcément significatif puisque le projet culturel au niveau de l'école primaire est en général très lié au projet social : il faut apprendre à lire, à écrire et à compter pour faire n'importe quoi ensuite. Mais le fait d'avoir conscience que le projet social passe par un projet culturel et de le dire n'est peut-être pas indifférent. Il est également probable que le fait d'associer un projet social à l'école n'a pas la même signification suivant le milieu d'origine des élèves. En effet il est peut-être nécessaire pour les élèves de milieu populaire d'avoir un projet social ou professionnel beaucoup plus tôt que pour les enfants issus de milieu favorisé pour lesquels il est naturel d'aller à l'école dans l'enfance avec le seul projet d'acquérir des savoirs de base dont on sait qu'ils sont nécessaires, mais dont on n'a pas à rechercher l'utilité dans la vie puisqu'on sait que le véritable enjeu se trouvera beaucoup plus tard (voir par exemple Isambert-Jamati, 1990).

Sur l'utilité des mathématiques, on ne pouvait attendre autre chose que les utilisations du calcul dans la vie quotidienne, notamment ce qui concerne les prix. C'est d'ailleurs ce que les élèves ont l'habitude de rencontrer dans les problèmes de mathématiques qu'on leur propose à l'école.

Pour se faire une idée des représentations des élèves sur les mathématiques, un questionnement direct sur ce qu'ils en pensent est insuffisant parce qu'il est difficile de donner une interprétation précise aux réponses. Il paraît nécessaire de relier leurs déclarations à la manière dont ces élèves abordent des questions précises de mathématiques. C'est ce que nous tentons de faire dans la suite de ce chapitre et dans le chapitre suivant.

4. Le cas de Didier

4.1. Description succinte des conditions de l'observation

Le contexte

Didier est un enfant que je connais bien puisqu'il habite à l'époque le même quartier que moi et que c'est un camarade de classe d'un de mes propres enfants depuis la maternelle. Au début de l'observation, il a 9 ans et 5 mois, à la fin 9 ans 11 mois. Il est vif et intelligent ne semble pas avoir de problème de langage hors de l'école, mais déclare qu'il a des difficultés à l'école et n'est passé qu'à l'essai au CM1. Il vient travailler avec moi pendant environ une heure tous les samedis après-midi du mois de septembre jusqu'aux vacances de Pâques, avec une interruption en janvier et début février due à un séjour en classe de neige suivi des vacances de février.

Le premier objectif du travail avec Didier est de le faire progresser et d'obtenir qu'il ait des comportements plus efficaces par rapport à l'apprentissage des mathématiques. Les séquences ont été enregistrées parce que nous pensions pouvoir les exploiter pour notre recherche, même si elles n'étaient pas réalisées uniquement dans ce but. Elles ont eu lieu avant l'élucidation du concept de représentations métacognitives par A. Robert et J. Robinet et avant que nous ayons lu les travaux sur les représentations sociales. Nous ne disposions donc pas à l'avance de tous les outils d'analyse qui se sont construits en dialectique avec l'observation.

De plus, les conditions de l'observation sont tout à fait particulières puisque Didier vient autant —et sans doute plus— pour jouer avec mon fils que pour travailler avec moi : nous faisons des mathématiques pendant que ce dernier est absent et Didier sait qu'il va jouer avec lui dès son retour. Les conditions ne sont donc pas du tout celles de la classe. Cependant nous faisons l'hypothèse que les renseignements sur les connaissances de Didier et son attitude face aux mathématiques que nous tirons de ces observations nous informent aussi sur ce qui se passe en classe et les difficultés qu'il peut y rencontrer.

Il s'avère tout de suite que Didier a du mal à se concentrer et qu'il peine en calcul oral. Il possède assez bien les techniques opératoires (addition, soustraction et multiplication) mais se perd dans les problèmes. Je décide donc de le faire travailler mentalement le plus souvent possible et de le faire utiliser des représentations variées pour traduire les problèmes qu'il a à résoudre.

Les séances ont été enregistrées à partir de la 3ème et tout ce qu'a écrit Didier est consigné dans un cahier. A la fin de l'année scolaire, les séances ont été occasionnelles et non enregistrées, faute de temps de ma part. Pendant quelques séances, il amène avec lui un camarade de sa classe qui veut travailler aussi et que nous appellerons Claude.

Les sujets abordés

Nous donnons en annexe de larges extraits des séances enregistrées. Nous illustrerons l'analyse en reproduisant dans le texte les passages qui nous paraissent les plus caractéristiques de notre propos.

Les thèmes et problèmes abordés ont été les suivants :

16 septembre 1987 :

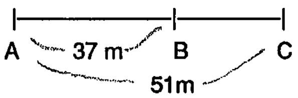
- J'ai 378 œufs que je veux ranger dans des boîtes de 12. De combien de boîtes ai-je besoin ?
- Passage au problème multiplicatif direct.

27 septembre : Problèmes de soustraction donnés par écrit.

1) Jean vide le contenu de 2 sacs de billes dans une grande boîte vide. Jean avait compté les billes du premier sac et en avait trouvé 43. Il compte maintenant les billes qui sont dans la boîte. Il en trouve 125. Combien y-avait-il de billes dans le deuxième sac ? Passage au problème additif direct pour aider à la résolution.

2) Paul dispose d'une barre de pâte à modeler de 100g. Il fabrique des animaux avec cette pâte à modeler. Il a utilisé 20 g pour faire une souris. Il utilise le reste de la barre pour faire un chat. Quel est le poids du chat ?

3) Un enfant va de A à C en passant par B



Quelle distance a-t-il parcourue pour aller de B à C ?

3 octobre.

- Le dernier problème n'a pas été traité à la séance précédente parce que Didier commençait à fatiguer. Il est repris à partir de données concrètes : A maison de Didier, B piscine, C ma maison, et les nombres en jeu sont multipliés par 10 (370 m et 510 m) ce qui correspond à peu près à la réalité du trajet effectué par Didier pour venir me voir.

4) Il a mis 23 s pour aller de A à B et 41 s pour aller de A à C. Quel temps a-t-il mis de B à C ?

5) J'achète des stylos à bille qui valent 3F chacun et des cahiers qui valent 4F chacun pour les 18 élèves de ta classe. Combien d'argent vais-je dépenser ?

6) Je paie avec un billet de 200F. Combien doit-on me rendre ?

17 octobre.

Calcul mental : boîtes de 15 chocolats.

Calcul de 10x15, 11x15, ce qui amène à compter de 15 en 15 (Didier fait des additions de 15)

puis contexte de sacs de 10 billes (pour 15 fois 10 qui n'est pas équivalent par additions répétées à 10 fois 15).

10 fois 23.

Introduction du tableau de numération. ecriture de 57 dizaines, 122 dizaines. Combien de dizaines dans 47, dans 148 ?

Compter de 10 en 10 à partir de 165.

21 novembre.

A la demande de Didier, écriture de grands nombres (ce qu'il fait en classe) avec reprise de ma part du tableau de numération. Je lui demande d'écrire 4 millions, 72 mille, mille, 1 million.

Multiplication par 10 en s'aidant des baguettes Cuisenaire : le grand vaut 10 fois le petit, si le petit vaut 2... 10... 12...Didier fait toujours des additions répétées. Reprise de 10 fois 12 et 12 fois 10. 15 fois 10, 47 fois 10, 38 fois 10.

28 novembre.

- Ecriture de grands nombres avec le tableau de numération : 13400000, 85318, puis sans le tableau 12613, 8042, 1300100, 40101, 1000402, 73012, 100040, 10004050, 4050068, 17401072, 101042003, 60018017.
- Calcul mental : compter de 10 en 10 à partir de 118, puis de 917, puis en reculant à partir de 2007 ; multiplication par 10 : 17 fois 10, 25 fois 10, 112 fois 10, 4317 fois 10, 1942 fois 10.
- Problèmes :

1) un pigeon part de Paris à Lille, ce qui fait 200km, il s'arrête en route à 60 km de Paris. Combien lui reste-t-il à parcourir ?

2) Didier a 9 ans, sa sœur Katia a 2 ans. Quel âge aura Katia quand Didier aura 18 ans ? 35 ans ? ce qui amène à des paliers intermédiaires, puis à remonter le temps jusqu'à la naissance de Katia, avant de demander quel âge aura Katia quand Didier aura 70 ans.

5 décembre (avec Claude).

- Ecriture de grands nombres sans tableau : 1022, 14013, 101307, 1004212,120104005.
- Problème : sur l'autoroute du sud, on paie 25 centimes par km. Entre Paris et Lyon, il y a 400 km à péage, combien paie-t-on ?

Calcul de tête 400x25, ce qui ramène aux multiplications par 10 et par 100, puis aux décompositions d'un nombre en base 10 : 2405 et 1385017.

On revient au problème de l'autoroute puis au prix de baguettes de pain à 2,80.

12 décembre.

- Compter de 7 en 7 à partir de 150.
- Problème des péages d'autoroute avec les autres villes du trajet Paris-Lyon. Cette fois Didier peut le faire facilement par multiplication, mais ne peut utiliser l'additivité.

Multiplication à trous.

```
  1 .
x . 2
-----
  . .
. 2 .
-----
. . 8
```

19 décembre (avec Claude).

- Compter de 13 en 13 à partir de 113.
- Un pâtissier range ses chocolats dans des boîtes de 20. Il a fabriqué 978 chocolats. Combien va-t-il remplir de boîtes ?

20 Février 1988.

- Discussion sur les mathématiques (en s'inspirant du questionnaire proposé aux CM1 et CM2 : voir chapitre 5).
- Problème inventé par Didier.
- Compter de 10 en 10 en reculant à partir de 378.
- Graduation : 5 carreaux pour 100, combien pour 10 ?

27 Février (avec Claude).

- Compter de 8 en 8 en reculant à partir de 315.
- Graduation : 15 carreaux entre 0 et 60. Graduer de carreau en carreau.
- On range 560 objets dans des boîtes de 12. Combien va-t-on remplir de boîtes ?

12 Mars.

- Problème inventé par Didier.
- Retour sur la multiplication par 10.
- Ranger des billes dans 20 boîtes. Combien en mettre par boîte ? pour 240 billes, 340 billes.

4.2. Analyse des observations.

Ce que j'ai pu observer avec Didier semble assez représentatif des difficultés que j'avais remarquées chez les élèves des classes de CM2 de la même école. On peut regrouper les observations faites sur 3 plans : celui du comportement général, affectif et cognitif, celui des méthodes de travail, qui donne une idée des représentations métacognitives : attitude par rapport aux mathématiques, à ce qu'on attend qu'il fasse à l'école..., celui des connaissances, du rapport aux objets de savoir en jeu.

Nous allons essayer de rendre compte de nos observations sur ces trois plans. Ce découpage est un peu artificiel puisque ces trois plans sont étroitement imbriqués ainsi que les différentes rubriques qui nous ont servi à subdiviser chacun de ces plans.

4.2.1. Sur le plan général

- concentration, attention

Ce qui frappe dans le travail de Didier, c'est l'irrégularité de ses performances au cours d'une même séance. Il a du mal à se concentrer et à rester attentif plusieurs minutes de suite : il peut très bien réussir un travail qu'il n'est plus capable de faire une demi-heure plus tard. Quand on est resté longtemps sur une question, Didier se déconcentre, ne fait plus attention et fait des erreurs sur des questions qu'il savait traiter quelques minutes auparavant. Par exemple, le 17-10, il calcule assez facilement 10 fois 15 en début de séance et, après avoir calculé péniblement 11 fois 15, en ajoutant des 15, il ne peut plus le refaire. On a un autre exemple le 5-12, dans le calcul de 400x25, après diverses erreurs qui pouvaient correspondre à des mauvaises conceptions, on revient sur 10x100 que Didier savait très bien calculer 10 minutes avant, et il propose successivement 200 puis 1010. voici un extrait de cette séance :

M. Si 4 X 25 ça fait 100, 400 X 25 qu'est ce que ça fait ?
D. Je vais écrire le nombre, je sais pas le dire.
Il écrit et lit 100 000.
M. Pourquoi 100 000 ? Essaie de réfléchir. Tu dis 4 X 25 ça fait 100, si c'était 40 X 25 ?
D. ça je sais pas ... non pas 200 .... ça ferait mille
M. Pourquoi ? 4 X 25 ça fait 100, alors 40 X 25 ?
D. Je sais pas
M. 10 fois, 40 X 25 c'est 10 fois 4 X 25, 4 X 25 ça fait 100.
D. 100, 200, 300 ....
M. Non, pas comme ça, 10 X 100 ça fait 1000, et 400 X 25 ?
D. Je dis au hasard.
M. On sait que 40 X 25 ça fait 1000.
D. Attendez j'ai une cervelle d'oiseau, un petit pois, un microbe quoi !
M. Il faut se concentrer. On cherche 400 X 25 dans sa tête et on sait que 4 X 25 ça fait 100 .... Reprenons, 400 X 25 c'est pareil que 100 X 4 X 25 (je l'écris en même temps), c'est pareil que 100 X 100.
D. ça fait 200
M. Non
D. 1000
M. Il faut très bien savoir multiplier par 100, par 10 .... 100 X 100 ça fait combien?
D. 1 million
M. Non
D. 1 milliard
M. Non
D. C'est un chiffre ferme
M. Qu'est que tu entends par là ?
D. un 1 et après que des zéros.
M. Est-ce que vous savez faire 100 X 10 ?
D. Oui, 1000
M. Alors 100 X 100 ? 100 c'est 10 X 10 ?
D. Oui
M. Alors 10 X10 X 100 ?
D. ça fait 20 X 100
M. Mais non, pas 20 X 100, 10 x 100 ça fait 1000, il faut encore multiplier par 10, 10 X 1000 ça fait combien ?
D. Un million
M. Mais non, 10 X 1000 ça fait combien voyons ! vous allez faire votre tableau, il n'est pas dans votre tête ! qu'est ce qui se passe quand on multiplie par 10 ?
D. On obtient un chiffre ferme.
M. Oui, on décale dans le tableau. Tu as 1000, 10 fois 1000, ça fait 10000 bien sûr !
D. Ah !
M. Quand on multiplie par 10, les dizaines deviennent des centaines etc... Alors, ça fait combien 100 X 100 ?
D. 10000.
M. Bon, je vais vous en poser quelques-uns de tête. 10 X 10 000....
Des nombres comme ça, on ne peut pas les voir d'un coup, il faut qu'ils soient rangés dans votre tête !
Tu as des caisses de 1000, tu as combien de caisses pour faire 10 000 ?
D. J'en ai 10.
M. Maintenant, si je te dis10 X10 000, ça fait 10 X 10 caisses.
D. 10 X 10 = 20, non 100, 100 000.
M. 100 X 10 ?
D. ça fait pas 1 million ...
M. Est-ce que ça peut être si gros que ça ? 100 X 10, qu'est-ce que vous devez penser ? Je suis sûre que si je le dis dans l'autre sens, vous allez trouver. 100 fois 10, c'est pareil que ?
D. 10 fois 100
M. Donc, ça fait ?
D. 200
M. Non.
D. 1010.
M. Non, pas 1010, 1000.
D. Bon, disons que j'ai 10 stylos dans un paquet et que j'ai 100 paquets
M. Combien tu as de stylos ?
D. 1000. J'ai écouté la réponse que vous avez dit.

On ne peut pas dire que ces erreurs ne sont pas significatives de mauvaises conceptions (confusion entre addition et multiplication notamment), mais elles n'en sont pas vraiment significatives non plus : ce n'est pas un modèle erroné que l'élève utilise systématiquement. Il sait certaines choses sur la numération et les opérations mais cela coexiste avec des "automathismes" comme dirait S. Barruck, qui surgissent quand Didier n'a pas vraiment envie de réfléchir ou que la situation lui paraît trop compliquée : dans cet extrait du 5 décembre, il est clair que le recours à l'associativité, relativement formalisée, que je lui demande à ce moment là lui paraît au-dessus de ses forces et qu'il se démobilise.

De même, quand il résout un problème pour lequel il n'a pas un moyen de réponse immédiate, même s'il développe une stratégie adaptée, il perd le fil de ce qu'il est en train de faire. Il semble que sa capacité de stockage en mémoire immédiate soit insuffisante, surtout en regard des procédures généralement longues qu'il est amené à utiliser, étant donné qu'il ne maîtrise pas le sens des algorithmes que par ailleurs il possède sur le plan technique —du moins est-ce l'hypothèse que nous faisons. Ceci explique sans doute qu'il essaie absolument d'éviter ce genre de procédures pour résoudre un problème, qu'il n'y recourt qu'à regret et en dernier ressort. On peut en voir des exemples dès la première séance du 16 septembre, et aussi le 19 décembre dans le problème des chocolats. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant : attitude face à un problème.

- *langage*

Nous avons dit que Didier ne nous paraissait a priori pas avoir de problème particulier au niveau du langage oral. Cependant, en mathématiques, il est parfois difficile d'avoir un récit clair ou même cohérent, de ce qu'il a fait. Par exemple, le 3 octobre, il est difficile d'avoir une idée précise de la consigne donnée en classe :

D. Ce matin on a fait un jeu mathématique avec des dés. Alors, on avait des dés, puis il fallait .... par exemple on jetait les dés, on obtenait un numéro et on devait les classer dans des colonnes. Alors à ce moment là, Tala et moi, on a tiré, on a fait 2 fois 8, 3 fois 7 et une fois 6 alors on a gagné 5 points.
M. Pourquoi ? explique-moi comment on mettait les points. Ils étaient comment les dés? c'étaient des dés normaux ?
D. Oui, des dés comme ceux-là.
M. Et on jouait avec combien de dés ?
D. Généralement avec 4. Alors on a tiré, on a trouvé ... on a réussi à avoir un 6 avec trois 7.[1]
M. Il y a des 7 sur des dés ?
D. Non, on a additionné tous les numéros qu'on avait.
M. Sur les quatre dés alors
D. Oui, et puis ensuite on a obtenu trois 7, et un 6
M. 3 fois 7 et 1 fois 6 ?
D. non en tout, on a eu 16 points et puis la maîtresse a promis qu'on allait recommencer samedi prochain.

- *rapport avec le temps*

Dans le problème d'écart d'âge entre sa sœur et lui, le 28 novembre, on se rend compte que Didier n'a une notion linéaire du temps qui passe que pour des dates qui ne sont pas trop éloignées du présent. Il sait quel âge il avait l'année dernière ainsi que sa sœur, quel âge ils auront l'année prochaine, dans deux ou trois ans. Pour des temps plus anciens ou plus lointains, la question semble ne pas avoir beaucoup de sens et Didier pense par exemple qu'il vieillit plus vite que sa sœur parce qu'il est plus âgé ou un peu plus tard que sa sœur va le rattraper. Il n'est d'ailleurs pas clair qu'il soit persuadé de ce qu'il dit. Il le fait peut-être simplement pour justifier la réponse qu'il vient de donner, sans avoir réfléchi à la question. Quand il s'agit de situations réelles et vécues, il sait de quoi il parle, mais pour les spéculations dans l'avenir lointain, c'est autre chose qui fonctionne et les références à la réalité n'ont plus cours : ainsi Didier sait très bien que son frère qui a 24 ans ans, après 20 ans est passé par 21, ..., mais il assure sans sourciller qu'il se passera 1 an entre ses 20 ans et ses 30 ans ! A la fin de cette séance, on voit que Didier a sans doute cependant quelques difficultés réelles entre le temps date et le temps durée : il a tendance à confondre, au moins dans le passé, l'âge qu'il avait et le temps qui s'est écoulé.

M. A ton avis, qui est-ce qui vieillit plus vite, Katia ou toi ?
D. Ben moi, certainement !
M. Ah, tu vieillis plus vite que Katia, tu penses ?
D. Ben oui, ben oui !
M. Tu es plus vieux, mais est-ce que tu vieillis plus vite ?
D. Attendez, laissez-moi réfléchir ... Ah, j'ai un microbe à la place du cerveau !
Je repose la question
D. 12 ans
M. On va vérifier
D. Elle a quel âge maintenant ? 2 ans
M. Oui et l'an prochain ? 10 ans, 3 ans, tu es sûr ?
D. Oui
M. On va continuer : en 89 ?
D. 11 ans, 4 ans, 12 ans, 5, 13 ans, 6, 15 ans
M. 14 ans
D. Non
M. Ah, tu sautes, d'accord 15 ans, quand tu auras 15 ans elle aura quel âge ?
D. 12 ans
M. Ah, tu crois, brusquement toi quand tu passes de 13 à 15, elle, passe de 6 à 12, elle grandit beaucoup !
D. Je mets 4 d'abord (i.e. 14), ça va faire 9

[1] Peut-être fallait-il comprendre "un 6 avec 3, 7" (le 7 étant lui-même obtenu à partir de 2 dés ?

M. Quand tu as 13 ans, elle a 6 ans, quand tu as 14 ans, elle a quel âge ?
D. 9 ans
M. Tu crois qu'elle va sauter de 6 à 9 ? Toi, tu vieillis d'un an et elle vieillit de combien ?
D. D'un an aussi ... donc elle aura 7 ans
M. Ben oui, et quand tu auras 15 ans, elle aura quel âge ?
D. 8 ans
M. Oui, elle aura 8 ans, elle aura pas 12 ans. Regarde tu avais trouvé que quand tu aurais 18 ans, elle aurait 11 ans, alors quand même quand tu aurais 15 ans, elle aurait moins que 11 ans c'est normal.
Didier rit
M. Quand même elle grandit vite, ta soeur avec toi, tu crois qu'elle va te rattraper?
D. Je crois bien, enfin je croyais bien.
...
M. Ah bon ? quand tu as 20 ans, l'année d'après tu as 30 ans ?
D. Ben oui
M. Qu'est ce que tu vas vieillir vite, tu as être bientôt grand-père ! Tu as un grand frère, il a déjà eu ses 20 ans.
D. Depuis longtemps ! Il a eu 24 ans cette année
M. Et après 20 ans il a eu 30 ans !
D. Non, il a eu 21 ans.
M. Et alors ? il faut combien de temps pour passer de 20 ans à 30 ans ? Ton frère a eu 20 ans depuis longtemps et il n'a pas encore 30 ans !
D. Un an, elle aura 14 ans !
M. Pour passer de 20 ans à 30 ans, il faut un an ?
D. Il faut 10 ans, 10 ans plus tard ça fait 23 ans
M. Oui, elle vieillit à la même vitesse que toi ... et alors quand tu auras 35 ans ?
D. 5 ans plus tard, ça va faire 28 ans.
M. On va faire une méthode pour aller plus vite. Tu as combien d'années de plus que ta soeur ? Tu avais quel âge quand ta soeur est née ? On va reculer en arrière. Là, tu as 9 ans et Katia 2 ans. L'année dernière qu'est ce qui se passait ?
D. Katia avait un an, donc j'avais 8 ans, j'avais 7 ans quand Katia est née.
M. Donc tu as combien d'années de plus que Katia ?
D. 2
M. Tu as 2 ans de plus que Katia !
D. Non, 5 ans
M. 7 ans ! quand elle est née, tu avais 7 ans
D. Mais oui ! en 82 je suis parti en vacances à l'Ile Maurice, donc ça fait 7 ans que j'y ai pas remis les pieds.
M. Non, si tu y es allé en 82, ça fait pas 7 ans, ça fait combien ?
Didier compte 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 8......
M. 87, arrête toi.
D. Ah, 5 ans ça fait 5 ans que j'y ai pas remis les pieds !
M. Et Katia n'était pas née !
D. Certainement pas !
M. Quand elle est née, tu avais 7 ans, après elle a un an et toi 8 etc .... Tu as toujours 7 ans de plus qu'elle et elle a toujours 7 ans de moins que toi.
D. Bé oui !
M. Comment on peut vérifier qu'on s'est pas trompé ?
D. On fait 35 - 28
M. Si tu veux ou bien, plus simplement, 35 - 7, et on doit trouver ?
D. 28
M. Et quand tu auras 70 ans, quel âge aura Katia ?
D. 70 - 7
M. De tête
D. j'y arrive pas
Il pose la soustraction et trouve 63 ans.

- attitude face à une difficulté

Didier se bloque facilement quand il a échoué avec une méthode qu'il pensait juste si on n'arrive pas à lui indiquer l'endroit exact où il s'est trompé, il a du mal à saisir des indications qui se réfèrent à une autre méthode, même très élémentaire. Il a alors tendance à se décourager et à dire n'importe quoi. Par exemple, le 20 Février, il a posé dans sa tête la soustraction 500 - 440 et a trouvé 140, il n'arrive pas à trouver le résultat correct de tête malgré les questions intermédiaires destinées à l'aider, il ne peut comprendre qu'en posant la soustraction et en retrouvant ainsi son erreur. Il n'accepte et ne comprend réellement tout ce que je lui ai demandé de faire qu'à la fin de la séance quand je lui permets enfin de poser l'opération.

M. Mais combien tu paies ? Un train coûte 110 F
D. 330 F
M. Est ce qu'il te reste de quoi en acheter un autre ?
D. Oui, je peux en acheter 5 ... ah non, je peux en acheter 4 sinon je vais avoir 50 F de plus et j'aurai pas de quoi payer, 5 trains c'est 550 et j'ai 500 seulement.
M. Tu en achètes 4. Combien il te reste ?
D. 4 trains 440 F. Il me reste pas 100 F, ça me ferait 540 F.
Il répond cependant 540
M. Quand tu fais les courses, tu vérifies ou tu prends ce qu'on te donne ?
D. Je prends ce qu'on me donne
M. Tu m'as dit que tu faisais des maths en faisant les courses.
Je lui fais répéter ce que l'on cherche. Cette fois, Didier n'arrive pas à se concentrer. Je lui rappelle que je ne l'aiderai pas et qu'il doit s'imaginer dans le magasin en train de payer : tu avais 5 billets de 100 F, maintenant on imagine que tu as de la monnaie.
D. Un billet de 100 F et 4 pièces de 10 F ça fait ? ... 4 billets de 100 F et 4 pièces de 10 F.
M. Tu avais 5 billets de 100 F
D. J'ai trouvé, il faut que je fasse une soustraction, je vais essayer de la faire de tête ... 140 F.
M. C'est quoi ?

D. L'argent qu'on me rend
M. Quand tu as la monnaie, tu donnes 4 billets de 100 F et 4 pièces de 10 F. Si tu donnes 5 billets de 100 F, on te rend un billet de 100 F et encore des pièces tu crois ?
D. Non
M. On te rend plus ou moins de 100 F ?
D. moins ... 40 F
M. on vérifie.
Didier fait 440 + 40 = 480 mais ne conclut pas. Il ne sait plus combien il avait.
M. Si tu as 100 F et que tu achètes quelque chose à 40 F, combien on te rend ?
Il répond 60 F mais ne peut pas répondre au problème. Je lui fais dessiner les billets pour 440 F et 500 F et lui demande de faire les échanges pour rendre la monnaie. Il trouve enfin la solution. Je lui laisse alors poser la soustraction, il retrouve son erreur et revient dans le problème : "c'est normal enfin, j'avais oublié qu'il faut mettre la dizaine ici" (retenue à côté du 4).

On en voit un autre exemple, le 12 mars, simplement à propos de 20x10, ce qui nous montre la fragilité encore grande des connaissances sur la numération et la multiplication par 10. Comme 20x10 ne fait toujours pas 1000, Didier est prêt à faire un peu n'importe quelle proposition (3000, 2000, 120) en espérant que la correction et la réponse juste viendront du maître, avant de se reposer vraiment la question. Il veut bien commencer à faire un effort mais résiste à accepter la responsabilité de savoir lui-même si ce qu'il dit est juste ou non, s'il a ou non répondu au problème, le verdict doit venir du maître : "vous m'arrêterez ?"

D. Disons que j'ai 1000 billes. 1000 c'est 20 x 10
M. 20 x 10 ça fait combien ?
D. Non, j'ai dit une bêtise .
M. Dis-moi déjà 20 x 10, c'est combien ?
D. 3000
M. Didier, allez
D. Je trouve 3000
M. 20 x 10, tu trouves 3000 tu es sûr de toi ?
D. Oui ... ah non ... 20 x 10
D. 2000
M. 20 x 10 ?
D. 2000
M. 10 x 10 ?
D. 1000
M. 10 x 10 ?
D. 100
M. Alors 20 x 10 ?
D. 1000
M. Non, si 10 x 10 fait 100, donc 20 x 10 ?
D. 120
M. Non, 20 c'est 2 x 10 donc 20 x 10 ?
D. 2000
M. Pas 2000...
D. Attendez ... 20 000
M. Calme-toi un peu et réfléchis
D. J'y arrive pas
M. Si tout à l'heure tu l'as bien fait. C'est facile de multiplier par 10.
Didier compte 10, 20, ... 170 et dit "vous m'arrêterez ?"
M. Non, je ne t'arrêterai pas, c'est à toi de t'arrêter.
D. Mais vous m'arrêterez quand je serai tout près, hein ?
M. Non, regarde 20 x10 c'est comme 10 x 20, d'accord ?
D. Mais une fois 2 c'est bien 2 ? Voilà, eh bien, ça doit faire 200. Je l'avais bien dit !

- représentation de soi, de ses difficultés

Didier pense qu'il ne sait pas réfléchir et il répète à tout propos des expressions qu'il a dû entendre à la maison ou à l'école : (je n'y arrive pas) "parce que je ne réfléchis pas assez" ... "oh la la ! j'ai une courte mémoire sans doute !" (17 octobre) "oh, la, la, c'est en lecture des nombres maintenant que je suis mal !" (28-11) "le problème, c'est que ça rentre par là et que ça sort par là" (en montrant ses oreilles, le 28-11) "j'ai un microbe à la place du cerveau" (28-11) "attendez, j'ai une cervelle d'oiseau, un petit pois, un microbe, quoi !" (5-12). Cela ne semble pas l'affecter d'ailleurs, il paraît très content, mais c'est une manière d'excuse : il ne faut pas m'en vouloir, j'ai une cervelle d'oiseau. C'est sans doute aussi une bonne raison qu'il se donne pour éviter de prendre la moindre responsabilité dans la construction de sa connaissance.

- ce qu'il aime faire ou non

Il aime les problèmes qui parlent des animaux parce qu'il aime les animaux. Le contexte choisi pour un problème va donc avoir une influence sur l'intérêt qu'il va y porter et son envie de le résoudre.

Didier aime refaire quelque chose qu'il a réussi quand il pense avoir compris "le truc", pour vérifier qu'il l'a bien compris. On trouve plusieurs exemples de cela. Après l'explication de la multiplication par 10 dans le tableau de numération le 17-10 : D. "Ah, c'est fastoche ! vous pouvez m'en donner une série ?" Dans ce cas, la suite nous prouvera d'ailleurs qu'il n'a pas encore vraiment compris. Le 28-11, quand il pense savoir écrire les grands nombres : M. "on va faire les grands nombres avec le tableau et les petits sans" D. "je voudrais essayer un gros sans le tableau... pas un trop trop trop gros !" (...) après le succès D. "vous m'en faites un avec des pièges maintenant ?"

Pourtant il déclare ne pas aimer ce qui est répétitif et ne pas aimer les exercices. Il préfère les leçons parce qu'on y apprend quelque chose de nouveau. Il n'aime pas ce qui est trop difficile comme les divisions ou les multiplications parce qu'il ne connaît pas bien les tables, comme il le déclare dans cet extrait du 3 octobre :

D. Les problèmes, je commence à bien aimer, mais entre les divisions et tout ça, en plus on n'a pas encore appris les divisions, alors ce que j'aime le plus, c'est les soustractions et ce que j'aime le moins c'est les multiplications.
M. Pourquoi ?
D. Parce que c'est trop dur les multiplications.
M. Pourquoi c'est dur ?
D. Parce que, à chaque fois, il faut que je compte sur mes doigts.

Mais il n'aime pas non plus ce qu'il pense bien connaître comme les additions, bien qu'il les trouve parfois difficiles. Il n'aime pas beaucoup les opérations, mais il aime ce qu'il est en train de comprendre : en février, comme en octobre, il déclare aimer les soustractions, ce qui d'une part est un enjeu pour lui, et d'autre part un enjeu qu'il juge accessible.

- sa vision des mathématiques

Didier a une image positive des mathématiques. En réponse au questionnaire préparé pour les classes de CM (voir chapitre suivant et ses annexes), Didier nous déclare qu'il aime les mathématiques et qu'il adore surtout la géométrie. Les mathématiques servent dans la vie puisqu'il s'en sert en faisant les courses et que tout le monde s'en sert. Il y a des métiers où on les utilise davantage, comme "comptable ou les ingénieurs qui font la fusée Ariane". A la fois, il pense qu'il faut réfléchir pour faire des mathématiques, il le répète souvent tout en essayant de l'éviter et en même temps, il pense que la vraie réflexion, sûre, est à l'extérieur des mathématiques. De plus, il pense qu'il faut comprendre, qu'on doit comprendre, mais qu'il n'y a rien à faire pour aider cela, comme on peut le voir sur cet extrait du 12 mars:

D. ...oui, j'en suis très sûr même.
M. Explique-moi pourquoi.
D. Parce que j'ai très bien réfléchi, j'ai pas fait de mathématiques.
M. Imagine que tu as un copain à côté de toi et qu'il n'a pas compris.
D. Il n'avait qu'à comprendre, il faut qu'il comprenne !
M. Si je te disais cela, qu'est-ce que tu en penserais ?
D. Je comprendrais !

- ce qu'il pense devoir faire

Il pense qu'il faut apprendre les leçons, et appliquer les règles que donne la maîtresse. Les exercices sont de la répétition et ne permettent de rien apprendre de nouveau. Il faut aussi bien réfléchir, mais Didier ne sait pas comment s'y prendre et cela lui semble sans doute hors de portée de sa "cervelle d'oiseau". Tout ceci est évidemment très lié à ce qui a été évoqué au paragraphe précédent.

Il ne s'autorise pas à agir sur le texte du problème pour traiter un cas plus simple par exemple. Cela apparait notamment dans le problème de division du 19 décembre:

M. Si 978, c'est trop dur d'un coup, faites-le en plusieurs fois.
D. Vous pouvez changer le nombre ?

Savoir si c'est juste ou non n'est pas de sa responsabilité et en général il n'a pas d'idée pour vérifier ce qu'il avance au niveau des méthodes.

- ce qu'il attend de notre travail

Didier attend que je l'aide pour qu'il ait des bonnes notes à l'école et il voudrait aussi faire du français, de l'orthographe en particulier (voir 27-2).

Il voudrait me montrer son cahier de l'école, mais l'oublie toujours (ou plutôt oublie de demander la permission de l'emmener) et montrer à la maîtresse le cahier sur lequel il travaille avec moi (c'est irréalisable puisqu'il n'y a que des morceaux de calculs incompréhensibles sans l'enregistrement). En fait, je n'ai jamais rencontré la maîtresse et il n'y a eu aucun lien direct entre le travail à l'école et le travail avec moi, hormis ce qui passait par la demande explicite de Didier.

4.2.2. Sur le plan des méthodes de travail, des représentations métacognitives

- recherche d'un modèle et prise en compte des données

Dès qu'il est en présence d'un problème, Didier cherche à quel type de situation déjà résolue à l'école le rattacher et donc quel type d'opération va convenir pour trouver la réponse. Il reconnaît le plus souvent bien s'il s'agit d'un problème additif ou d'un problème multiplicatif mais il ne prend pas en compte toutes les données du problème. Par exemple, le 16 septembre, il reconnaît bien une situation multiplicative : il s'agit de ranger des œufs dans des boîtes de 12, mais il ne s'inquiète pas de savoir si 378 représente des œufs ou des boîtes ou plutôt, il évite de s'en inquiéter pour pouvoir donner rapidement une réponse au problème. Il réagit de la même manière 3 mois plus tard (19-12) devant le même type de situation (boîtes de chocolats). Il tord éventuellement le texte du problème et le lit de façon qu'il relève du modèle qu'il a reconnu :

M. On va faire un problème. Un patissier fait des chocolats qu'il met dans des boîtes de 20. Le patissier a fabriqué 978 chocolats. Combien remplit-il de boîtes?
D. J'ai trouvé ce qu'il faut faire. Une multiplication, 978 X 20
M. Pourquoi ?
D. Il y a plusieurs boîtes ... C'étaient 978 boîtes ou 978 chocolats ?
M. 978 chocolats
D. Parce qu'il y a plusieurs chocolats
M. Oui, il y en a 978, ça fait plusieurs et alors ? Quelle est la question que je t'ai posée ?
D. Combien de chocolats ?
M. Non, puisque je t'ai dit combien il y avait de chocolats
D. De boîtes !
...
D. Alors c'est une multiplication
M. Non, ce n'est ni une multiplication ni une addition. Ce qu'il faut, c'est réfléchir et trouver la solution du problème, faire travailler ses méninges.

Son attitude à cet égard change suivant qu'il considère le problème comme un problème scolaire qu'il s'agit de résoudre avec des opérations ou comme un problème pratique : le 16-9, quand je lui demande de s'imaginer devant la caisse d'œufs et d'aller chercher les boîtes dont il a besoin, il raisonne correctement par approximations. En réalité, il semble que Didier accepte difficilement un problème qui ne relève pas d'un modèle connu et qui va nécessiter tout un processus, une longue suite d'opérations. Il ne le fait que quand il n'a plus d'autre issue. Nous avons déjà parlé du problème des chocolats le 19-12. Un autre symptôme en est par exemple sa réaction le 3 octobre quand on lui dit qu'il n'y a pas 36 nombres à essayer "heureusement, parce que s'il y en avait 36, ouh, là là ! ".

Il a encore une réaction analogue le 27 Février pour le problème du rangement de 560 objets par boîtes de 12. Il reconnaît un bon modèle de groupements : ses progrès en numération lui permettent de répondre directement dans le cas de groupements par 10, il sait qu'en groupant par 12 il doit obtenir un résultat plus petit, et pourtant, moins d'une minute après il propose 560x12. La division n'étant pas encore disponible il répond par une multiplication qui pourrait résoudre un problème pas très différent de celui qu'on lui a posé : 560 boîtes de 12 objets au lieu de 560 objets à répartir par boîtes de 12.

On range 560 objets dans des boîtes de 12.
D. j'ai trouvé 56. C'est 10 hein ?
M. Mais on les range dans des boîtes de 12.
D. Si c'était 10...
M. Tu as raison, si c'était 10, il faudrait 56 boîtes, mais c'est 12. Tu peux déjà dire quelque chose, c'est plus ou moins de 56 ?
D. moins de 56 ... Attendez
Il fait 560 X 12

- *recherche d'algorithmes*

Quand il résout une question qu'il pense avoir comprise, Didier cherche une règle de calcul réutilisable. Il cherche ainsi à faire des économies de calcul. Il nous déclare d'ailleurs qu'il n'aime pas les exercices répétitifs. Par exemple, le 28 novembre, sur le problème des âges, il a réussi facilement la première question du passage de 9 à 18 par les doubles et il a ajouté 9 à l'âge de Katia, mais il a retenu 9 non comme la différence entre 18 et 9 mais comme la moitié de 18, ce qui fait que quand on lui propose 35, il cherche la moitié de 35 pour faire ensuite +2 (en réalité, il fait d'ailleurs -2). Le seul autre modèle qu'il a à sa disposition à ce moment là (compter de 1 en 1) est fastidieux, et il le refuse, même quand je le lui propose un peu plus tard. Il ne sera satisfait que tout à fait à la fin quand on aura trouvé le bon modèle (+7), il peut alors vérifier les résultats de cette façon, et même trouver pour un temps très éloigné.

Je lui demande quel âge aura sa soeur quand il aura 18 ans.
D. 9 ans .... ah non, 11 ans. Je l'ai fait de tête, j'avais déjà les 2 dans la tête, et j'ai compté jusqu'à 18 combien il y avait, et j'ai coupé à la moitié et j'ai rajouté les 2, donc elle aura 11.
M. Parce qu'il va se passer combien d'années jusqu'à tes 18 ans ?
D. 9 ans.
M. Quand tu auras 35 ans, elle aura quel âge ?
D. A partir de 11 ans ?
M. Non, quand toi, tu auras 35 ans elle aura quel âge ?
D. Elle aura 25 ans ... non ....
`M. Comment on pourrait savoir ?
D. 23 ans, elle aura
M. Comment tu sais ?
D. Parce que j'ai fait .... j'ai partagé 35, ça a fait 25, alors j'ai enlevé 2, ça a fait 23.

...
M. Et pourquoi 25, je t'ai dit 35 !
D. Ben, justement, ça va être la moitié, je vous dis.
M. Et pourquoi il faudrait faire la moitié ?
D. Et après on fait plus 2
M. Et pourquoi la moitié ? Je ne comprends pas
D. Ici j'ai fait la moitié regardez.
M. Ah oui, mais, pourquoi la moité, 18 c'était le double de 9.
D. C'est dur cette fois-ci
M. Si c'est dur, tu peux peut-être chercher des intermédiaires
D. Comment, je ne comprends pas
M. Tu ne vas pas passer directement de 18 ans à 35 ans.
D. Ah non, sûrement pas
M. Il va peut être y avoir des intermédiaires plus faciles à calculer
D. Bon, disons que j'en ai 18. 18 et 18, ça fait combien au fait ... 32 ? non ... 36 ! j'enlève un, ça fait 35, alors si je veux faire la même chose, il faut que ça donne 25, vous comprenez.

On a un autre exemple assez net le 27 février en calcul mental : on compte de 8 en 8 en reculant, Didier a remarqué les suites sur les chiffres des dizaines et des unités "celui du milieu diminue de 1 (M. et celui des unités ?) comme il est impair, il va augmenter de 2", mais cette règle n'est pas équivalente pour lui à l'explication que je donne "enlever 10 et ajouter 2" et il se bloque à 259 : après avoir répondu étourdiment 271 et 261, il reste longtemps ferme sur 241 qui respecte sa règle, sans la retenue, puis sur 243 (cette fois il a bien ajouté 2 au chiffre des unités). Quand, avec mon aide et celle de Claude, il a reformulé sa règle en -10 +2, il calcule bien, sur des nombres plus petits il est vrai.

M. 283 - 8 ?
D. 275 ? oui, 275, parce que, ici, c'est les nombres impairs qui sont ici à la fin (unités), et puis celui-ci (dizaines), il doit tout le temps changer.
M. Ce n'est pas une raison suffisante, il pourrait changer autrement.
Didier écrit ensuite 273.
M. Pour trouver 273, qu'est-ce que tu aurais enlevé ? L'autre jour, tu savais très bien faire parce qu'on allait de 10 en 10, 283 - 10 = 273. Mais, ici, on enlève 8, alors que faut-il faire ?
D. On enlève 2 à 10.
M. Justement, on enlève 2 de moins, donc ça fait ? ... ça fait - 10 + 2. Allez, on repart de 275. (à Claude) 275 - 8 ?
D. J'ai trouvé
C. 267
M. Comment tu as fait ?
C. 275 - 10, 265, il faut rajouter 2, 267
M. A toi, Didier
D. 259
M. comment tu as fait ?
D. Comme tout à l'heure. J'ai bien regardé ces nombres là 291, 283, 275, 267, j'ai remarqué que ce nombre là (les dizaines), c'est du plus grand au plus petit qu'on va.
M. Pas n'importe comment
D. En faisant - 8 à chaque fois
M. Tu as 2 chiffres qui ont changé
D. Celui du milieu diminue de 1
M. et celui des unités ?
D. Comme il est impair, il va augmenter de 2
M. .... Oui on enlève 10 et on ajoute 2
D. Je crois que j'ai trouvé l'autre, 271
M. Tu augmentes maintenant ?
D. 261, ... 241
M. Tu penses ? 259 - 8, si tu n'avais pas vu ta technique, tu ne sais pas faire 9 - 8 ?
D. Si ça fait 1
M. Alors 259 - 8 ?
D. 241 ça fait
M. Non, le chiffre des dizaines ne doit pas diminuer cette fois, 241 et 8 ?
C. 247
M. 9 - 8
D. ça y est, j'ai trouvé
C. 9 - 8 = 1
D. J'ai trouvé, 243
M. 259 - 8, c'est facile ça, c'est beaucoup plus facile que ce qu'on a fait avant
D. Je suis habitué à faire comme j'ai commencé
M. Il ne faut pas faire comme on a commencé sans réfléchir. Il faut toujours réfléchir.
D. En tout cas, c'est dans les 200, je l'avais sur le bout de la langue
M. Qu'est ce que c'est 259 ? Comment le décomposer en 2 morceaux ?
D. Je mets 200 et 59
M. Si tu veux, et 59 - 8 ça fait combien ?
D. ça fait 51. Ah, je l'avais au bout de ma langue !
M. Pourquoi vous me dites 241 ? si vous enlevez 10, ça fait 249, et il faut ajouter 2, ça fait 251. Mais là ce n'est pas la peine, il n'y a pas de retenue, il suffit de regarder les unités, c'était plus simple.
D. Ensuite, 243, j'en suis sûr et certain
M. Pourquoi ?
D. J'en suis sûr et certain comme ça
M. Vérifie
D. J'ai vérifié
M. Explique comment tu as trouvé
D. J'ai fait comme vous m'avez dit de faire, j'ai fait la méthode que vous avez dit.

M. C'est quoi la méthode ?
D. Ah ben non, c'est ma méthode à moi .... ça diminue celui-là et puis ....
M. Oui, tu enlèves 10 et tu
C. ajoutes 2
D. J'allais dire
On continue : après 235, Didier propose 267. Je le rappelle à l'ordre et il corrige 227. Pour le suivant, il commence par dire 209, avant de rectifier ..... il répète ce genre d'erreurs plusieurs fois de suite mais reprend très bien pour le passage de 203 à 195. Ensuite ils continuent assez facilement jusqu'à 3.

- *mobilisation des connaissances disponibles*

Les connaissances anciennes semblent disponibles de façon très irrégulière. Par exemple, le 17 octobre, Didier utilise + 10 +5 pendant un moment puis n'y arrive plus : d'une part la taille des nombres augmente (franchissement de la centaine), d'autre part l'attention de Didier baisse. Il n'est pas capable d'utiliser pour se simplifier la tâche et se donner des points de repère, des connaissances sur les nombres impairs qu'il a par ailleurs.

M. Ah, tu crois, 75 et 15 ?
D. 85
M. Non, 75 et 15
D. C'est pas 95 ?
M. Non plus, regarde 75, pour ajouter 15 qu'est ce que tu peux faire d'abord ? Essaie que ce soit plus facile ... 15 c'est 10 et 5.
D. Donc je pose déjà le 5, ça fera 80, ça fera 90.
M. Oui
D. ça fera déjà 7 boîtes, ah non, ça fera 6, parce que tout à l'heure j'en étais à 5
M. oui, bon 90, après ?
D. 95
M. C'est 15
D. 100, là c'est dans les 100, 115, 105, je me trompe.
M. 105
D. ça fait 7 boîtes 115 130
M. Tu en étais à 105, 105 et 15 comment tu as fait ?
D. j'ai compté sur mes doigts
M. Ah bon, voilà, tu te trompes toujours quand tu comptes sur tes doigts. C'est trop grand pour que tu comptes sur tes doigts. Comment tu fais pour rajouter 15, on a dit.
D. 105, attendez 125 ça fera.
M. mais non, 105 tu ajoutes déjà 5, ça fait ?
D. 110
M. Et encore ?
D. 10
M. ça fait ?
D. 120
M. Voilà
D. Après c'est 135, après 145
M. Non, 145, regarde, est-ce que ça peut se terminer par un 5 après 135 ?
D. Non, 140
M. 135 et 5 ça fait 140
D. Ah oui, c'est des nombres impairs.
M. Lesquels sont impairs ?
D. Les numéros impairs c'est 1, 3, 5, ... 19
M. D'accord, et là où on en était ?
D. 7 boîtes
M. 7 boîtes, tu te souviens combien c'était ?
D. Non
M. Ah, tu vois, il faut aussi compter les boîtes. On en était à 135, c'est pas 7 boîtes.
D. C'était 105, 7 boîtes
M. 105, 7 boîtes, d'accord, alors 135, c'était combien ?
D. 8 boîtes
M. Non, parce que de 105 à 135, il y a combien ?
D. 15
M. De 105 à 135 il y a 15 ? On l'entend rien qu'au son, 105, 135, combien de plus ?
D. 15, si c'est plus un il y a 15
M. Didier, tu étais à 7 alors on recommence à 7, 105, alors 8, ça fera combien ?
D. 135
M. Non
D. Ah, 105 120
M. 120 pour 8, alors pour 9 ?
D. 135
M. pour 10 ?
D. 145
M. Non
D. 160
M. 135 et 5, 140 et qu'est ce que tu dois ajouter ?
D. 150, et 11 c'est .... 150, 155, 160, 170 ....

Il n'utilise pas ses connaissances pour contrôler ce qu'il dit. Par exemple, ci-dessus, il se souvient que 105 correspond à 7 boîtes et ne sait plus 135 : il essaie de se souvenir et annonce 8 boîtes en donnant pour la différence entre 135 et 105 la valeur qui va confirmer sa réponse précédente, alors qu'il est tout à fait capable de savoir combien il faut pour aller de 105 à 135 si c'est vraiment à cette question là qu'il essaie de répondre. Il semble là se servir de la réponse qu'il propose dans le contrôle qu'on lui demande et rend ainsi toute procédure de contrôle inefficace. Même des remarques qu'il a faites de lui-même comme "ça doit toujours se terminer par 5" quand il compte de 10 en 10 à partir de 165 (le 17-10) sont aussitôt oubliées : après 185, il revient à 190, il est vrai que c'est en fin de séance, et qu'ensuite il compte correctement jusqu'à 255.

M. Tu vas compter de 10 en 10 à partir de 165
D. 170
M. J'ai dit de 10 en 10
D. 175, cent soixante vingt cinq, non 165.
M. 165 tu avais commencé là
D. 175, 170, attendez
M. Ecris le ....
D. ça doit toujours se terminer par un 5
M. Oui, c'est bien, après ?
D. 185 190
M. Regarde bien
D. 195, 205, 215, 225
Il va plus vite, mais de 255, passe 2 fois de suite à 305
M. Si tu n'avais pas le 200, 55 et 10 ?
D. 65, donc ça fait 265.
Il continue correctement jusqu'à 325
M. Est ce que c'est facile maintenant ?
D. il y a que des 5 à la fin et devant 2, 3, 4, 5, 6 ....

Cette disponibilité relative est très fragile et s'évanouit si on lui demande un effort pour utiliser des méthodes qui ne lui sont pas familières : le 3 octobre, par exemple "5 et 7, ça fait, ah là là, je m'en rappelle même plus, j'ai perdu la mémoire, vous m'avez dit de pas compter sur les doigts !".

- *organisation du travail*

Quand il est amené à utiliser des stratégies un peu longues d'approximations pour résoudre un problème parce qu'il ne dispose pas de la technique adaptée, Didier ne s'organise pas et donc il perd le fil et ne sait plus où il en est. Le 17 octobre, par exemple, il cherche 11 fois 15 par additions de 15 mais a du mal à savoir où il en est.

- *contrôle du sens.*

Didier garde un contrôle de ses résultats opératoires dans des situations concrètes qui ont du sens pour lui et qui l'intéressent et le perd quand la situation n'a plus de sens pour lui. Par exemple, le 28 novembre dans le problème de différence d'âge avec sa sœur, il sait très bien ce qui se passe pour les années proches, que Katia n'était pas née 5 ans avant puisqu'elle est née en 1985... mais pour les années lointaines, comme quand il aura 35 ans, il n'a aucune idée de l'âge qu'aura Katia, sauf sans doute qu'elle sera plus jeune que lui.

Nous avons d'ailleurs déjà dit que le contrôle du sens à travers les propositions de résolution qu'il fait, ne lui semble pas de sa responsabilité.

4.2.3. Evolution sur le plan du contenu

- *numération*

Au début, Didier n'utilise pas la numération pour le calcul mental ni pour des prévisions d'ordre de grandeur. Il n'a pas d'idée des rapports entre les nombres, notamment des rapports multiplicatifs, sauf pour les doubles, et ceci dans un domaine numérique très restreint. Par exemple, le 16 septembre, il a vu que 6 boîtes contenaient 72 œufs, il propose d'aller chercher 2 autres boîtes pour ranger ses 378 œufs. Il n'utilise pas la dizaine de lui même, mais quand on a calculé pour 10, il propose de passer à 20 puis à 40. L'absence de maîtrise de la numération apparaît dans les diverses activités numériques, notamment le calcul mental d'additions et la multiplication par 10.

Ses connaissances sur la numération ne sont donc pas inexistantes mais elles ne sont pas disponibles, elles sont seulement mobilisables sur sollicitation. Par exemple, le 28 novembre, Didier ne peut pas trouver seul, de tête, combien il faut pour aller de 60 à 100 alors qu'il sait qu'il faut 4 pour aller de 6 à 10, mais cette question intermédiaire lui permet de trouver.

M. De tête tu n'aurais pas pu ?
D. Non
M. Et de 60, combien pour aller à 100 ?
D. J'aurais pas pu non plus
M. Et de 6 pour aller à 10 ?
D. 4
M. Alors ? Quand on est à 60, pour aller à 100 ?
D. 40.

Par la suite, Didier se débrouille avec les règles données par la maîtresse "pour lire les grands nombres, il faut grouper par 3, pour multiplier par 10, il faut ajouter un zéro". Il fait malgré tout quelques progrès en calcul mental, et notamment dans l'utilisation de la numération, du moins tant qu'il arrive à rester concentré.

- *procédures de calcul mental pour l'addition*

Au début, Didier utilise surtout le comptage sur les doigts, et très peu le passage par la dizaine. Quand il le fait, c'est de façon irrégulière. Par exemple, le 16 septembre, pour ajouter 12, il fait +10 +2 de temps en temps, notamment quand il part d'une dizaine comme 120, et il revient très vite au comptage 1 à 1 sur les doigts. Quand on l'encourage à passer par une dizaine pour le calcul mental, il lui arrive souvent de s'arrêter à la dizaine ou de donner un nombre dont le chiffre des unités est le même que le nombre qu'on ajoute (par exemple le 12-12 pour compter de 7 en 7 à partir de 150, Didier propose 150, 157, 167, puis 150, 157, 160, 167 et un peu plus tard 164, 167 puis 177, ou le 19-12, pour 126 et 13, 133, ou encore 217 et 10, 220 ce qui donne 217 et 13, 223 et un peu plus tard 295 et 13, 303 en passant par 295 et 10, 300).

Le 28 novembre il compte assez facilement de 10 en 10, du moins dans le sens progressif (ça n'était pas évident le 17-10) mais le franchissement de centaines est encore difficile pour des nombres assez grands (passage de 1097 à 2007, difficultés pour trouver 2007 - 10)

Il a aussi tendance, quand on l'oblige à trouver un résultat mentalement, à poser l'opération dans la tête (par exemple le 17-10, pour faire 11x15 "une fois 5, 5, encore une fois 5, 5, 1 fois 1, 1..." résultat final 15 ! On a aussi le 12-12 "25 et 25, premièrement 5 et 5 je pose 0...").

Plus tard dans l'année, les erreurs dans le passage par la dizaine sont encore fréquentes, mais il finit par reprendre à son compte la technique de passage par la dizaine : ajouter 10 et 3 pour ajouter 13 le 19 décembre, enlever 10 et ajouter 2 pour enlever 8 le 27 février (après avoir commencé par compter dans sa tête, un à un en reculant, puis essayé de se construire une règle de calcul). Il est, ce jour-là, encouragé en cela par son camarade qui a vite adopté cette technique.

Les rapports additifs entre nombres ne sont pas tellement disponibles non plus (voir par exemple la difficulté à trouver la moitié de 35 le 28-11).

En février, il a nettement progressé sur la numération et sur le calcul mental (voir le problème des trains et poupées qu'il a inventé). Pour la multiplication par 10, il utilise correctement les règles données par la maîtresse pour 10x50 "j'ai utilisé une méthode que la maîtresse nous donnée : on enlève les 2 zéros, on fait 1x5 = 5 et on remet les 2 zéros."

- *utilisation du tableau de numération*

Didier ne connaît pas le tableau de numération le 17 octobre, ou plutôt l'a oublié puisqu'il a le vague souvenir de l'avoir déjà rencontré. Le 21 novembre, le tableau a été utilisé en classe, il peut lire des nombres assez grands placés dans le tableau, même avec des 0 intermédiaires non écrits, mais il a du mal à placer 38 dizaines. Le 28 novembre, il s'en sert correctement et peut même commencer à s'en passer. Au début de la séance, il recopie parfois mal les grands nombres même s'il les a bien écrits dans le tableau mais, une fois échauffé, il peut se passer du tableau et progresse assez nettement sur l'écriture des grands nombres. Le 5 décembre, il ne fait aucune erreur. Il est vrai que cette partie est entraînée à l'école et que c'est pour cette raison que nous l'avons travaillée, à la demande de Didier.

- *multiplication par 10*

La numération n'étant pas disponible au début de l'année, Didier ne peut pas utiliser le compte en dizaines pour multiplier par 10. Il utilise un compte de 10 en 10 pour faire un certain nombre de fois 10. Mais, la multiplication étant pour lui uniquement l'addition répétée, elle n'est pas commutative, il ne peut le faire pour 10 fois un autre nombre. Par exemple, le 17 octobre, pour chercher 10 fois 15, il a pu, au début de la séance, compter de 10 en 10, sans toutefois être sûr de son résultat, mais ensuite, il ne peut plus qu'ajouter des 15. Un peu plus tard, dans la même séance, quand je lui demande s'il peut trouver facilement 10 fois 23, il répond "non"

M. "essaie"
D. "Ah, la la !"
M. "Et 23 fois 10 ?"
D. "Attendez ! 10, 20 30, 40..."
et il compte les dizaines sur les doigts.

Le 21 novembre encore, pour faire 10 fois 12, il ajoute des 12. Même, avec des baguettes, il se perd pour les nombres à 2 chiffres et 10 fois 47 donne 407 :

M. Et 15 fois 10, ça fait combien ?
D. Attendez.
Il pose 10
x 15 ... et trouve 150 avant d'ajouter
D. Ah, oui ! j'avais qu'à faire le truc qu'elle nous avait donné, la maîtresse ! Par exemple, elle nous dit : on écrit 15, on ajoute le 0 et ça donne le résultat !

M. Et pourquoi ? On dit que chaque petit baton vaut 10, et on fait 15 fois 10.
Didier compte 10, 20, ... 150.
M. 47 fois 10.
Didier commence à compter de 10 en 10 et se perd....
M. Essaie 40 fois 10 de tête.
D. 4 fois 10, ça fait 40, et un 0, ça fait 400.
M. 40 fois 10, tu sais le faire, et 47 fois 10 ?
D. 407
M. Non, 47, c'est 40 + 7. Reprends les baguettes, fais 47 avec les baguettes.
Il le fait (4 grandes et 7 petits cubes).
M. Fais fois 10.
D. 100, 200, 300, 400 et 7, 407.
M. Non, ça n'est pas 7, c'est 7 fois 10.
D. 70, ça fait 470.
M. On recommence, 38 fois 10.
D. 308.
M. On recommence avec les baguettes. On fait 38 et après on dit que chaque petit carré vaut 10, ce n'est plus une unité, c'est une dizaine.
Didier fait 38 avec ses baguettes (3 grandes et 8 petites).
M. Et maintenant le petit cube vaut 10, combien vaut la baguette orange ?
D. 100. ... 100, 200, 300, 308.
M. Celui-là vaut 10, alors ?
D. 8 fois 10, 80, 380.

En cours d'année, il utilise l'algorithme donné par la maîtresse "ajouter un zéro" (il commence à en parler dès la séance du 21 novembre, après qu'on l'a retrouvé à partir du tableau de numération) et commence à utiliser la commutativité, mais pas à chaque fois. Le 28 novembre, il utilise systématiquement la règle du zéro pour multiplier par 10, y compris en situation : M "17 dizaines... Dans chaque sac, tu as 10 billes, tu as 17 sacs, combien de billes ?" D. "170, j'ai ajouté le 0". Il fait correctement de cette manière une série de multiplications par 10, en écrivant le nombre de départ.

La multiplication par 10 pour les puissances de 10, "les chiffres fermes" comme dit Didier, est aussi vue comme le passage à l'ordre supérieur, l'ordre étant compté par paquets de 3 zéros : le 5-12, pour 100x100, il propose 1000, puis 1 000 000, puis 1 milliard, et quand on a fini par ramener ce calcul à 10x1000, il répète 1 000 000 en disant "on a un chiffre ferme".

- multiplication

Le 17 octobre, il résout les problèmes de multiplication par des additions répétées : on a 11 boîtes contenant chacune 15 chocolats, Didier fait des additions de 15. Nous avons déjà vu que la commutativité de la multiplication n'est pas utilisée par Didier qui, même plus tard quand il reconnaît la multiplication, dans le cas où on l'empêche de poser l'opération, n'utilise pas la distributivité et trouve le résultat par additions : nous avons vu que le 21-11, pour trouver 47 fois 10, il commence à compter de 10 en 10 en utilisant ses doigts pour mémoire, mais se perd. Je lui demande de décomposer, il fait correctement 40x10, mais pour 47x10 annonce alors 407. L'utilisation des baguettes ne l'aide pas, et il recommence de la même manière pour 38x10. Le 28-11, il a appris (ou plutôt revu) l'algorithme de multiplication, mais ne peut toujours pas utiliser la distributivité pour un calcul oral comme 2x17.

Non seulement la multiplication est pensée additivement, mais dans certaines situations, elle est confondue avec l'addition. Ainsi, à plusieurs occasions, Didier remplace x10x10 par x20 (ou réciproquement). Multiplier 2 fois par 10 est compris comme multiplier par 2 fois 10 : le 21-11 quand il explicite la règle du zéro pour multiplier par 10 "et si c'était x20, il y aurait un 0 et ici le 7 ici le 5" (il a décalé 2 fois). Le 5-12, il annonce 200 pour 100x100, puis remplace 10x10x100 par 20x100, et un peu plus tard 10x10 = 20.

- soustraction

Didier a de grosses difficultés avec la soustraction. On voit dès le 16 septembre qu'elle n'est pas du tout utilisable dans une situation qui s'est tout de suite révélée, en partie pour cette raison, beaucoup trop complexe. Le 27 septembre, il s'avère qu'elle n'est pas disponible non plus dans une situation assez simple de réunion de collections (une soustraction donne directement la réponse au problème). Dans le premier problème, il ne la reconnaît même pas quand le problème est résolu. Il l'utilise dans le problème des masses avec données numériques très simples, mais ne peut à nouveau s'en servir pour les distances. Le 28 novembre, il reconnaît la soustraction dans un problème très simple de distance (problème du pigeon) mais ne peut faire 200 - 60 de tête.

- proportionnalité

Le 5 décembre, Didier et Claude peuvent utiliser la proportionnalité pour calculer le prix du pain mais pas celui du péage de l'autoroute qui porte pourtant sur des nombres entiers, même s'il faut ensuite convertir les centimes en francs. Peut-être est-ce parce qu'elle ne leur est pas familière qu'ils n'ont pas reconnu une situation de proportionnalité dans celle des péages : il se peut que Didier ait l'habitude de prendre l'autoroute de l'ouest plutôt que celle du sud puisqu'il demande si on ne paie pas avant.

Mais l'explication est peut-être tout autre : en effet, quand je pose pour la première fois la question du prix à payer pour aller de Paris à Lyon, Didier répond aussitôt qu'il faut faire 400x25, mais, comme je l'empêche de poser l'opération, on dévie sur des questions de numération et de multiplication par 10. Après cela, il se peut que les enfants soient fatigués et n'aient plus vraiment envie de travailler, que les questions intermédiaires leur aient faire perdre de vue le problème ou qu'ils essaient de trouver les réponses autrement que par des multiplications. D'ailleurs, la semaine suivante, le 12-12, Didier résout très correctement le problème pour les autres distances en posant les multiplications.

Au début de la séance :
M. Sur l'autoroute on paie 25 centimes par kilomètre. De Paris à Lyon, il y a à peu près 400 km à péage.
D. 400 X 25, on fait.
M. Et ça fait combien ?
D. Je peux faire par écrit.
M. On peut faire de tête ça, 4 X 25, on sait par coeur ce que ça fait
D. 5 X 4 ça fait...
M. On fait pas comme ça pour multiplier par 4 de tête, on multiplie 2 fois par 2, 4 X 25 c'est un résultat à savoir, et tu vas le retrouver très vite. Alors 2 X 25, qu'est ce que ça fait ?
D. 2 X 25 ça fait 45
M. Oh !
D. ça fait 50 et 4 x 25 ça fait 100
M. Si 4 X 25 ça fait 100, 400 X 25 qu'est ce que ça fait ?
D. Je vais écrire le nombre, je sais pas le dire.
Il écrit et lit 100 000.

Suit un long travail sur la numération déjà partiellemnt reproduit plus haut dans le paragraphe sur la concentration Un peu tard, en fin de séance :
On reprend le problème des autoroutes avec 25 centimes par kilomètre. Je donne des distances pour plusieurs sorties. Ils sont perdus. On recalcule le prix pour 400 km.
D. ça fait 100 000, j'ai dit au hasard
....
M. Non pas 100 000, on l'a fait tout à l'heure, 10 000 mais c'est des centimes, ça fait combien de francs ?
Ils ne savent pas, je donne la réponse 100 F.
M. Pour 4 km ?
D. 25 et 25, 50, 50 et 50, 100
M. 100 quoi ?
D. 100 centimes
M. c'est à dire ?
D. 1 F
M. Pour 4 km on paie 1 F, donc pour 400 km, 100 X 4, on paie 100 F.
On commence à chercher les autres mais ils disent n'importe quoi, on s'arrête, on change de problème.
M. Si on achète une baguette à 2,80 F, combien paie-t-on si on achète 2 baquettes ?
Ils font 2,80 X 2
M. Et 10 baguettes ?
D. 2,80 X 10
Il pose l'opération. Je l'empêche de mettre une ligne de 0 et il se perd. Finalement, il trouve 28 F.
M. Et 12 baguettes ?
D. 30 F
M. 2 baguettes, vous aviez cherché...
Il rectifie 28 et 5,60 et compte de 1 en 1, 28, ... 33.

Pourtant, même s'il reconnaît un modèle multiplicatif, il semble ne pas pouvoir utiliser l'additivité : il ne le fait pas spontanément et ne le fait que très difficilement quand on le lui suggère "alors là, je me suis perdu, je ne comprends plus".

Le 19-12 non plus, il ne peut pas le faire : il a le contenu de 5 boîtes : 100 chocolats, 10 boîtes : 200 chocolats, pour 20 boîtes il propose 300 puis, après correction, 20 boîtes : 400 chocolats. Pour 500 chocolats, il propose alors 30 boîtes : il semble que la régularité des nombres l'emporte et il fait comme si on avait 100 chocolats pour 10 boîtes. Il peut le faire correctement ensuite, quand il a repéré qu'il fallait compter de 5 en 5 et non de 10 en 10. Là encore, on voit que Didier se construit un algorithme plutôt que de se servir de l'additivité qui lui permettrait de garder le contrôle du sens.

La proportionnalité n'est pas du tout utilisée pour les graduations. Le 20 février, je propose 5 carreaux pour représenter 100, Didier ne peut pas prévoir ce qu'il faut prendre pour représenter 10, il s'en tire par essais : 1 interligne trop petit, il arrive à 100 au milieu de l'intervalle mais ne prévoit pas qu'il faut en prendre 2, essaie 3 interlignes, constate que c'est trop grand avant d'essayer 2. Et, quand on a trouvé pour 20, il ne voit pas la relation 3x20 = 60, ni le rapport avec 3x 5 = 15

- *division.*

Au début de l'année les situations de division sont proposées comme situations complexes où on attend des résolutions par multiplications, soustractions, voire additions. En fait ce type de situation, proposé dès le 16 septembre se révèle trop complexe à ce moment là.

On le reprend le 19 décembre. Didier réagit de la même manière au départ mais il peut cette fois résoudre par multiplications après avoir accepté de prendre en charge le problème, ce qui est la partie la plus difficile à réaliser.

En février la division n'est pas utilisée dans des problèmes de graduation. Sachant que 15 carreaux représentent 60, il ne peut pas dire ce que représente 1 carreau. Cette question n'est pas rattachée à la proportionnalité pour Didier. Sur sollicitation, il peut dire qu'il placera 30 au milieu entre 0 et 60 mais est bloqué par un problème technique : il ne sait pas prendre la moitié de 15. Ensuite, sachant que 60 est représenté par 15 carreaux, même après avoir trouvé qu'il faut 2+1/2 pour faire 10, il ne peut pas prévoir par quoi sera représenté 20 : il fait une erreur de lecture sur son graphique et répond 4+1/2.

Le 27 février, la division n'est pas encore disponible pour résoudre des problèmes de groupements (560 objets à ranger en boîtes de 12), ce qui amène encore Didier à dévier sur la multiplication comme précédemment (16-9 et 19-12) avant d'accepter de se lancer dans un processus de résolution par multiplications successives.

Le 12 mars enfin, il propose la division pour résoudre le même genre de problème, après, il est vrai, qu'on eut travaillé le problème multiplicatif direct.

- *résolution de problèmes et maîtrise des nombres et des techniques.*

Les difficultés de calcul sur les nombres gênent Didier dans la mise en place d'une stratégie de résolution de problèmes : le 16 septembre, quand il s'est approprié correctement le problème et qu'il s'aperçoit qu'avec 40 boîtes c'est trop, il veut enlever 5 boîtes mais ne peut qu'enlever 5 œufs : enlever 5 boîtes devient un problème très complexe puisque trouver combien d'œufs contiennent 5 boîtes est en soit tout un problème qui réclamerait toute l'attention de Didier qui est déjà mobilisée par la résolution du problème de départ.

Au début de l'année, Didier ne maîtrise pas du tout l'ordre des nombres et la compatibilité avec les opérations, ce qui fait qu'il ne peut pas mettre en place seul une stratégie d'encadrements : le 27 septembre, il a bien compris le problème[2], constate que 43 est trop petit mais ne peut pas prévoir que 125 sera trop grand. De plus, quand il fait ses essais, il fait bien des additions, mais l'addition n'apparaît que dans l'action, il ne peut pas expliciter que c'est bien une addition qu'il fait et ne peut donner le résultat sous forme d'addition non effectuée. Il faut passer par le symbolisme pour l'obliger à expliciter ce qu'il fait, et encore ne peut-il le faire qu'après qu'on eut repris l'analogie avec les calculs numériques. Quand il a pu écrire 43 + a = 125, il reconnaît l'addition à trou et peut résoudre.

La non maîtrise du calcul, et en particulier du calcul mental fait perdre du temps à Didier et l'amène à dévier, même s'il a à sa disposition une méthode correcte de résolution. Par exemple, le 5 décembre, Didier calcule correctement par multiplication le prix de 2 puis de 10 baguettes, mais pour le prix de 12, il ajoute 2 au prix de 10. Il peut pourtant rectifier tout de suite quand on lui rappelle qu'il a déjà calculé le prix de 2 baguettes.

On peut bien sûr rattacher cela au manque d'attention de Didier, mais ce manque d'attention est sans doute lui-même à relier à l'effort nécessité par chaque calcul. Le même jour, on voit que l'effort demandé pour les calculs numériques à propos de 400x25 lui fait perdre la stratégie correcte pour le problème des péages d'autoroute.

D'une façon générale, on lui fait facilement perdre le fil de sa procédure de résolution en lui faisant des commentaires ou en lui posant des questions sur ce qu'il est en train de faire. Par exemple, le 19 décembre, à la fin du problème des chocolats, Didier a une bonne stratégie, mais alors qu'il a trouvé 50 boîtes pour 1000 chocolats, puis, péniblement, qu'il y avait 22 de 978 à 1000 et il se remet à confondre les chocolats et les boîtes : 22 chocolats, 400 boîtes. Je lui propose de retirer une boîte et à nouveau, il est gêné par ses mauvaises performances sur les nombres : 1000 - 20, 900 puis 999, puis 990...

M. Combien il reste ?
D. 78 chocolats ... je vais passer à 1000, 50 boîtes
M. Donc on est sûr qu'il en faudra moins, d'accord ? Combien tu as rangé en trop ?
D. 21
M. 22, c'est combien de boîtes ?
D. 400
M. 22 chocolats, pas 22 boîtes
D. 402
M. Tu te perds, reprenons, 50 boîtes, 1000, enlève une boîte
D. 900
M. Non, écris
Didier écrit 49 et en face 945
M. Non, en enlevant une boîte, tu enlèves combien de chocolats ?
D. 20

---

[2] du type 43 + x = 125

M. ça fait
D. 800
M. Non, enlève 10 déjà
D. 900
M. C'est quand tu enlèves 100, tu es d'accord, 900 + 100, ça fait 1000, alors 900+10 ça ne fait pas 1000
D. 999
M. ça c'est 1000 - 1
D. Justement, je compte à l'envers.
Il continue et s'arrête à 990, alors Claude dit 980.
M. Finalement on a combien de boîtes ?
D. 2
M. 2 boîtes ?
D. Non, 49 boîtes
M. Mais la dernière boîte ...
D. Elle n'en a que 2
M. Non, il lui en manque 2

Didier nous montre une partie de ses difficultés en résolution de problèmes à travers l'énoncé qu'il propose lui-même le 12 mars. "j'ai 36 billes, je veux les mettre dans 20 sacs, combien m'en restera-t-il ?" D'une part il manque une donnée : le nombre de billes par sac, d'autre part, il semble que l'absence d'aisance en calcul mental empêche Didier de faire des prévisions. Au départ, Didier pensait peut-être mettre une bille par sac[3] ou 20 billes dans un sac et faire une soustraction (36 - 20 qu'il propose un peu plus tard hors de propos), mais il ne semble pas avoir d'idée très précise sur l'influence du nombre de billes par sac puisque, quand je lui demande comment il met les billes dans les sacs, il répond "une par une par exemple ou bien 4 par 4". Il dessine 20 boîtes et écrit 4 sur chaque et ne prévoit pas encore tout de suite que les 36 billes ne suffiront pas.

Il semble qu'on ait là une contradiction entre une logique concrète où on dispose de données un peu anarchiques : on peut bien avoir n'importe quel nombre de billes et n'importe quel nombre de boîtes et quand même ranger les billes dans des boîtes, et une logique de problème scolaire de mathématiques où il faut que les données soient telles qu'on puisse résoudre le problème avec les opérations dont on dispose, et où il faut donc anticiper la solution pour choisir les données. Didier sait bien que 20 boîtes contenant chacune 4 billes font 80 billes, encore qu'il ne soit pas si sûr de lui —"je vais essayer une multiplication" dit-il— mais il n'a pas pensé qu'il fallait faire cela avant de choisir le nombre de billes.

De plus, Didier change constamment son énoncé en cours de résolution. Et, même quand il a fini de résoudre, il ne sait plus à quelle question il a répondu.

On prend un autre exemple : 340 billes.
D. Je prends 2 chiffres au dividende. En 34 combien de fois 20 ? je connais pas la table de 20, alors je calcule qu'est ce qui se rapproche le plus de 3 dans la table de 2, c'est 1, ça fait 20, il reste 14, j'abaisse mon zéro et ce qui se rapproche le plus de 14 dans la table de 2 c'est 7, il reste 0.
M. Conclusion ? Tu peux répondre au problème ?
D. Il reste
M. Quelle était la question ?
D. Avec 20 boîtes, est ce que j'aurai assez de billes pour mettre 340 billes ?
M. C'était pas ça la question.
340 c'est quoi ?
D. Des billes
M. et 20 ?
D. Des boîtes
M. Qu'est-ce que tu faisais ?
D. Je rangeais des billes dans des boîtes.
M. Oui, et quelle était la question ?
D. Est ce que j'aurai assez, non ce n'était pas ça. Combien me restera-t-il ?
M. Mais 17, c'est la réponse à quelle question ? que représente 17 dans ton problème ?
D. Il représente ce que ça donne, le résultat.
M. De quoi ?
D. Ben de ma division
M. Mais qu'est ce que ça veut dire dans ton problème ... si je te demandais de faire encore un dessin (D. en même temps : j'ai trouvé). Fais un dessin qui représente ton problème.
Il dessine 17 billes qu'il partage en 2 paquets.
M. Où est 340 ?
D. là, les paquets c'est les 340.
M. Je ne comprends plus. Tu avais 340 billes
D. Que je range dans des boîtes de 20
M. Dans des boîtes de 20 ou dans 20 boîtes ?
D. Dans 20 boîtes
M. Tu avais fait tout à l'heure un dessin
D. Oui, mais ça va être embêtant.
M. Dessine tes 20 boîtes. (Il le fait). Et alors qu'est ce que c'est 17 ? ... Tu as 20 boîtes et 340 billes. Je vois les boîtes mais je ne vois pas les billes.
D. Voyons, combien j'en ai ? 17
M. Qu'est ce que c'est 17 ? Des billes ou des boîtes ?

---

[3] C'est sans doute ce qu'il prévoyait puisqu'il paraît très content un peu plus tard quand je lui pose la question "si tu as 36 billes et 20 boîtes et que tu mets déjà une bille dans chaque boîte, qu'est-ce qui va se passer ?" D. "Ca y est, j'ai trouvé, je crois savoir combien il va lui en rester ! 16 !". Il répond là exactement dans les termes où il avait posé la question au départ, c'est la réponse à son problème.

D. Ce qui restera en trop ..... Bien sûr tout à l'heure il en restait 16 et 12.
M. Il en restait 16 et 12 ?
....
M. Tu as donc 17 billes dans chaque boîte, écris-le.
D. Je ne vais pas écrire 17 partout
M. Ecris 17 dans chaque boîte, enfin quelques fois, et quand tu en as marre, tu t'arrêtes.
Il en écrit 5 et s'arrête
D. Voilà ça fait 340 billes.

Cette attitude dans la résolution de problème est à relier à ce que nous avons déjà dit sur le contrôle du sens et sur ce qu'il pense devoir faire en mathématiques. Nous retrouvons aussi ce que nous avons dit à propos de la recherche d'un modèle de résolution : l'absence de maîtrise de l'opération qui permettrait de donner directement la réponse au problème amène Didier à adopter des procédures erronées même s'il a bien compris le problème et qu'il saurait le résoudre dans un cas numériquement plus simple où ce problème technique ne se poserait pas (voir le rangement de 560 objets dans des boîtes de 12 le 27 février, exemple déjà cité dans la recherche d'un modèle).

4.3. Conclusion

Les conditions particulières de cette observation —il attend le retour de son camarade pour jouer avec lui— pourraient faire que Didier soit moins attentif avec nous qu'à l'école. Nous pensons cependant que ce n'est en réalité pas très différent : à l'école, on attend la récréation et les copains sont peut-être encore plus présents. De plus, l'enseignant ne peut pas solliciter autant un seul élève que nous pouvions le faire là.

On peut aussi penser qu'il n'y a pas beaucoup d'enjeu dans le travail que Didier effectue avec nous, puisqu'il n'en ressort aucune sanction ni gratification, sauf éventuellement le plaisir de comprendre et de réussir. A l'école, il y a les notes, mais la relation entre l'apprentissage et la note est-elle si évidente, et l'enjeu au moment de l'apprentissage est-il plus fort ?

Au départ, Didier a été volontaire et même presque demandeur pour travailler avec moi. Mais son désir de faire des mathématiques, outre que c'est un moyen de faire plaisir à sa mère en même temps qu'à moi, est peut-être plus lié à l'envie de venir jouer le samedi après-midi qu'à celui de progresser vraiment en mathématiques. Il y a d'ailleurs peut-être lieu de se demander comment il me voit et s'il ne pense pas que le seul fait de travailler avec moi dans cette maison ne pourrait pas avoir un effet (quelque peu magique) sur ses performances en mathématiques puisque mes enfants sont bons élèves sans effort apparent.

Malgré toutes ces réserves, il nous semble que les caractéristiques que nous avons trouvées à partir des observations faites à propos de Didier se retrouvent chez beaucoup d'autres élèves et qu'on peut les observer en classe.

Nous avons été frappée par l'irrégularité des performances de Didier. Nous avons relevé plusieurs facteurs qui nous semblent l'expliquer et que nous avons développés ci-dessus. On pourrait résumer la description en disant que Didier a des connaissances à la fois floues et rigides :
- floues parce qu'il est rarement sûr de lui "je vais essayer ça", "j'ai dit au hasard"...
- rigides parce qu'il a beaucoup de mal à changer de point de vue, de stratégie et qu'il ne peut pas saisir les indications qu'on lui donne : les informations qui ne rentrent pas dans sa procédure le déstabilisent et il commence à dire n'importe quoi.

Un autre fait caractéristique est justement cette facilité à perdre le fil dès qu'on lui pose une question ou même dès qu'il a lui-même à s'interrompre pour rechercher le résultat d'un calcul ou pour vérifier quelque chose. Cela explique sans doute sa réticence à s'engager dans un processus long pour résoudre un problème dont il ne voit pas comment trouver la solution en une ou deux opérations. En même temps, ce refus des processus longs a pour conséquence un manque d'entraînement à l'organisation et à la mémorisation de résultats intermédiaires en cours de résolution. On a ainsi une sorte de cercle vicieux : en refusant les processus longs, il n'apprend pas à s'organiser, ce qui fait qu'il perd très facilement le fil de ce qu'il est en train de chercher, et qu'il est incapable de mener à bien des processus longs.

Par ailleurs, Didier est un enfant qui recherche les algorithmes plus sécurisants et moins fatigants. On peut voir cela comme une conséquence du point précédent : il a de cette façon un moyen d'avoir une réponse rapide qui ne demande pas de s'organiser et de réfléchir. De plus —surtout peut-être— les algorithmes le libèrent de la responsabilité de ce qu'il avance. En effet, d'après les réflexions qu'il fait à plusieurs reprises sur ce que dit la maîtresse, on peut penser qu'il redoute de prendre la responsabilité de ses connaissances et préfère se référer à une autorité. Remarquons cependant que les allusions à ce que dit la maîtresse sont peut-être aussi un moyen de me faire savoir ce qu'il est légitime de faire en classe, qui n'est peut-être pas identique à ce qu'il est légitime de faire avec moi.

A travers ce qu'il en dit, on peut penser que Didier perçoit le discours de la maîtresse comme une suite de recommandations et règles sur la conduite à tenir. Son rôle à lui, même s'il n'arrive pas toujours à bien le remplir, est d'écouter et de faire ce que dit la maîtresse. C'est sans doute d'ailleurs le cas de beaucoup d'élèves du même âge qui ne sont pas nécessairement en situation d'échec. Ce n'est donc pas le seul fait de se référer au discours de la maîtresse qui nous paraît caractéristique mais de le faire en guise de justification.

Ces caractéristiques nous ont paru assez fréquentes chez les enfants en difficulté à l'école. Elles rendent difficiles la dévolution d'un problème un peu complexe aux élèves et la mise en place de jeux de cadres.

Au cours de nos observations ultérieures, nous avons pu rencontrer aussi un autre type d'élève en difficulté, un peu opposé : c'est l'élève qui ne peut accepter des règles ou des algorithmes qu'il ne comprend pas. Par exemple, dans des observations d'élèves de 6ème, nous avons vu des enfants qui ne pouvaient accepter la multiplication pour traiter une situation de proportionnalité dans le cas où ils avaient affaire à des nombres décimaux. Et, en effet, si on n'a compris la proportionnalité que dans le cas de quantités discrètes où l'on peut penser en termes d'addition répétées, il y a fort à faire pour passer aux quantités continues et à la multiplication sur les décimaux.

Une élève de 6ème est venue me voir parce qu'elle ne comprenait pas la correction d'un exercice où il s'agissait de trouver le prix d'un rôti de porc de 1,35 kg à 46 F le kg. Elle savait qu'elle paierait entre 46 et 92 F mais ne savait comment faire et ne voyait surtout pas pourquoi il fallait multiplier comme elle l'avait vu à la correction. Elle pouvait parfaitement utiliser la proportionnalité sous forme d'isomorphisme sur les entiers et trouver, quand je le lui ai suggéré, le prix de 500g puis de 100g de rôti. Avec cette aide, elle pouvait même trouver le prix de 1,35 kg en faisant 46 + 3x4,60 + 2,30. Mais elle ne voyait toujours pas le rapport avec 1,35 x 46 qui donnait bien le même résultat, comme elle l'a constaté en effectuant la multiplication. Pour élucider cette coïncidence, il a fallu voir d'abord que 3x4,60 = 0,3x46 et que 2,30 = 0,5x4,60 = 0,05x46, et encore que 46x1,35 = 46x1 + 45x0,3 + 46x0,05.

Les élèves qui sont dans ce cas ont au contraire tendance à éviter les algorithmes. Leur attitude paraît plus positive, mais ils risquent aussi de se dire rapidement qu'ils ne comprennent rien en maths parce qu'ils ne comprennent pas tout, puis qu'il ne faut pas chercher à comprendre et rejoindre le comportement précédent où on recherche l'algorithme à appliquer.

L'évitement des techniques dont on n'est pas très sûr peut parfois aller assez loin. Nous avons ainsi observé un élève qui utilisait des processus très complexes et très longs mais n'utilisant que des techniques rudimentaires, ce qui demandait au contraire des prouesses de mémorisation pour éviter d'utiliser des techniques plus performantes mais d'acquisition plus récente. Pour ces élèves, il nous a semblé que le problème ne se situait pas au niveau de la dévolution mais plutôt à celui de l'institutionnalisation, qui suppose l'acceptation de renoncer à des méthodes qu'ils connaissent bien pour en essayer de nouvelles qu'ils ne maîtrisent pas encore.

Après avoir clarifié notre problématique, nous avons cherché, à l'aide de questionnaires et d'entretiens, des compléments d'information sur le rapport aux mathématiques et les représentations métacognitives des élèves de l'école élémentaire. Ce sera l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE 5

ELEMENTS DE REFLEXION SUR LES REPRESENTATIONS METACOGNITIVES DES ELEVES

Nous avons vu au chapitre 4 comment a évolué notre problématique après deux ans d'expérimentation en classe. Après les premières observations informelles et l'étude de cas relatées précédemment, nous avons essayé d'obtenir des renseignements plus précis sur les rapports que les élèves entretenaient avec les mathématiques et sur la genèse de représentations sur l'apprentissage des mathématiques qui pourraient expliquer une réussite médiocre de cet apprentissage. Nous avons pour cela élaboré un questionnaire et interrogé des élèves de CE1 oralement et des élèves de CM1 et CM2 par écrit.

Dans un premier paragraphe nous abordons la méthodologie, notamment l'élaboration du questionnaire qui a servi pour les investigations. Nous donnons ensuite les résultats des entretiens avec les élèves de CE1 et des réponses écrites des élèves de CM1 et CM2 à ce questionnaire. Nous complétons ensuite ces résultats par les informations que nous tirons d'entretiens individuels avec des élèves de 6ème. Nous rendons compte séparément des informations que nous tirons de ces différentes données avant de reprendre en conclusion chacun des points de façon transversale.

1. Méthodologie : Elaboration du questionnaire et choix des classes.

1.1. Problématique.

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 4, notre problème était de chercher des variables intermédiaires possibles pour expliquer les différences de réussite des élèves et notamment les différences d'apprentissage à partir de situations en apparence identiques. Rappelons qu'au moment où nous avons élaboré le questionnaire, le concept de représentation métacognitive était en cours d'élaboration. Le travail d'explicitation qui a été fait à la même époque par A. Robert et J. Robinet sur ce sujet, nous a beaucoup aidée pour l'analyse ultérieure. Nous voulions tenter de mettre en relation des conceptions des élèves sur l'école, les mathématiques, leur apprentissage, avec leur attitude et leurs performances sur des contenus mathématiques.

Notre objectif, en élaborant ce questionnaire, était donc à la fois de recueillir des déclarations des élèves concernant leur rapport à l'école et aux mathématiques, sur un plan assez général, et aussi d'avoir les moyens de déterminer un certain niveau de ces élèves en mathématiques.

Sur le plan général, les pistes que nous voulions explorer étaient notamment :

- le projet social lié à l'école,
- l'intérêt trouvé aux mathématiques, utilité ou plaisir,
- la pratique mathématique hors de la classe,
- les idées sur l'apprentissage des mathématiques
- l'interprétation des paroles des adultes sur ce qu'il faut faire pour apprendre

Comme contenus servant à caractériser le niveau des élèves en mathématiques, nous avons retenu d'une part la maîtrise des nombres et notamment la numération, qui nous paraît un point fondamental sur lequel s'appuient les apprentissages numériques et même, pour une bonne part, algébriques ultérieurs, d'autre part la résolution de problèmes qui est une caractéristique de l'activité mathématique. Nous cherchions notamment à déceler l'idée que l'élève se fait du problème de mathématiques et à observer son attitude face à un problème de mathématiques à résoudre. Nous avions aussi l'intention de mettre en relation les résultats sur les nombres et ceux sur les problèmes.

1.2. Choix des classes.

Nous avons choisi d'interroger des élèves de 2 niveaux : d'une part des élèves du cours moyen, niveau où avaient eu lieu nos observations, d'autre part des élèves très jeunes, cours élémentaire première année, pour voir si des différences d'attitudes face aux mathématiques apparaissaient ou si on pouvait trouver en germe ce qui les ferait se manifester plus tard. Notre propos était toujours de faire une étude clinique et non une étude comparative : nous avons choisi d'interroger des élèves de l'école où avaient eu lieu nos observations précédentes. Par ailleurs, pour tester les variations éventuelles liées au milieu social, nous avons questionné aussi les élèves d'un CM1 d'une école qui recrute en milieu plutôt favorisé.

1.3. Mode de questionnement.

Nous avons utilisé des entretiens individuels pour les élèves du CE1 et des questionnaires écrits pour les élèves du cours moyen. Pour une étude exploratoire comme la nôtre, les entretiens individuels se révélaient préférables parce qu'ils apportaient des informations nettement plus précises. Sur la partie mathématique, on peut par exemple juger de la vitesse de calcul, poser des questions complémentaires pour comprendre les causes d'erreur des élèves, donner une petite aide pour voir si l'élève peut l'utiliser. Sur les questions périmathématiques, on peut poser les questions de façon très ouverte et avoir des réponses spontanées qui traduisent peut-être plus exactement la pensée de l'enfant, avant de faire des suggestions si l'élève n'a pas d'idée. Dans un questionnaire écrit, les questions trop ouvertes risquent d'attirer des réponses trop vagues et les questions à choix multiples de trop solliciter les réponses attendues : même si on laisse une place pour une réponse libre, il est plus facile de cocher des réponses toutes faites que de faire une phrase. Cependant, dans les entretiens, les informations ne sont peut-être pas toujours aussi fiables qu'on le souhaiterait : sur les questions générales notamment, le problème se pose de trier dans les réponses des élèves entre ce qu'ils pensent et ce qu'ils pensent qu'on attend d'eux, ce qui pourrait être "une bonne réponse" : il se peut qu'ils essaient avant tout de répondre à notre attente ou du moins à ce qu'ils perçoivent de notre attente, prolongeant ainsi le contrat habituel de l'école.

Les questionnaires écrits présentent le grand avantage de demander moins de temps pour la passation. Un de nos objectifs était d'ordre méthodologique : voir si dans un questionnaire écrit sur ce sujet on pouvait tirer des informations pertinentes. Cela ne nous paraissait pas possible avec les élèves de 8 ans pour lesquels la lecture et l'écriture sont encore un obstacle trop grand, mais il nous a semblé qu'on pouvait tenter l'expérience avec les élèves du cours moyen. L'objectif de ce travail est aussi la mise au point du questionnaire, c'est pourquoi, au cours du dépouillement, nous essayerons à la fois de trouver des réponses aux questions que nous nous posions au départ, et de faire une critique du questionnaire utilisé.

1.4. Choix de la grille.

Nous avons choisi la même grille d'interrogation pour les deux niveaux, en adaptant simplement les questions, en particulier les questions de mathématiques.

La numération est un des enjeux essentiels du CE1, sur lesquels le maître nous a dit beaucoup travailler, notamment par des jeux d'échanges : nous disposons d'ailleurs de l'enregistrement d'une séquence de classe sur ce sujet. Au CM, cela devrait être un acquis, mais nous savons par nos observations et par l'exemple de Didier que c'est loin d'être un outil explicite pour tous les élèves, notamment pour le calcul mental. Nous avons choisi la même tâche pour les deux niveaux : compter de 10 en 10 en reculant, de 9 en 9 en progressant, en prenant simplement des nombres plus grands pour les CM. Comme nous interrogions les CE oralement, nous pouvions les aider et différencier les procédures utilisées. Pour les CM, il s'agissait seulement de voir s'ils pouvaient calculer sans erreur et s'ils recouraient aux dizaines dans leurs explications.

Sur le problème, nous avions aussi les mêmes objectifs dans les deux niveaux :
- d'une part, cerner ce qu'est pour l'élève un problème de mathématiques,
- d'autre part observer la manière dont il aborde la résolution du problème.

Nous pensions déceler les idées que les élèves se faisaient du problème de mathématiques en leur demandant d'en fabriquer eux-mêmes et en analysant la forme et le contenu des questions posées. Pour avoir une certaine unité et pour éviter que les élèves ne restent sans réponse, nous avons choisi de leur demander de fabriquer un problème à partir d'un contexte fourni. C'est en même temps une activité plus proche de la résolution puisqu'il faut trier des informations fournies par quelqu'un d'autre avant d'en tirer des questions. Le choix des questions des élèves nous informerait aussi sur la structuration qu'ils faisaient des données de l'énoncé.

Nous avons choisi le même contexte pour les deux classes : une histoire de goûter, nous avons simplement complexifié la situation pour les CM en augmentant le nombre de données.

A travers les questions générales, conformément aux objectifs définis plus haut, nous voulions savoir si l'élève aimait les mathématiques, s'il pensait qu'elles étaient utiles dans la vie ou dans certains métiers, s'il en faisait à la maison

en plus de ce qu'on lui demande en classe, à qui il demandait éventuellement des explications. Nous voulions aussi déceler les idées qu'il avait sur ce qu'il faut faire pour apprendre des mathématiques et son interprétation des paroles des adultes à ce sujet.
Pour les CE1, une première question visait à vérifier que l'élève savait reconnaître une leçon de mathématiques.

La grille d'entretien individuel prévue pour les CE1 a donc été la suivante :

1. Compte de 10 en 10 en reculant à partir de 138. Explique comment tu fais pour trouver vite le résultat dans ta tête.
Compte de 9 en 9 à partir de 40 jusqu'à ce que tu aies dépassé 120. Explique comment tu fais pour trouver vite le résultat dans ta tête.

2. Dans une classe, on organise un goûter.
On a décidé d'acheter des croissants et des tablettes de chocolat.
Les croissants sont vendus par sachets de 10.
Les tablettes de chocolat sont vendues par boîtes de 5.
Dans cette classe, il y a 25 élèves.

Invente des problèmes à partir de cette histoire et essaie d'y répondre.

3. Au jeu de nain jaune, il y a des jetons de différentes formes : des ronds, des carrés, des rectangles.
Un rectangle vaut 5 carrés et un carré vaut 5 ronds.
Pierre a 42 jetons ronds ; il voudrait les échanger de façon à avoir le plus possible de rectangles. Quels jetons aura-t-il à la fin des échanges ?

Dans une classe, la maîtresse distribue des bons points, des images et des cahiers : pour 10 bons points, on peut avoir une image ; pour 10 images, on a un cahier.
A la fin de l'année, Jean a collectionné 187 bons points. Combien peut-il avoir de cahiers ?

4. Comment sais-tu qu'on fait une leçon de mathématiques ? qu'est-ce qu'on y fait ?
A ton avis, quand on fait des mathématiques, on fait (jamais, quelquefois, souvent, très souvent)
- du calcul mental
- des opérations
- des dessins, des figures
- des exercices, des problèmes
- on fait autre chose ? Explique.

Parmi les activités du cours de mathématiques
Qu'est-ce que tu préfères ?
Qu'est-ce que tu aimes le moins ?
Qu'est-ce qui te paraît le plus facile ?
le plus difficile ?

5. Penses-tu que pour être bon en mathématiques, le plus important c'est
- de bien écouter le maître (ou la maîtresse)
- de bien apprendre ses leçons
- de se faire expliquer ce qu'on n'a pas bien compris
- de faire beaucoup d'exercices ou de problèmes
- autre chose (explique).
Et à ton avis, qu'en pense la maîtresse ?

6. Si tu n'as pas très bien compris, que fais-tu ?
- je demande à la maîtresse (ou au maître) de réexpliquer
- je demande à un camarade
- je demande à mes parents ou à mes grands frères et grandes sœurs
- autre chose (explique) :

7. T'arrive-t-il de faire des mathématiques quand tu n'es pas en classe ni en train de faire tes devoirs ? A quel moment ? Donne des exemples.

Penses-tu que les grandes personnes se servent des mathématiques dans la vie ? Pourquoi ?

8. Quel métier aimerais-tu faire plus tard ?
Penses-tu que tu te serviras de mathématiques dans ton métier ? Pourquoi ?
Quel métier font tes parents ? Penses-tu qu'ils se servent des mathématiques dans leur métier ?
A part professeur de mathématiques ou instituteur, penses-tu qu'il y a des métiers où on fait beaucoup de mathématiques ? lesquels ?

Les questionnaires écrits utilisés en CM2 ont été les suivants :

1. Compte de 10 en 10 en reculant à partir de 278 :
....
....
....
Explique comment tu fais pour trouver vite le résultat dans ta tête :
....
....
....
Compte de 9 en 9 à partir de 127 jusqu'à ce que tu aies dépassé 250 :
....
....
....
Explique comment tu fais pour trouver vite le résultat dans ta tête ?

....
....
....

2. Dans une école, on organise un goûter pour le carnaval. On a décidé d'acheter des croissants, des tablettes de chocolat, des oranges.
Les croissants sont vendus par sachets de 10.
Les tablettes de chocolat sont vendues par boîtes de 20.
Les oranges sont vendues par filets de 6.
Dans cette école, il y a 5 classes :
un C.P. avec 18 élèves
un C.E.1 avec 23 élèves
un C.E.2 avec 16 élèves
un C.M.1 avec 21 élèves
un C.M.2 avec 27 élèves.
Sais-tu combien il faut acheter de filets d'oranges pour être sûr de pouvoir donner au moins une orange à chaque enfant ?

Au dos de la feuille, invente des problèmes à partir de cette histoire et essaie d'y répondre.

3. A ton avis, quand on fait des mathématiques, on fait

	jamais	quelquefois	souvent	très souvent
du calcul mental				
des opérations				
des tracés de géométrie				
des mesures				
des exercices				
des problèmes				

Pour chaque ligne, mets une croix dans la case qui te paraît le mieux convenir.
on fait autre chose ? Explique :
....
....

Parmi les activités du cours de mathématiques
Qu'est-ce que tu préfères ?..
Qu'est-ce que tu aimes le moins ?..
Qu'est-ce qui te paraît le plus facile ? ....
le plus difficile ? ....

4. Arrive-t-il qu'un problème de mathématiques ait plusieurs solutions ?
jamais quelquefois souvent
Arrive-t-il qu'il y ait plusieurs méthodes pour trouver la solution ?
jamais quelquefois souvent

5. Penses-tu que pour être bon en mathématiques, le plus important c'est
- de bien écouter le maître (ou la maîtresse)
- de bien apprendre ses leçons
- de se faire expliquer ce qu'on n'a pas bien compris
- de faire beaucoup d'exercices ou de problèmes
- autre chose (explique) :
....
Mets une croix devant ce qui te paraît le plus important

6. Si tu n'as pas très bien compris, que fais-tu ?
- je demande à la maîtresse (ou au maître) de réexpliquer
- je demande à un camarade
- je demande à mes parents ou à mes grands frères et grandes sœurs
- autre chose (explique) :
....
mets une croix devant ta solution

7. T'arrive-t-il de faire des mathématiques quand tu n'es pas en classe ni en train de faire tes devoirs? A quel moment ? Donne des exemples.
....
....
....

Penses-tu que les grandes personnes se servent des mathématiques dans la vie ? Pourquoi ?
....
....

8. Quel métier aimerais-tu faire plus tard ?......................................
Penses-tu que tu te serviras de mathématiques dans ton métier ? Pourquoi ?
....
....

Quel métier font tes parents ?...
....
Penses-tu qu'ils se servent des mathématiques dans leur métier ?
....
A part professeur de mathématiques ou instituteur, penses-tu qu'il y a des métiers où on fait beaucoup de mathématiques ? lesquels ?
....
....

Nous disposons donc pour ce chapitre des données suivantes :

- les réponses d'élèves de CE1 à des entretiens individuels selon la grille ci-dessus. Cette classe fait partie de l'école où avaient eu lieu les observations de 83 à 85, qui recrute surtout dans les milieux populaires et avait pour maître l'instituteur C (voir chapitre 6). Ces entretiens ont eu lieu en mai 1988.
- les réponses écrites recueillies en mars 88 d'élèves de CM1 et CM2 au questionnaire ci-dessus. Les élèves de CM2 étaient dans la même école que ceux observés de 83 à 85 et avaient pour maître l'instituteur B, qui avait participé à l'expérience de 83 à 85. Les élèves de CM1 venaient d'une école qui recrute plutôt dans les milieux favorisés et avaient pour maître l'instituteur A, celui du CM2A de 83-84, qui avait entre temps changé d'école.

Nous disposons également des interviews de ces trois enseignants, elles seront analysées au chapitre 6.

Nous complèterons l'analyse obtenue à partir des questionnaires décrits ci-dessus par des observations ultérieures, essentiellement le suivi d'une classe de 6ème en difficulté durant l'année scolaire 88-89 et notamment deux séries d'entretiens individuels avec les élèves : en octobre 1988 et février 1989.

2. Les mathématiques vues par des élèves de CE1.

2.1. Précisions sur le recueil des données et méthodes d'analyse.

Recueil des données.

Nous[1] avons interrogé les élèves de CE1 en mai 1988.

Nous avons posé en premier les questions générales (à partir de la 4). Pour les autres questions, l'ordre a parfois un peu varié : le plus souvent nous avons posé d'abord celles qui concernent la numération, y compris le problème des bons points, seulement pour certains élèves (en principe les plus rapides). Le problème du nain jaune n'a pas été posé. Le problème du goûter a été posé dans des termes un peu différents, que nous présenterons plus loin.

Les entretiens ont été enregistrés. Nous fournissons dans les documents annexes à ce chapitre, avec la grille qui nous a servi pour mener les entretiens, l'essentiel du contenu des réponses des élèves. Pour ce qui concerne les questions générales, nous avons donné la teneur des réponses mais en ne gardant que des citations. Nous préciserons au moment de l'analyse pourquoi nous n'avons gardé que certains éléments des réponses. Pour les questions proprement mathématiques, nous reproduisons intégralement le transcript de la bande magnétique.
L'instituteur de la classe est l'instituteur C des interviews. On pourra donc mettre en relation ce que disent les enfants avec ce que dit l'enseignant. Nous disposons également de l'enregistrement d'une séquence de classe sur la numération.
Les mêmes élèves ont été interrogés en français par Isabelle Mindus, une élève d'Elsabeth Bautier.

Quelques précautions pour le dépouillement

Avant de donner les résultats, il nous faut indiquer quelques précautions qui nous paraissent indispensables pour leur interprétation.

D'abord il y a lieu de se demander comment les élèves nous voient. Nous avons été présentées comme des dames qui viennent les interroger pour savoir ce que les enfants pensent des mathématiques. Mais il est connu[2] que les jeunes enfants ont tendance à classer les adultes à qui ils ont affaire dans le cadre scolaire, notamment dans une situation de questionnement expérimental, en deux catégories : celui qui fait apprendre, si le savoir en jeu paraît nouveau, ou celui qui évalue, si le savoir en jeu paraît ancien. Dans les réponses, il faut donc faire la part de ce qui peut être l'envie de bien répondre, c'est-à-dire de se conformer à notre attente et au contrat didactique habituel. Nous reviendrons sur ce point un peu plus tard.

Par ailleurs, sur les questions générales, notamment sur ce qu'il faut faire pour devenir bon en maths, on peut penser que les réponses des enfants traduisent, en plus de ce qu'ils devinent de notre attente, ce qu'ils perçoivent de ce qu'en dit le maître et de ce qu'on en dit dans leur famille. C'est pourquoi par exemple dans le dépouillement de cette question, nous n'avons pas dissocié dans les réponses des élèves ce qu'ils en pensent et ce qu'ils disent qu'en pense le maître. En effet, ce qu'en dit, d'après eux, le maître, apparait le plus souvent comme un complément à ce qu'ils ont dit avant : on essaie de se souvenir de choses qu'on aurait pu oublier ou d'une recommandation particulière qui revient souvent. Cependant, en rassemblant ce que disent tous les enfants, nous pouvons avoir une idée de ce que dit réellement le maître dans la classe.

De plus, même si on peut répertorier les réponses, une étude plus détaillée montre qu'une même déclaration n'a pas forcément la même signification pour deux élèves différents. Par exemple, comme nous le verrons à la question

[1]Je remercie vivement J. Robinet qui m'a aidée à faire passer ces entretiens.
[2] voir par exemple les travaux de M.L. Schubauer-Leoni (1986).

5, une réponse comme "il faut bien réfléchir" peut, pour un élève qui ne réussit pas, être une répétition des recommandations qu'il entend toujours et rester pour lui à un niveau totalement abstrait ; cela peut au contraire, pour un bon élève, être tiré de sa propre expérience parce que c'est ce qu'il fait ou pense faire pour réussir face à un problème de maths.

Compte tenu de toutes ces réserves, nous pensons qu'on ne pouvait, à ce moment de notre travail, faire beaucoup mieux que procéder de façon empirique comme nous l'avons fait. Même si notre cadre théorique, qui nous a permis d'élaborer le questionnaire, nous donne des axes pour le dépouillement, les catégories précises ne peuvent que se déterminer a posteriori, au vu de ce que nous recueillons réellement. Notre matériel nous permet cependant certaines mises en relation qui, nous l'espérons, pourront, elles, se révéler significatives.

Méthodes de dépouillement.

Nous avons donc procédé à un dépouillement question par question. Nous avons dégagé des axes d'interprétation, pour partie a priori, à l'aide de notre cadre théorique, pour partie a posteriori après l'observation. Par ailleurs les questions sur les nombres nous permettent de situer le niveau de chaque élève en numération.

Les résultats de ce dépouillement par question sont rassemblés dans un tableau à double entrée qui nous permet ensuite un dépouillement par élève en rapprochant notamment la résolution de problèmes à la fois des déclarations générales et de la maîtrise des nombres.

Le dépouillement par question nous permet également de dégager des tendances au niveau de la classe qu'on peut confronter aux déclarations du maître, et qu'on peut comparer à ce qui ressort des analyses menées à partir des réponses des CM ou des élèves de 6ème.

Bien sûr il s'agit là d'une étude clinique et nous n'avons pas la prétention d'en tirer des lois générales. Elle a cependant le mérite de nous révéler certains phénomènes qu'on pourra éventuellement étudier ensuite avec d'autres moyens, sans perdre de vue toutefois que certains d'entre eux ne peuvent de toute façon s'observer que cliniquement.

2.2. Dépouillement par question.

2.2.1. Questions générales (4 à 8). Décisions adoptées pour le dépouillement et résultats.

Certaines réponses des élèves nous paraissent apporter des informations pertinentes par rapport à notre question sur leurs représentations métacognitives et leur maîtrise du contenu. D'autres nous paraissent induites par le questionnement ou peu significatives. Nous n'avons donc retenu des questions et des réponses que la partie la plus pertinente pour notre analyse. Nous avons ensuite codé les réponses retenues. Nous gardons dans un premier temps toute la variété des réponses avant de faire des regroupements en quelques grandes catégories pour chaque question.

Pour faciliter la lecture nous rappelons succinctement le contenu des questions chaque fois que c'est nécessaire. La formulation exacte a pu varier légèrement d'un élève à l'autre puisqu'il s'agissait d'entretiens oraux. On peut se reporter à l'annexe pour en avoir des exemples.

De la **question 4**, nous retenons le fait que les élèves savent (ou non) reconnaître l'objet des leçons de mathématiques, soit qu'ils citent spontanément des contenus traités quand on leur demande comment ils savent qu'on fait une leçon de mathématiques, soit qu'ils donnent des exemples pertinents quand on leur demande ce qu'on fait en mathématiques. Le fait de répondre oui aux questions posées ensuite ne nous a pas paru suffisamment significatif pas plus que le fait de dire que c'est le maître qui le dit.
Nous pouvons penser que 15 des 21 élèves savent reconnaître un travail de mathématiques du reste du travail scolaire, et que l'un d'eux (élève 11) ne fait pas cette distinction. Pour les 5 autres élèves, les réponses sont tellement floues qu'il est difficile de décider s'ils savent mais sont incapables d'expliquer, ou s'ils ne savent pas vraiment (voir tableau récapitulatif au paragraphe 2.3.)

Pour la **question 5** (que faut-il faire pour être bon en mathématiques ?), les types de réponses des 19 élèves à qui la question a été posée sont les suivants (9 d'entre eux ne donnent qu'une réponse et 10 en donnent 2 ou 3). Nous mentionnons en même temps, en le précisant, ce qui est attribué au maître parce que, comme nous l'avons déjà dit, les opinions des élèves ne nous semblent pas indépendantes de celles du maître. Dans un premier temps, nous essayons de garder le plus possible les nuances rencontrées dans les formulations des élèves, ce qui donne beaucoup de catégories :

- A : il faut en priorité apprendre ses leçons (réponse spontanée le plus souvent, ou choix en numéro 1 dans la liste) : 10 élèves. Beaucoup de ces élèves mentionnent ensuite écouter le maître.
- B : il faut d'abord bien écouter le maître : 2 élèves

- AB : égalité d'importance entre A et B : 2 élèves.
- C : "il faut bien travailler". Nous distinguons cette réponse qui pourrait peut-être dans certains cas se ramener à A (1 élève dit "il faut travailler dur" et fait en même temps la réponse A, un autre dit "il faut travailler chez nous et écouter ce que le maître dit"), parce qu'elle ne permet pas de distinguer si le travail consiste à apprendre ses leçons ou à faire des exercices et qu'elle semble de plus beaucoup plus vague, pour 2 autres élèves. De plus, elle peut simplement manifester un constat (travailler bien signifiant aussi avoir de bons résultats).
- D : rester calme, poli, être sage : 3 élèves dont 2 l'attribuent au maître (ils font pour leur compte personnel une réponse A, l'autre fait aussi une réponse C).
- E : réfléchir, bien regarder : 2 élèves seulement ! Il est vrai que cette réponse n'était pas suggérée.
- F : faire des exercices : 2 élèves (l'un d'eux avait aussi une réponse de type A et l'autre de type AB).
- G : ne pas trop regarder la télé : 2 élèves qui citent à ce propos les recommandations du maître dont un dit auparavant, pour son compte personnel, qu'il faut réfléchir et ne pas écrire n'importe quoi et l'autre qu'il ne faut pas "donner des trucs trop durs".
- H : corriger les fautes : 1 élève qui dit aussi que le maître pense qu'il faut écouter ce qu'il dit.
- I : ne pas faire de faute : 1 élève qui dit aussi qu'il faut travailler dur.
- J : bien lire les consignes : attribué au maître par 1 élève
- K : ne pas donner des trucs trop durs : 1 seul élève fait une réponse qui relève de la responsabilité du maître et non de la sienne.
- L : trouver des choses, attribué au maître par 1 élève.
- M : relire, attribué au maître par 1 élève.

Ainsi, d'après la majorité des élèves, ce qui est le plus important, c'est de bien apprendre ses leçons, et ensuite de bien écouter le maître.

En rassemblant toutes les réponses, les élèves pensent que le maître dit qu'il faut bien travailler, bien écouter, bien lire les consignes, trouver des choses, relire ce qu'on a fait, et aussi ne pas regarder la télé et rester calme et sage. En général, les réponses attribuées au maître sont différentes de celles qu'ils avaient données pour eux-mêmes. Cela ne veut pas nécessairement dire qu'ils pensent différemment, mais les réponses attribuées au maître peuvent souvent être vues comme complétant ce qui a été dit avant et qui est souvent aussi une reprise de ce que dit le maître ou de ce que disent les parents.

Il est clair qu'il n'est pas indifférent pour un enfant d'avoir retenu telle recommandation du maître plutôt que telle autre : par exemple, l'élève qui a retenu qu'il fallait trouver des choses semble plutôt bon en mathématiques. On ne peut cependant pas attribuer une signification trop grande aux seules déclarations des élèves en ce domaine. Par exemple, les deux élèves qui déclarent qu'il faut bien réfléchir ont des profils très différents. Il est vrai que les réponses associées ne sont pas les mêmes. L'un d'eux semble plutôt en difficulté sur le plan du calcul. Il dit qu'il faut "réfléchir et ne pas mettre n'importe quoi", et pense que la maîtresse dit "de travailler durement et de ne pas trop regarder la télé". L'autre, qui semble au contraire très à l'aise avec les nombres, dit qu'il faut "bien regarder comment ça se passe" et que "si on apprend bien ses leçons, on sait directement, sans regarder plusieurs fois". L'expression semble beaucoup plus concrète et plus tirée de l'expérience dans le second cas que dans le premier où on a plutôt l'impression que l'élève répète ce qu'il a l'habitude d'entendre, mais que cela reste relativement abstrait pour lui. Il faut donc prendre en compte l'ensemble des déclarations et même la manière dont elles sont formulées en prenant garde au fait qu'une expression très claire peut simplement être la reproduction des paroles des adultes sans appropriation.

Si nous essayons d'interpréter ces réponses des élèves, la ligne principale qui nous est suggérée par notre cadre théorique est de distinguer ce qui semble de la responsabilité de l'élève de ce qui paraît plutôt de la docilité, voire des questions morales. Nous avons ainsi distingué 4 catégories d'élèves :

a) ceux qui mettent en avant ce qui est de la responsabilité de l'élève hors de la classe comme apprendre ses leçons : réponses A et F.

b) ceux qui associent docilité en classe et travail hors de la classe.

c) ceux qui ne disent que "écouter le maître" ou insistent surtout sur l'aspect docilité en classe sans parler du travail à la maison.

d) ceux qui mettent en avant des questions morales "être poli, sage, ne pas regarder la télé" "bien travailler", s'il n'y a pas d'autre précision ou si c'est lié à une raison morale.

De plus nous noterons a') ceux qui font une place, dans leurs réponses, à l'initiative de l'élève en classe : bien regarder, bien réfléchir, trouver des choses : réponses E et L. Deux de ces élèves ont aussi une réponse A, le troisième des réponses C,G, attibuées au maître. Cela correspond à un classement a pour les deux premiers, d pour le 3ème.

Nous avons donc sur cette question le tableau suivant pour l'ensemble des élèves :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
A	A	A L	B		C B	C D	K A G	A D	H B M		E C G	A C D	A E	Cl A	A F	B A	AB F	A	A BJ	AB
a	a	aa'	c		d	d	b	b	c		da'	b	aa'	a	a	b	b	a	a	b

Les codes soulignés correspondent aux réponses attribuées au maître.
Nous avons oublié de poser la question aux élèves 5 et 11.

Finalement 7 élèves mettent plutôt en avant le travail personnel (a), 7 pensent qu'il faut bien écouter en classe et faire ses devoirs (b), en gros faire ce qu'on leur dit. Pour les autres (c,d), c'est simplement le fait de bien écouter ou de bien se conduire qui doit apporter des résultats.

La **question 6** a été posée à 19 élèves. La plupart (14) demandent au maître d'expliquer quand ils n'ont pas compris. Parmi eux, 7 (E3, E4, E7, E13, E15, E19, E21) demandent aussi à la famille et aux camarades, 5 (E9, E14, E16, E18, E20) demandent au maître et à la famille mais pas aux camarades, 2 (E1, E11) ne demandent qu'au maître. Pour certains (E14, E19, E21), c'est après avoir essayé de se débrouiller tout seuls en relisant ou en recommençant un peu plus tard. 5 élèves ne demandent jamais au maître, l'un d'eux (E2) dit que celui-ci ne veut pas. Parmi eux, trois (E2, E8, E10) essaient de se débrouiller seuls en relisant ou en recommençant plus tard ; l'un d'eux (E2) demande aussi parfois à un camarade, un autre à sa famille (E8), le troisième (E10) à personne. Les deux autres (E6, E17) demandent parfois de l'aide chez eux, l'un d'eux (E6) attend la correction.

En ce qui concerne la **question 7**, l'utilisation des mathématiques dans la vie n'est pas très significative pour les élèves de CE1, elle se limite au plus à l'achat du pain ou de menues courses, encore ne vérifient-ils pas tous la monnaie. Ce qui paraît plus significatif, c'est que 14 d'entre eux déclarent faire des mathématiques en plus des devoirs contre 4 qui reconnaissent n'en pas faire. Certains en font avec les parents, parfois avec de l'avance sur l'école (les soustractions par exemple), d'autres en font seuls, pour s'entraîner. Notons que ce travail supplémentaire est peut-être, pour certains élèves, une réponse à ce qui est perçu comme une demande implicite du maître, qui nous a déclaré encourager les élèves à faire des devoirs facultatifs.

Les idées sur l'utilisation des mathématiques par les grandes personnes dans la vie sont plutôt floues : sur les 20 élèves à qui on a posé la question, 6 (E2, E5, E7, E15, E18, E21) pensent que ça sert mais ne peuvent préciser, 4 (E4, E11, E12, E20) pensent que ça ne sert pas, 1 (E17) ne sait pas. Pour les autres, ce qui est cité, c'est surtout les courses et tout ce qui concerne les comptes et l'argent (E6, E10, E13, E14, E16) ou les études (E1, E6, E19). Un élève (E3) dit que ça sert "à être plus fort, à comprendre" et une autre (E9) que sa mère en fait pour son plaisir quand elle a le temps parce qu'elle a quitté l'école à 14 ans.

La **question 8** concernait l'utilisation professionnelle des mathématiques. Deux élèves ne savent pas si ça peut servir, 5 croient qu'il y a des métiers où ça sert mais ne peuvent pas préciser, et 3 pensent que ça ne sert pas. Pour les autres, 3 ne peuvent citer que "maîtresse" ou autre métier d'enseignement, 4 "caissière" ou quelque chose qui touche à l'argent et 4 peuvent citer autre chose : L'élève 3 cite électronicien et capitaine d'un bateau quand il calcule où il va, l'élève 12 cite directeur, l'élève 14 cite l'informatique, l'élève 19 cite docteur et pharmacien en disant qu'il faut en faire pour le devenir.

2.2.2. Habileté sur la numération et le calcul mental.

Pour en juger, nous regardons les réponses à la question 1 et éventuellement au problème des bons points. La première question (compter en reculant de 10 en 10 à partir de 138) était manifestement trop difficile comme première question pour certains enfants. Nous avons donc parfois demandé d'abord un comptage en ajoutant des 10, ou diminué la taille des nombres. La première question se subdivise donc en 3 sous- questions qui n'ont pas toutes été posées à tous les élèves mais qui permettent de mettre en jeu plus ou moins les mêmes procédures. Nous avons relevé pour les deux premières (comptage de 10 en 10) :

- A : compte rapidement de 10 en 10 sans explication avec la variante A' pour les élèves qui ralentissent notablement quand la taille des nombres augmente ou accélèrent très nettement quand elle diminue.
- B : ajoute (ou retire) une dizaine explicitement.
- C : décompose en passant à la dizaine intermédiaire.
- D : décompose autrement, par exemple en faisant +5, +5.
- E : pose l'opération dans sa tête.
- F : compte un à un en récitant mentalement la comptine (F' s'il oralise).
- G : compte sur ses doigts ou en regardant ses doigts.

Nous notons de plus :

- H : ne peut compter que quand il voit les nombres écrits
- I : difficultés au franchissement de la centaine
- J : erreurs ailleurs
- L : se sert des dizaines si on le suggère, dans le cas des nombres inférieurs à 100
- M : se sert des dizaines si on le suggère, même dans le cas de nombres supérieurs à 100.
- P : y arrive lentement, avec erreurs, sans explication.

Pour le comptage de 9 en 9, on retrouve les mêmes catégories, B est remplacé par "fait +10, -1" et B' : "repère une règle sur les chiffres qu'il ne peut pas exprimer en termes de dizaines et unités". Nous avons noté \B pour ceux qui ne peuvent pas utiliser la procédure B, même avec aide, et Q pour ceux qui ne peuvent ajouter 9 qu'en posant l'opération.

Des élèves changent de procédure en cours de travail, nous notons à la suite les différentes procédures utilisées.

Le problème des bons points n'a pas été posé à tout le monde faute de temps (l'entretien ne devait pas beaucoup excéder 1/2 heure). Il n'a donc en général pas été posé aux élèves qui avaient le plus de difficulté ou étaient les plus lents. Nous avons relevé les comportements suivants :

a : réponse correcte trouvée par l'élève seul

b : réponse trouvée avec aide (dessiner, ou accent sur le nombre de dizaines...)

c : le nombre de dizaines ne permet pas de conclure

d : n'arrive pas ou arrive très difficilement à trouver le nombre de dizaines, même avec aide.

e : réponse de l'ordre de 187 (>150). Il s'agit en général d'une première procédure.

Nous avons ensuite rassemblé les résultats des élèves dans le tableau ci-dessous et tiré des conclusions sur la maîtrise de la numération :

Elève	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
				FJ	GF L	P L						A			E	A A	F	E	D G	A B'	A
I	A'I	B	FC	M				A	O	JP	A"P		A'	AC	A	AB'	F	BI	B	BI	A
II	E	FB'	B'	B	E			P	G		A'	\B	\B	B	FP	PQ	\B			E	A
BP	eb		eb					a			ed	*		a		a					ec
Concl.	w	n	n	w	w	x		w	v		w			n		n'	uv	v	w	w	n'
niveau	2	1	1	3	3	3		2	4	3	3	4	3b	1	3b	1	4	4	3	3	2

* il s'agit d'un élève à qui on a posé le problème avec 57, qui répond d'abord 10 puis qui réussit à résoudre avec aide, quand on lui propose des intermédiaires : 17 et 27.

n signifie que l'élève a déjà une bonne maîtrise de la numération, n' que l'utilisation spontanée de la numération reste locale : ne s'adapte pas à l'addition de 9 ou au problème des bons points.

x qu'il sait formellement ce que sont les dizaines, centaines, unités mais ne peut pas les utiliser

w qu'il utilise la numération si on le lui suggère, mais pas spontanément, souvent de façon hésitante et lente.

v qu'il ne peut pas utiliser la numération

u qu'il a des difficultés avec la numération orale

Nous en avons tiré des niveaux de numération que nous mettrons en relation avec les réponses aux autres questions :

1 : utilise les dizaines, de lui-même ou presque

2 : utilise la numération avec aide ou des erreurs aux endroits les plus difficiles comme le franchissement des centaines.

3 : utilise un peu la numération si on le suggère, mais avec des difficultés même sur des choses simples, ou a une connaissance formelle de la numération qu'il n'utilise pas. Parmi eux, nous distinguons

3b : élèves qui comptent très bien, parfois vite mais sans utilisation de la numération. Si on le leur suggère, par exemple pour le comptage de 9 en 9, ça ne les aide pas, parfois ça les perd.

4 : numération non disponible, même si on le suggère et comptage lent ou avec erreurs.

Les élèves classés en w (utilisation de la numération sur suggestion) ont été partagés entre les niveaux 2 et 3, suivant la facilité d'utilisation. Nous avons attribué le niveau 1 à l'élève 16 bien qu'elle ait des difficultés avec la numération orale entre 70 et 100 parce qu'elle utilise spontanément la numération dans toutes les autres situations.

2.2.3. Résolution de problèmes

Analyse a priori

Nous avions initialement prévu de demander aux élèves de fabriquer un texte de problème de mathématiques autour d'un contexte et de données qui leur étaient fournies. Notre analyse a priori, en termes de contrat didactique et de représentation de ce qu'est un problème de mathématiques, nous faisait penser que le choix des questions des élèves nous informerait sur la structuration qu'ils faisaient des données de l'énoncé et sur l'idée qu'ils se faisaient de ce que devait être un problème de mathématiques.

Nous provoquions une première rupture du contrat didactique en demandant à l'élève de fabriquer lui-même un problème alors que son rôle se borne en général à résoudre. La rupture était d'autant plus grande que, pour produire eux-mêmes un problème, ils ne pouvaient pas forcément imiter ce qu'ils connaissaient, par exemple un problème déjà traité en classe, puisque le contexte et les données leur étaient imposées.

Il y avait aussi rupture à un deuxième niveau puisque les problèmes pertinents qu'on pouvait poser ne pouvaient se résoudre par une opération, et en tous cas, que la réponse au problème ne pouvait pas être un résultat d'opération, du moins à ce niveau d'enseignement, puisqu'il s'agissait en fait d'un problème de division.

Par ailleurs, comme M.L. Schubauer Leoni l'a analysé (1986), une ambiguïté plane pour les élèves sur ce contrat expérimental. Il est probable qu'ils prolongent le contrat didactique habituel mais ils ne sont pas sûrs de sa validité. De plus, plusieurs enfants de la classe sont suivis en rééducation, par le GAPP[2] ou à l'extérieur de l'école, donc dans des relations de face à face avec un adulte auxquelles ressemble davantage notre situation expérimentale. Cherche-t-on à les évaluer ? Que cherche-t-on à évaluer ? Il se peut que dans ces conditions, les enfants perdent leurs repères : la frontière entre les mathématiques et le reste redevient floue. Le contexte de l'histoire est tiré de la vie quotidienne et même d'une situation pratique qui leur est sans doute très familière, aucune question n'est posée et le texte leur est proposé dans une situation en marge du scolaire, alors que le lien éventuel avec la classe n'est pas clair pour eux, les élèves se trouvent donc devant un champ de possibilités extrêmement large pour poser des questions, d'autant plus large qu'il leur est difficile de situer les attentes de l'interrogateur. Il apparait ainsi un troisième niveau de rupture du contrat didactique. Nous reviendrons sur cette analyse en termes de contrat didactique après la description des résultats.

Modification du questionnement.

Le premier entretien nous a montré que, contrairement à notre attente, pour l'élève interrogée, le texte fourni était déjà un énoncé de problème. Pour tous les autres élèves, nous avons donc commencé par demander si l'histoire qu'on lui lisait était ou non un problème de mathématiques. Nous leur demandions ensuite si on leur avait posé des questions, éventuellement lesquelles, puis d'en poser eux-mêmes et d'essayer d'y répondre. S'ils ne pouvaient en poser, nous leur en proposions une : "combien faut-il acheter de sachets de croissants (ou de boîtes de chocolat) pour qu'on soit sûr de pouvoir donner un croissant (ou une barre de chocolat) à chaque élève?".

Catégories de dépouillement.

Les catégories de dépouillement ont été dégagées a posteriori, au vu de l'ensemble des réponses. Il faut d'abord dire que les élèves ont été unanimes, ils ont tous trouvé que le texte proposé était un problème de mathématiques ! Compte-tenu de ce résultat sur lequel nous reviendrons, nous avons retenu les rubriques suivantes pour le dépouillement :

1 - pourquoi est-ce un problème ? (donc ce qu'est supposé être un problème de mathématiques pour l'élève)
2 - l'élève peut-il poser une question ?
3 - quelles questions sont posées explicitement par l'élève?
4 - quelles questions implicites les élèves se posent-ils ?
5 - quelles hypothèses implicites sont-elles faites par les élèves ? (ces trois dernières rubriques permettent de se faire une idée de la représentation que les élèves se font de la situation proposée).
6 - qu'est-ce qui relève de la logique du quotidien dans les questions, les remarques ou les démarches ?
7 - difficultés éventuelles sur les contenus.
8 - résolution des problèmes posés.

1. Pourquoi est-ce un problème de mathématiques ?

Pour certains élèves, le problème semble se reconnaître à *l'existence d'une question,* soit parce qu'ils croient en avoir décelé une, soit parce qu'ils cherchent à répondre à une question qu'ils se sont formulée implicitement.

- "il y a des questions" (élève 20)
- "c'est nous qui devons répondre" (élève 1)
- "oui parce qu'il y en a que 15 et il faut encore 10 croissants sinon on partage les tablettes de chocolat" (élève 16)

On peut même trouver l'idée de l'existence d'une question avec les éléments nécessaires pour la réponse :

- "on donne les prix" (élève 21) ; il ajoute ensuite "c'est pas un problème parce qu'on donne pas l'argent qu'il fallait"

La réponse de l'élève 1 peut aussi être interprétée comme le fait que l'élève reconnaît qu'il est *de sa responsabilité de faire quelque chose.*

---

[2] Il y a dans cette école un GAPP complet composé d'un psychologue scolaire, d'une rééducatrice psychomotrice et d'une rééducatrice psychopédagogique.

Pour d'autres, c'est plutôt l'idée d'une *histoire contenant des données numériques* qui permet de reconnaître un problème. Cela peut être très explicite comme pour l'élève 19 ou beaucoup plus vague :
- "les calculs où on met des phrases, c'est des problèmes" (élève 19)
- "on dit que les croissants sont vendus par sachets de 10 et les tablettes de chocolat par boîtes de 5" (élève 5),
- "parce qu'il y a 10 paquets et 5 paquets de barres de chocolat" (élève 15)
- "on dit que les croissants sont vendus par sachets de 10 F" (élève 3)

Pour d'autres encore, le problème est plutôt lié à l'*idée qu'on peut calculer,* qu'on le dise explicitement ou en indiquant une opération.
- on peut calculer (élève 15),
- "oui, parce qu'ils sont 25 et y'a 10 croissants... les tablettes de chocolat sont vendues par boîtes de 5 et puis ça fera 15" (élève 17)
- on fait une opération entre 10, 5 et 25 (élève 18)

Ce dernier critère peut être vu comme une manière de compléter le précédent (élèves 15 ou 17). La phrase de l'élève 15 interprétée précédemment comme "c'est un problème parce qu'il y a des nombres" peut aussi s'entendre comme "c'est un problème parce qu'on peut calculer", réponse formulée ensuite. D'ailleurs, il faut des nombres pour calculer. Cela nous montre que ces critères ne sont pas exclusifs et que certaines déclarations des enfants peuvent être rattachées à plusieurs.

Certains élèves ne peuvent pas donner d'argument, ils se réfèrent à un problème qu'ils ont traité en classe qui sert de modèle, mais par le contexte (élève 2, les problèmes que donne la maîtresse ne sont pas comme celui-là, ils sont "sur la tricote, pour tricoter", élève 4 "il y a des pièges").

Pour un élève (élève 7), c'est même le sens courant du mot problème qui est retenu : quand l'observateur lui demande ce que peut faire un enfant quand on lui pose un problème, elle répond "quand il a un problème, il demande au maître et il lui explique et sinon, il demande à son camarade."

La majorité des élèves reconnaît, quand on le leur demande, qu'il n'y a pas de question posée (élèves 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 15, 16, 17).
Certains pensent qu'on leur a posé une question (élèves 14, 18, 20), certains ne savent pas (élève 19). Un élève pense qu'il n'y a pas de question dans un problème : c'est l'élève 7, celui qui prend problème au sens de difficulté.
On n'a pas demandé s'il y avait une question à quelques élèves : 5, 10, 11, 12, 13, 21.

Des élèves émettent cependant des doutes sur le fait que ça soit vraiment un problème, se sentent mal à l'aise ou trouvent ce problème un peu différent de ce qu'on leur pose d'habitude, certains dès le début (élève 8 "peut-être, oui", élève 14, "je crois", mais on sent sa perplexité), d'autres quand ils ont réalisé qu'il n'y avait pas de question (élève 1 "c'est pas vraiment un problème" "pourquoi ?" "parce qu'il y a pas une question", élève 3 "on doit dire "combien vont-ils dépenser ?")

Pour quatre élèves (3, 6, 13, 21), un problème qui parle d'acheter des choses doit, de façon plus ou moins explicite, poser des questions sur le prix. L'élève 13 trouve même une réponse et l'élève 21 déclare "c'est pas un problème parce qu'on donne pas l'argent qu'il fallait"

Nous voyons ainsi se dégager quelques raisons qui font reconnaître un problème de mathématiques aux élèves : il y a des questions, c'est à eux de répondre, c'est une histoire comportant des données numériques, on peut faire des calculs. Ces raisons ne sont pas données par tous les élèves et quand un élève en donne plusieurs, elles ne sont pas forcément coordonnées. Le lien avec la réussite dans la résolution n'est pas toujours clair comme on le verra dans la récapitulation. Il semble cependant que les élèves qui se réfèrent, même implicitement, à l'existence de questions et qui, dans un deuxième temps émettent des réserves sur le fait que le texte proposé soit bien un problème, ont une bonne réussite aussi bien en numération qu'en résolution du problème (élèves 1, 8, 14, 16, 20)

2. Possibilité de poser une question. Qu'est-ce qu'une question ?

Huit élèves ne peuvent pas poser de question, même si certains d'entre eux répondent à des questions implicites : certains élèves ne peuvent pas séparer la question de sa réponse. Neuf élèves posent des questions, même si c'est parfois après avoir déclaré ne pas pouvoir en poser.
- ne peuvent pas poser de question : élève 1 qui répond à des questions implicites mais qui ne peut en formuler aucune, élèves 2, 7, 11, 17, 19, 20, 21.
- déclarent ne pas pouvoir poser de question mais en pose quand même : élèves 8, 14.
- acceptent de poser une ou plusieurs questions : élèves 3, 4, 6, 9, 10, 16.
- on ne leur demande pas de poser de question : élèves 5, 12, 15, 18.

- pose une question sans qu'on le lui demande : élève 13.

On peut penser que certains élèves ne savent pas très bien ce qu'est une question. Les élèves 1, 7, 18 par exemple proposent des réponses quand on leur demande de poser une question. Pour l'élève 16, une question comporte un point d'interrogation et il suffirait que je remplace le point normal par un point d'interrogation pour que mon texte devienne un problème. Cette élève donne pourtant beaucoup d'explications sur la forme des questions "est-ce que", "on peut faire l'inverse" et montre une certaine connaissance sur la syntaxe mais il semble que sa définition de question ne soit pas encore très fonctionnelle. Il semble que cette élève ait perdu de vue qu'on avait ici un questionnement sur les mathématiques : rappelons que les mêmes élèves ont été interrogés sur le français à la même époque.

Le fait de pouvoir ou non poser des questions ne semble pas lié à la réussite de la résolution : 4 des 8 élèves qui ne peuvent pas poser de question peuvent résoudre, éventuellement avec un peu d'aide ; 3 des 8 élèves qui peuvent poser des questions ont besoin de beaucoup d'aide pour résoudre. Cette différence tient peut-être, dans le premier cas, à la difficulté de certains enfants à formuler ce qu'ils pensent ; dans le second cas à la nature des questions qu'ils se posent, qui peuvent ne pas être adaptées à la résolution d'un problème de mathématiques (élèves 6 et 13 sur le prix) ou à leurs difficultés en calcul (élèves 9, 10).

3. Nature des questions posées

Les questions posées ne sont pas toutes de même nature, et pas toutes conformes à ce qu'on attendre classiquement du problème de mathématiques :
- deux élèves (4, 16) posent des questions pertinentes pour l'organisation d'un goûter, mais non pour un problème de mathématiques,
- une élève (6) pose une question acceptable pour un problème de mathématiques mais inutile ici (réponse donnée dans le texte), tout en sachant que c'est une question inutile,
- trois élèves posent une question acceptable pour un problème de mathématiques mais dont les données ne permettent pas de trouver la réponse, cela concerne le prix. Deux d'entre eux (élèves 3, 6) savent cependant que les données ne permettent pas de répondre, l'élève 13, lui, pense pouvoir y répondre.
- quatre élèves posent une question pertinente pour un problème de mathématiques construit sur ce contexte, même si cette question est parfois peu précise ou liée à une hypothèse implicite : élève 8 (combien faut-il acheter de croissants ?) 9 (comment faire pour acheter pour tout le monde ?), 10 (combien il faut en acheter des autres ? des autres tablettes de chocolat et croissants ?), 14 (est-ce qu'il y en aura assez, il faut acheter plusieurs paquets).

4. Questions implicites

Nous appelons question implicite une question à laquelle l'élève fournit une réponse sans l'avoir formulée. Ce sont principalement :
Est-ce qu'il y aura assez pour tous les élèves ? (élèves 1, 12, 16)
Quel est le prix ? (élèves 3, 5, 13, 21)

5. Hypothèses implicites ou interprétation inexacte des données.

Les questions implicites sont le plus souvent liées à une hypothèse implicite, faite par l'élève, c'est-à-dire une interprétation ou un ajout de données qui lui permet de donner du sens à la question à laquelle il répond. Par exemple, beaucoup d'élèves supposent qu'on a acheté un paquet de croissants et une boîte de chocolats et se demandent s'il y aura assez pour toute la classe ou ce qu'il faudra acheter d'autre, en faisant souvent l'hypothèse supplémentaire qu'il faut donner une chose à chaque enfant, croissant ou barre de chocolat. D'autres, qui veulent interpréter le problème en termes de prix, comprennent qu'un paquet de croissants coûte 10F.
- on a acheté un paquet de croissants et une boîte de chocolats (élève 1 qui déclare qu'il n'y en aura pas assez dès le début, élèves 5, 10, 15, 16, 17)
- on a acheté une tablette (élève 12)
- un paquet de croissants coûte 10F (élèves 3, 5, 13)
- il faut donner quelque chose à chaque enfant, croissant ou barre de chocolat (élève 5 : "10 et 5, ça fait 15, donc il n'y aura pas assez", élève 10 : "il faut acheter encore 5 tablettes de chocolat et 5 croissants", élève 15 : "10 croissants, encore 10 croissants et 5 barres de chocolat"
- il faut que tout le monde ait la même chose : élève 8
- il ne faut pas de reste : élève 8.

Certains élèves, comme E1 ou E8 sont bloqués dans la résolution parce qu'ils pensent qu'il faut que tout le monde ait la même chose et qu'il ne faut pas de reste.

6. Logique du quotidien

Les hypothèses implicites que font les élèves sont souvent liées à leur connaissance pratique de la situation du goûter. Des propriétés du contexte qui apparaissent à leurs yeux très importantes font qu'il existe des questions et des réponses que certains enfants ne peuvent pas envisager. Ils raisonnent selon la logique du quotidien qui leur fait ajouter des hypothèses implicites ou les fait recourir à des solutions qui traitent le problème matériel mais pas le problème mathématique.

Par exemple, des élèves sont très préoccupés d'avoir juste assez avec un partage équitable :
- pour l'élève 1, il est prioritaire que le partage soit égal et qu'il y ait assez pour tous les enfants, c'est la question qui revient sans cesse, et elle ne peut pas chercher combien il restera : "on pourra les partager, ceux qui restent".
- l'élève 2 voudrait acheter 20 croissants au supermarché et 5 à la boulangerie. Il garde d'ailleurs jusqu'au bout cette idée des croissants achetés à l'unité ailleurs, ce qui pourrait nous faire croire qu'il n'a pas compris la soustraction puisqu'il répond qu'il aura 10 croissants en trop en achetant 3 sachets.
- l'élève 4 propose de demander au monsieur d'ouvrir un sachet et de lui donner 5 croissants. Elle ne peut se résoudre à acheter 3 sachets que quand je lui ai dit que ce n'était pas grave s'il y en avait trop.
- l'élève 5 propose d'acheter des petits gâteaux pour compléter.
- l'élève 10 propose "d'acheter quelque chose où il y en a pas 5".

D'autres répondent d'après leur expérience ou s'intéressent à divers détails pratiques :
- Quand on demande à l'élève 15 comment sont vendus les croissants, il répond "en payant".
- l'élève 2 à qui on demande ce qu'on pourrait chercher répond "de la boisson".
- l'élève 16 propose de partager les tablettes de chocolat.
- l'élève 4 à qui on demande de poser une question, propose "est-ce que tu aimes le chocolat ?"

Certains élèves semblent ainsi plus préoccupés de traiter le problème matériel du goûter que le problème mathématique auquel il est prétexte. Est-ce parce qu'ils ne se sentent pas tenus par le contrat didactique habituel ? Ce n'est pas sûr. Nous reviendrons sur cette question.

7. Difficultés particulières

Les nombres en jeu sont très petits. La principale difficulté rencontrée est la confusion objet - paquet pour six élèves (5, 9, 12, 15, 18, 20). Ils ont tous des niveaux faibles en numération (3, 3b ou 4). L'élève 18 semble aussi avoir des difficultés de calcul avec les nombres de cette taille.

8. Résolution des problèmes

Les deux problèmes prévus (combien faut-il acheter de sachets de croissants ? combien faut-il acheter de boîtes de chocolat ?) ont été abordés par 18 des élèves, qu'ils aient posé la question eux-mêmes ou qu'on la leur ait posée. Trois élèves résolvent seuls au moins un des problèmes. Six en réussissent au moins un avec une légère aide ; parmi eux, 3 résolvent alors l'autre seul. Six élèves réussissent avec beaucoup d'aide, parmi eux, 2 réussissent l'autre avec un peu d'aide ; 2 élèves ne peuvent résoudre aucun des problèmes malgré l'aide apportée. L'interrogateur renonce à poser un problème, faute de temps ou de participation de l'élève, pour 3 élèves et abandonne avant la fin de la résolution pour un autre.
- résolvent seuls le problème des croissants : élèves 1 (sans le reste), 14, 16, 17
- résolvent seuls le problème du chocolat : élèves 8, 14, 16, 20
- résolvent le problème des croissants avec aide légère : élèves 2, 4 (sans le reste), 8, 19, 20, 21
- résolvent le problème du chocolat avec aide légère : élèves 13, 17
- résolvent le problème des croissants avec beaucoup d'aide : élèves 5, 13, 15, 18
- résolvent le problème du chocolat avec beaucoup d'aide : élèves 3, 15, 21
- ne résolvent aucun des problèmes malgré l'aide apportée : élèves 10, 12
- ne peuvent pas trouver le reste dans le problème des croissants : élèves 4, 15
- résolution du type "âge du capitaine" : l'élève 13 déclare que ça coûte 15 F.
- abandon de l'interrogateur : élèves 1, 15, 18 pour le reste dans le problème des croissants, sur l'ensemble : élèves 6, 7, 9, 11.

Il y a donc finalement 11 élèves qui résolvent au moins un des deux problèmes seuls ou avec une aide légère (1, 2, 4, 8, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21), même si deux d'entre eux (13 et 21) ont d'abord eu besoin de beaucoup d'aide pour résoudre l'autre problème. Certains des élèves pour lesquels nous avons abandonné auraient donc peut-être pu réussir aussi.

Sur le problème, nous ne tirons pas de conclusion qui amènerait par exemple à définir un niveau pour chaque élève, sauf en ce qui concerne la résolution. Nous préférons garder chacune des rubriques identifiées que nous reprendrons, au paragraphe suivant, en termes de contrat didactique, puis que nous mettrons, pour certaines au moins, en relation avec les réponses à d'autres questions. On peut résumer les résultats dans le tableau suivant :

élève	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
questions	/q	/q	q'	q"		q'	/q	q	q	q'	/q			q		q"	/q		/q	/q	/q
qu. impl.	qi'		qi'		qi'							qi'	qi'			qi'	qi'				qi'
hypo.	h		h		h					h		h			h	h	h				h
réserves	r		r					r						r							
conf.p/o					c				c			c	c		c			c			
prat.		p		p	p		p			p											
résolut.	A	B	B	B	C			A	D	C		C	C	A	C	A	A	C	B	A	C

attitude face au problème :
q : pose des questions auxquelles on peut chercher une réponse à l'aide des données.
q' : pose des questions auxquelles on ne peut pas répondre à l'aide des données ou auxquelles on a déjà la réponse.
q" : question non pertinente en mathématiques
/q : ne peut pas poser de question
qi : question implicite pertinente par rapport aux données
qi' : question implicite non pertinente par rapport aux données
h : fait des hypothèses implicites
r : émet des réserves sur le fait que ça soit un problème
c : confusion paquets - objets
p : reste bloqué sur les aspects pratiques

réussite dans la résolution du problème :
A : réussit seul au moins un des problèmes
B : réussit à résoudre un problème avec aide légère
C : réussit à résoudre un problème avec beaucoup d'aide
D : ne réussit à résoudre aucun problème.

Analyse en termes de contrat didactique

L'analyse des résultats obtenus pour chacune de ces rubriques au niveau de la classe nous permet de dégager des pistes sur ce qu'est un problème de mathématiques pour les élèves de cette classe, sur les phénomènes imbriqués qui interviennent dans la résolution de problème pour les enfants de cet âge. En d'autres termes, elle nous renseigne sur la naissance du contrat didactique autour du problème de mathématiques.

Revenons d'abord sur notre contrat expérimental. Les élèves ne nous connaissent pas. Nous avons été présentées comme des dames qui s'intéressent à l'enseignement des mathématiques aux enfants, et qui viennent leur poser des questions à ce sujet. Nous sommes installés pour l'entretien dans une salle vide de l'école et nous interrogeons les enfants pendant les heures de classe, en les interrompant éventuellement dans une de leurs activités. Nous avons déjà signalé que des doutes subsistent probablement pour eux sur nos attentes : sommes-nous là pour leur apprendre quelque chose ou pour les évaluer ? est-ce qu'on est vraiment en mathématiques ? quel est le problème qu'on leur demande de résoudre, l'organisation d'un goûter ou un calcul ? Sur quoi les attend-on ? Il se pourrait aussi qu'on cherche à évaluer s'ils savent ce qu'est une question, d'autant plus qu'ils sont interrogés sur le français pendant la même semaine. Nous pensons que les élèves ont tendance à prolonger avec nous le contrat didactique habituel mais qu'il ne sont pas sûrs de sa validité et que, même si, pour la plupart d'entre eux, ils essaient de jouer au mieux leur rôle d'élève, ils ne savent pas toujours à quel registre faire appel. Il se peut aussi que certains élèves ne se sentent pas liés par le contrat didactique de la classe, surtout pour ceux qui sont habituellement suivis en rééducation. Cependant nous pensons que cette ambiguïté même sur le contrat expérimental va permettre aux élèves d'exprimer plus librement certaines idées et, jointe aux ruptures provoquées par rapport au contrat habituel, va nous renseigner sur ce contrat habituel concernant la notion de problème et sur la place qu'y tient chaque élève.

A l'aide des critères dégagés à partir des réponses et auxquels d'autres élèves adhéreraient sans doute si on les leur proposait, il ressort qu'un problème de mathématiques, c'est quelque chose qui est de la responsabilité de l'élève : il doit fournir une réponse. De plus, il y a des phrases et des nombres, il faut donc chercher soi-même dans le texte les données à combiner et les opérations à faire, contrairement à ce qui se passe dans d'autres exercices de mathématiques où on n'a qu'à effectuer les opérations. Mais ce n'est pas à lui de poser des questions, même si cela fait partie de son rôle à d'autres moments de son travail scolaire, par exemple pour montrer qu'il sait ce qu'est une question. Ce n'est pas à lui non plus de savoir si ce qu'il propose est juste ou non, pour cela il attend le verdict du maître ou de l'expérimentateur.

Nous retrouvons là la plupart des "clauses" identifiées par Y. Chevallard (1983) dans son analyse de "l'âge du capitaine". Il nous semble cependant que, pour les élèves de cette classe, le contrat didactique à propos du problème de mathématiques se révèle à la fois plus fort et plus vague que nous ne l'attendions.

Fort, parce qu'il est mobilisé dans une situation qui n'est pas vraiment un problème. Après tout, nous leur laissions la possibilité de ne pas reconnaître là un problème de mathématiques. Mais il est vrai qu'il n'est pas dans leur rôle de savoir si ce qu'on leur propose est un problème ou non, c'est là le rôle du maître (ou de l'expérimentateur). Leur tâche à eux est de résoudre. Si nous leur proposons quelque chose qui ressemble à un *problème, cela doit être un problème. On voit que, sur ce point, le contrat didactique fonctionne dans notre situation expérimentale.*

Vague, parce que, même s'ils répondent à une question implicite, beaucoup d'élèves n'ont pas encore intégré le fait qu'on répond à une question qui est posée dans le texte et qu'il faut identifier. La tâche qu'ils se donnent face à un problème est plutôt de fournir une réponse à l'aide des nombres du texte sans même se soucier de la question posée, ni, à la limite, de l'existence d'une question. Il semble qu'à l'aide du contexte et des nombres, ils répondent à des questions qu'ils se posent implicitement et qui ont l'air raisonnables dans le contexte.

Il n'est pas étonnant dans ces conditions qu'il se trouve des enfants pour donner "l'âge du capitaine" sans même qu'on le leur ait demandé, pourvu que ce soit plausible, comme le montre cet extrait du protocole concernant E13 (l'expérimentatrice est notée J., l'élève M.) :

J. Je vais te lire ce qui est écrit sur le papier, tu vas me dire si c'est un problème de maths ou pas.
M. (après lecture) oui.
J. Qu'est-ce qu'on va répondre ?
M. On va répondre combien ça coûte les croissants.
J. Est-ce qu'on peut répondre à cette question ?
M. Oui, les croissants et les tablettes de chocolat.
J. Et comment on va trouver combien ça coûte ?
M. Ça coûte 15F.

Remarquons qu'ici, dans sa deuxième intervention, l'expérimentatrice, semble rassurer l'élève sur le contrat : si elle demande ce qu'on va répondre, c'est bien qu'il y a quelque chose à répondre. C'est bien le contrat auquel l'élève semble adhérer, il peut répondre et elle réussit ainsi à obtenir cette réponse de l'élève.

Si l'on compare au contrat didactique classique sur le problème, il semble qu'ici relativement peu d'élèves essaient d'utiliser toutes les données dans une opération. Cela semble cependant être le cas de E18 (l'observateur est noté M., l'élève A.):

M. (après lecture du texte) Est-ce que tu penses que c'est un problème, ça ?
A. oui.
M. pourquoi ?
A. Parce que un problème, c'est comme ça !
M. A quoi tu reconnais ?
A. (après un long silence) parce que, la maîtresse, elle nous en fait souvent des comme ça.
M. Est-ce qu'on t'a posé une question, là ?
A. Oui.
M. Quelle question ?
A. On veut acheter 10 croissants.
M. Est-ce qu'il y a quelque chose à chercher, là, qu'est-ce qu'on peut chercher ?
A. On fait une opération entre 10 et 25.
M. Quelle opération ?
A. On fait une opération euh... 10, 5 et 25.
M. Quelle opération ?
A. en ligne.

On voit que la question "qu'est-ce qu'on peut chercher?" ramène l'élève dans le contrat habituel. Ce qu'on peut chercher, c'est une opération à faire. La deuxième demande de l'expérimentatrice est peut-être interprétée par l'élève comme une non-satisfaction, et elle propose alors une opération qui fait intervenir tous les nombres du texte.

Peut-être n'y a-t-il que peu d'élèves à respecter cette "clause" parce que ce problème a une forme trop éloignée de celle à laquelle les enfants sont habitués, ou peut-être les enfants de cette classe ne sont-ils pas habitués aux problèmes classiques ?

Il semble que nous soyons à un moment où le contrat didactique sur le problème de mathématiques est encore très flou et ne fait que commencer à se construire. Beaucoup des élèves manquent de repères pour organiser les données et les mettre en relation ou même pour en prendre réellement connaissance. Ils pensent qu'ils doivent fournir une réponse, et pour cela chercher dans le texte les données à combiner, choisir les opérations à faire. Mais la prise en compte d'une question à traiter ne paraît inquiéter que très peu délèves, pour les autres, tout se passe comme si la question leur semblait déjà posée.

L'absence de prise en charge par l'élève de la question posée et de la structuration des données est à relier aux difficultés de représentation du problème que nous avions repérées chez des élèves plus âgés. Il ne semble pas cependant que, pour les élèves de cette classe, ce soit dû à un manque d'anticipation : pour la plupart des élèves, il y a bien anticipation de questions. Le problème est que, souvent, les questions prévues par l'élève ne sont pas celles qui intéressent le maître ou alors qu'elles sont mêlées à d'autres questions qui ne relèvent pas des mathématiques. Elles ne sont pas problématisées dans la logique des mathématiques, mais font appel à divers registres de l'expérience de l'élève.
On voit ainsi apparaître des éléments qui gênent la mise en place d'un contrat didactique adéquat sur les problèmes tirés de la vie quotidienne.

La mise en place du contrat didactique scolaire usuel sur le problème qui amène les élèves à résoudre des problèmes absurdes est peut-être une étape qui correspond au fait qu'ils commencent à se libérer de la logique quotidienne pour entrer dans la logique du raisonnement mathématique.

Nous verrons au paragraphe suivant que les élèves ont des niveaux variés et que résoudre un problème de mathématiques n'a pas la même signification pour tous.

2.3. Analyse par élève.

L'analyse par élève nous permet la mise en relation des réponses sur le problème avec les performances sur les nombres et les déclarations faites dans la première partie de l'entretien pour préciser d'éventuelles différences dans la représentation que les élèves se font des mathématiques et des problèmes de mathématiques.

Nous regroupons ici les réponses aux différentes questions en gardant ce qui nous a paru le plus pertinent. Nous essayerons de mettre en relation ce que déclarent les élèves avec le niveau établi en numération et avec leur manière d'aborder les exercices ou le problème. Les interrogatoires n'ont pas tous été également approfondis. Dans les cas où nous avons assez d'informations, nous tenterons d'étudier plus particulièrement les représentations que peuvent avoir quelques élèves pour lesquels on a une certaine cohérence ou au contraire des contradictions qui paraissent assez flagrantes.

Nous rassemblons dans un grand tableau les résultats qui nous paraissent les plus significatifs, pour toutes les questions, en rappelant le codage utilisé :

- 4 : l'élève sait-il ou non reconnaître une leçon de mathématiques ?
o pour oui, n pour non, avec un point d'interrogation si ce n'est pas très net.

- 5 : ce qu'il faut faire pour être bon en mathématiques, codes de conclusion donnés précédemment :
a) élèves qui mettent en avant ce qui est de la responsabilité de l'élève hors de la classe comme apprendre ses leçons : réponses A et F..
a') ceux qui font une place à l'initiative de l'élève en classe : bien regarder, bien réfléchir : réponses E et L.
b) ceux qui associent docilité en classe et travail hors de la classe.
c) ceux qui ne disent que "écouter le maître" ou insistent surtout sur l'aspect docilité en classe sans parler du travail à la maison.
d) ceux qui mettent en avant des questions morales "être poli, sage, ne pas regarder la télé" "bien travailler", s'il n'y a pas d'autre précision ou si c'est lié à une raison morale.

- 6 : à qui demande-t-on des explications ?
m : au maître seul,
f : à la famille ou aux camarades
mf : au maître et à la famille, plus éventuellement aux camarades
s : ne demande à personne, sauf éventuellement à un camarade.
on ajoutera une * pour les enfants qui demandent après avoir essayé seuls.

- 7 : font-ils des mathématiques hors de la classe ?
o pour oui, n pour non, avec une note pour ceux qui ajoutent quelque chose de particulier (a pour l'élève 3, dans la vie les mathématiques, ça sert à être plus fort, à comprendre, b pour l'élève 9 qui dit (à la question 8) que sa maman fait des mathématiques pour s'entraîner et que c'est ses jours préférés.

- niveau de numération défini précédemment :
1 : utilise les dizaines, de lui-même ou presque
2 : utilise la numération avec aide ou des erreurs aux endroits les plus difficiles comme le franchissement des centaines.
3 : utilise un peu la numération si on le suggère, mais avec des difficultés même sur des choses simples, ou a une connaissance formelle de la numération qu'il n'utilise pas. Parmi eux, nous distinguons
3b : élèves qui comptent très bien, parfois vite mais sans utilisation de la numération. Si on le leur suggère, par exemple pour le comptage de 9 en 9, ça ne les aide pas, parfois ça les perd.
4 : numération non disponible, même si on le suggère et comptage lent ou avec erreurs.

- attitude face au problème :
q : pose des questions auxquelles on peut chercher une réponse à l'aide des données.
q' : pose des questions auxquelles on ne peut pas répondre à l'aide des données ou auxquelles on a déjà la réponse.
q" : question non pertinente en mathématiques
qi : question implicite pertinente par rapport aux données
qi' : question implicite non pertinente par rapport aux données
/q : ne peut pas poser de question
h : fait des hypothèses implicites
r : émet des réserves sur le fait que ça soit un problème
c : confusion paquets - objets
p : reste bloqué sur les aspects pratiques

- réussite dans la résolution du problème :
A : réussit seul au moins un des problèmes
B : réussit à résoudre un problème avec aide légère
C : réussit à résoudre un problème avec beaucoup d'aide
D : ne réussit à résoudre aucun problème.

question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
4 : sait ?	o	o	o	n?	n?	o	n?	o	o	o	n	o?	o	o	o	o	n?	o	o	o	o
5 il faut	a	a	aa'	c		d	d	a	b	c		a'd	b	aa'	a	a	b	b	a	a	b
6 à qui	m	s	mf	m		f	mf	f*	mf	s	m		mf	mf*	mf	mf	f	mf	mf*	mf	mf*
7 hors	n	o	oa	n		o	o	o	ob	o			o	o	n	o	o	o	o	n	o
niveau	2	1	1	3	3	3		2	4	3	3	4	3b	1	3b	1	4	4	3	3	2
questions	/q	/q	q'	q"		q'	/q	q	q	q'	/q			q		q"	/q		/q	/q	/q
qu. impl.	qi'		qi'		qi'							qi'	qi'			qi'	qi'				qi'
hypo.	h		h		h					h		h	h		h	h	h				h
réserves	r		r					r						r							
conf.p/o					c				c			c	c		c			c			
prat.		p		p	p		p			p											
résolut.	A	B	B	B	C			A	D	C		C	C	A	C	A	A	C	B	A	C

On peut mettre en relation ce que l'élève pense qu'il faut faire pour être bon en mathématiques avec son niveau en numération et dans la résolution du problème. Le fait qu'il mette ou non en avant la responsabilité de l'élève paraît significatif à cet égard :

question 5 numération	a	autres
niveaux 1,2	1,2,3,8,14,16	21
niveaux 3,4	19,20 15	4,6,9,10,13 17,18, 12

Nous avons souligné les numéros des élèves qui font à la question 5 une réponse que nous avons codée b.
Une des questions n'avait pas été posée aux élèves 5, 7, 11 qui ne peuvent donc figurer dans ce tableau.

A la question 5, l'élève 12 a une réponse a'd que nous avions déjà commentée. Son niveau 3b en numéra-tion semble confirmer l'interprétation que nous avions faite, à savoir que "il faut réfléchir" n'avait pas forcément une signification concrète pour lui.

question 5 résolution du problème	a	autres
niveaux A, B	1,2,3,8,14, 16,19,20	4, 17
niveaux C, D	15	9,10,13, 18,21, 12

On peut faire la même remarque que ci-dessus pour l'élève 12 qui a un niveau C en résolution de problème. Les élèves 5, 6, 7, 11 n'ont pas répondu à une des questions.

Remarquons d'ailleurs que les résultats en numération et en résolution du problème sont liés :

numération / problème	niveaux 3, 4	niveaux 1, 2
A, B	4,17,19,20	1,2,3,8,14,16
C, D	21	5,9,10,12,13, 15,18.

Elèves à qui une des deux questions n'a pas été posée : 6, 7, 11.

Nous voyons donc que le niveau de réussite établi à l'aide des exercices que nous avons posés semble lié au fait pour l'élève d'engager sa responsabilité dans l'apprentissage.
Les réponses b semblent bien, comme nous l'avions supposé plutôt des réponses de conformité à l'attente supposée des adultes en général et ne pas être reliées à la réussite.

Ces résultats sont conformes à ceux d'autres chercheurs qui ont travaillé en français avec des enfants de milieu social défavorisé, notamment E. Bautier-Castaing et B. Charlot (1990).

Profils d'élèves.

D'après les réponses aux questions 5, 6, 7, nous pouvons établir des profils d'élèves : pour la question 5 nous avons retenu les codes a, b, c, d ; pour la question 6 nous retiendrons les codes s, m, f en mettant f pour tout ce qui contient f ; pour la question 7 les codes sont o, n. Un profil sera donc défini par un triplet parmi 24 possibles. Voici ceux que nous avons effectivement rencontrés :

a, m, n : 1
a, s, o : 2
a, f, o : 3, 8, 14, 16, 19
a, f, n : 15, 20
b, f, o : 9, 13, 17, 21, 18
c, m, n : 4
c, s, o : 10
d, f, p : (6), (7).

A côté de chaque profil nous avons mentionné les numéros des élèves concernés en soulignant d'un double trait ceux qui étaient bien classés aussi bien en numération qu'en résolution de problèmes (niveaux 1, 2 ou A, B), d'un trait simple ceux qui avaient une bonne réussite dans la résolution de problème et un faible niveau de numération, et d'un trait pointillé celui qui a un bon niveau de numération mais ne réussit pas à résoudre le problème. Les élèves 6 et 7 sont indiqués entre parenthèses parce que nous n'avons pas pu leur attribuer de niveau. Les élèves 5, 11, 12 ne figurent pas dans ce tableau puisque nous ne leur avons pas posé toutes les questions générales et n'avons donc pas pu leur attribuer un profil. Restent 18 élèves répartis sur 8 profils et 16 élèves qui ont à la fois un niveau et un profil.

Ces résultats confirment ce que nous avions déjà remarqué : la liaison entre la réussite d'un élève et le fait d'une part qu'il considère comme très important son travail hors de la classe, d'autre part qu'il en fait effectivement (codes a, o). C'est particulièrement net en ce qui concerne la réussite en numération : les seules exceptions sont dans un sens l'élève 19 qui a un code a, o et n'a pas une bonne réussite en numération, mais en y regardant de plus près on s'aperçoit que son niveau était en fait limite entre 2 et 3, dans l'autre sens les élèves 1 et 21 : 1 déclare ne pas faire de mathématiques hors de la classe mais a un code a et 2 ans de retard, ce qui fait qu'elle a peut-être eu l'occasion de s'entraîner suffisamment ; pour l'élève 21, à qui nous avons mis un niveau 2, la numération fonctionne en fait de façon relativement implicite.

Nous donnons pour finir un résumé rapide des observations pour chaque élève, qui nous permet de montrer la diversité des représentations et la complexité de leurs relations avec la réussite, à cet âge. Nous avions prévu de comparer nos résultats à ceux obtenus en français mais nous n'avons pas pu le faire jusqu'à présent. Nous pensons que cette comparaison aurait beaucoup d'intérêt : nous avons par exemple appris que l'élève 1 à qui nous avons attribué un niveau correct en mathématiques a été considérée en grand échec en français.

Elève 1

C'est une fille de 10 ans, qui a donc déjà 2 années de retard. Elle pense que si on apprend bien ses leçons, on n'aura pas de problème pour faire les mathématiques. Si elle n'a pas compris, elle demande à la maîtresse et à personne d'autre. Elle ne fait pas de mathématiques hors de l'école à part les devoirs que donne éventuellement la maîtresse. Elle pense que les mathématiques servent pour les études. Elle sait reconnaître les activités de mathématiques et compte assez bien, avec cependant quelques difficultés au moment du franchissement des centaines.
A la lecture du texte, elle s'en fait une représentation sous forme de problème, c'est-à-dire qu'elle se pose implicitement des questions auxquelles elle cherche à répondre mais ne formule que les réponses. Elle sait à quelle question elle essaie de répondre "il faut que je regarde s'il y aura assez pour les 25 élèves" mais ne peut pas poser de question si on le lui demande. On a sans doute là un effet du contrat didactique : son rôle à elle est de répondre, comme elle le dit d'ailleurs explicitement et non de poser des questions. De plus, l'élève n'est-elle peut-être pas très sûre de ce qu'est une question, et surtout une question légitime. Elle est un peu gênée par les aspects pratiques, surtout le fait d'acheter trop de croissants, mais elle ne reste pas bloquée pour cela.

Elève 2

C'est un garçon à l'âge normal. Lui aussi pense que le plus important est d'apprendre ses leçons. D'ailleurs, il compte surtout sur lui-même et ne demande pas à la maîtresse de l'aider, il dit qu'elle ne veut pas. Il se montre très timide avec moi aussi et c'est difficile de le faire parler. Il lui arrive de faire des mathématiques hors de l'école, tout seul ! Il a un bon niveau de numération mais ne peut pas poser de question sur le problème. Il reste bloqué sur les questions pratiques en voulant acheter de la boisson puis 5 croissants à la boulangerie. Il sait résoudre les problèmes de mathématiques qu'on pourrait poser à partir de cette histoire mais le problème qu'il a retenu est le problème de l'organisation des achats de ce goûter.

Elève 3

C'est un garçon de 9 ans mais il est né en 1978 (2 ans de retard). Il sait reconnaître les contenus mathématiques et cite de lui-même la numération. Pour réussir en mathématiques, il apprend ses leçons et "comprend tout". Pour lui, la maîtresse demande de "trouver des choses". S'il n'a pas compris, il demande au maître, aux camarades ou à sa sœur. Il fait parfois des exercices pour s'entraîner et pense que dans la vie, ça sert à être plus fort, à comprendre. Il pense que les mathématiques servent au capitaine d'un bateau pour calculer sa route parce qu'il a vu ça à la télé. Il semble donc que cet enfant ait une image positive des mathématiques et de l'école et qu'il engage sa responsabilité dans ses apprentissages. Son niveau en numération est très bon. Cependant, il a du mal à rentrer dans le problème. Il le traduit en termes de prix mais reconnaît vite qu'on n'a pas posé de question alors qu'il y en a normalement dans les problèmes, et qu'on ne peut pas calculer le prix "parce qu'il y a pas la somme". Il ne peut pas poser de question pertinente mais accepte tout de suite celle qu'on lui pose. Il ne résout pas immédiatement mais se saisit de la suggestion de faire un dessin et en tire parti. On ne comprend pas bien pourquoi cet élève a déjà accumulé deux ans de retard à l'école, sauf peut-être à cause de la langue puisqu'il est d'origine étrangère et parle sa langue à la maison. Il serait particulièrement intéressant de connaître ses résultats en français.

Elève 4

C'est une fille de 7 ans 1/2, née en 1980. Elle semble ne pas trop savoir ce qu'on fait dans les leçons de mathématiques. Quand on lui demande ce qu'il faut faire pour être bon en mathématiques, elle répond "bien compter", c'est-à-dire donne un moyen de reconnaître si on est bon ou non au lieu d'un moyen de progresser. Elle ne semble pas avoir d'idée sur ce qu'elle pourrait faire, elle, si ce n'est écouter la maîtresse et faire ce qu'elle dit (réponses obtenues sur sollicitation). Elle ne sait pas comment reconnaître un problème mais cite les pièges. Elle reconnaît qu'il n'y a pas de question dans l'histoire et peut en poser une : "aimes-tu le chocolat ?". Elle reconnaît que ce n'est pas un problème de mathématiques mais ne voit pas comment poser une question qui serait un problème de mathématiques. Si on lui demande combien acheter de paquets de croissants, elle répond 2, mais elle sait qu'il n'y en aura pas assez pour tous les élèves, parce qu'on aura 20 croissants alors qu'il y a 25 élèves. Elle veut demander au marchand d'ouvrir un paquet de 10 pour qu'on puisse en prendre 5. Quand je lui dis que ce n'est pas possible mais qu'il peut y avoir des restes, elle propose 3 sachets, sait que ça fait 30 croissants, mais, malgré ma suggestion de faire un dessin, ne peut pas trouver combien il restera. Elle sait formellement ce que sont les dizaines mais ne peut pas s'en servir dans les calculs et compte un à un. Elle est très insécurisée : il faut la rassurer à chaque instant et lui poser des questions intermédiaires, on s'aperçoit qu'elle sait des choses mais ne peut pas s'en servir. Il semble que pour cette élève, le contrat didactique sur le problème et même sur les mathématiques soit presque à un niveau de non-existence. Elle comprend la situation du goûter et peut y répondre de façon pertinente, mais en devient incapable si on en fait un problème. Le seul fait de parler de mathématiques l'angoisse et la paralyse. Cette élève nous a déclaré qu'elle n'aimait pas les calculs, ni écrire mais qu'elle aimait lire. Il serait intéressant de voir ce qu'elle a fait en français.

Elève 5

Il s'agit d'une fille de 7 ans 1/2 née en 1980. Il n'est pas très sûr qu'elle sache reconnaître les activités qui relèvent des mathématiques en classe : quand on lui pose cette question, elle répond que la maîtresse a dit qu'une dame leur posait des questions sur les mathématiques. Elle a été interrogée en fin de demi-journée et nous n'avons eu le temps de lui poser que les questions de contenu. Sur le problème, elle répond à une question implicite qu'elle se pose avec les nombres du texte : "ça sera pas assez parce que 10+5, ça fait 15 et il y a 25 élèves." Quand je lui propose d'acheter plusieurs sachets, elle en propose 2 et pense qu'il y aura assez, peut-être parce qu'elle compte toujours les 5 puisqu'elle reconnaît aussitôt après qu'elle ne pourra pas donner un croissant à chaque élève. Comme je n'ai pas l'air satisfaite et que des enfants vont avoir faim, elle change de registre et se place dans la logique du quotidien en proposant d'acheter des petits gâteaux. Ceci nous montre l'incertitude sur le contrat didactique : est-ce qu'on attend un calcul (première interprétation puisqu'on a affaire à un problème de mathématiques) ou une solution du problème pratique ? On s'aperçoit de plus que la prise en compte des données par cette élève est floue, elle change l'interpration qu'elle fait des nombres quand on lui pose une nouvelle question : "combien de croissants?" (dans deux paquets) "20 francs". Quand on lui demande de dessiner les paquets de croissants, elle ne respecte pas le nombre d'elle-même, mais peut finir la résolution avec le dessin et en comptant un à un. Sur la numération, elle compte correctement de 10 en 10 tant que les nombres ne sont pas trop grands, sait reconnaître le chiffre des dizaines mais ne sait pas s'en servir pour calculer et oublie systématiquement les retenues dans les additions de tête.

Elève 6

C'est une fille née en 1980. Elle est handicapée motrice (jambes appareillées). Elle n'est pas très coopérative dans l'entretien et ses premières réponses sont toujours pour dire qu'elle ne sait pas. Ainsi elle prétend ne pas savoir quand on fait des mathématiques mais elle peut pourtant dire qu'on y fait des additions. Elle ne demande de renseignement à personne à l'école, seulement dans sa famille, mais elle s'entraîne parce qu'elle pense que les mathématiques servent dans la vie et à l'école. Pour devenir bon en maths, elle peut seulement dire qu'il faut bien travailler. Elle ne demande pas d'explication et attend la correction. Sur le contenu, il est aussi assez difficile de se faire une idée précise de son niveau à cause de sa réticence dans l'entretien. Elle commence par dire qu'elle ne peut pas ajouter 10 mais sait pourtant le faire, au moins sur des petits nombres. Elle sait reconnaître le chiffre des dizaines et des unités mais ne s'en sert pas pour calculer. Sur le problème, elle répond de façon assez pertinente mais non conforme au contrat didactique qu'on peut attendre : elle reconnaît qu'il y a "des moments où il y a des questions dans un problème" mais qu'il n'y en a pas dans celui-là. Elle peut inventer une question "combien y a-t-il d'enfants ?" Elle reconnaît, sur demande de l'expérimentatrice, que ce n'est pas une bonne question, et quand on lui demande d'en poser une où il est plus difficile de répondre, elle demande "combien coûte le prix ?" Et c'est encore après une suggestion de l'expérimentatrice qu'elle répond qu'il manque quelque chose. Il semble donc que cette élève, malgré son manque de coopération dans l'entretien, soit très attentive aux demandes de l'expérimentatrice et essaie d'y adhérer au mieux : la première question n'est pas aussi contraire au contrat qu'il y paraît et pourrait très bien être posée par la maîtresse au cours de la résolution de ce problème, il est en effet très fréquent qu'on fasse redire les données aux élèves, et la deuxième répond très bien à la demande puisqu'il s'agit de poser une question à laquelle il est plus difficile de répondre. Elle donne plutôt l'impression de ne pas avoir d'idée générale sur le problème mais de s'adapter au coup par coup à ce qu'elle ressent de l'attente de l'adulte. .

Elève 7.

C'est une fille, née en 1979, elle est handicapée également (naine). Elle ne peut pas citer elle-même d'activité mathématique, mais réagit au mot "calcul" et cite alors les abaques et propose des additions. Sa vision de ce qu'il faut faire pour réussir est liée au bien et au mal et à la religion. Elle prend problème au sens courant et quand on lui demande ce qu'il faut qu'un enfant fasse quand on lui pose un problème, elle répond que quand il a un problème, il demande à la maîtresse de lui expliquer. Elle ne comprend pas ce qu'on attend d'elle et brode autour de l'histoire en imaginant que ce goûter est pour un anniversaire. On ne lui a pas demandé de compter.

Elève 8.

C'est un garçon, né en 1980 donc à l'âge normal. Il cite des activités mathématiques de lui-même et pense que, pour réussir, il faut plus apprendre ses leçons, et il faudrait "donner des trucs pas trop durs". Il ne se considère pas lui-même comme très bon en mathématiques. Il demande parfois à son père de l'aider mais il essaie de comprendre tout seul. La maîtresse dit ce qu'il faut faire (consigne ?) mais n'explique pas. Il pense ne pas pouvoir compter en reculant à partir de 138 mais y arrive pourtant assez bien. Vu la rapidité des réponses, on peut penser qu'il utilise spontanément les dizaines pour compter de 10 en 10 et pour résoudre le problème des bons points, mais de façon totalement implicite et il ne peut pas l'adapter à l'addition de 9 qu'il réussit beaucoup plus difficilement. Sa résolution du problème des bons points nous a fait lui attribuer un niveau 2 alors que d'après le comptage, il aurait plutôt été classé 3b. Sur le problème, il ne s'engage pas trop au départ "peut-être!" mais pose de lui-même une question pertinente, question qu'il pose directement à l'expérimentatrice et non pour ajouter au texte du problème. Il peut répondre au nombre de paquets en paquets de 5, ce qui montre une certaine maîtrise du calcul : il sait directement que 25, c'est 5 paquets de 5, mais ne peut répondre en paquets de 10 parce qu'il est gêné par le reste. Après avoir trouvé le nombre de paquets de croissants et le nombre de boîtes de chocolat à acheter, il pense toujours qu'il ne peut pas inventer de problème parce qu'il n'a jamais fait ça.

Elève 9.

Il s'agit d'une fille à l'âge normal. Elle semble donner autant d'importance au fait d'apprendre ses leçons qu'à celui d'être sage en classe. Elle dit qu'elle s'entraîne à la maison sur des cahiers de mathématiques de grammaire et d'histoire. L'enseignant signale qu'il n'y a aucune coopération, voire un refus, de la famille, pourtant l'élève nous dit que sa maman s'entraîne aux mathématiques, et même que c'est ses jours préférés parce qu'elle a quitté l'école à 14 ans. Elle nous parle aussi des "pièges à trous" qu'elle n'aime pas, ce qui nous confirme dans l'interprétation des réponses de l'élève 4 au sujet des pièges. Elle ne peut que compter sur ses doigts. Sur le problème, elle pose une question pertinente mais qui pour elle correspond peut-être à une question matérielle "comment on va faire pour acheter pour tout le monde". Elle ne peut pas répondre à cette question : elle n'arrive pas à structurer ni même à répéter les données et confond les croissants et les paquets de croissants.

Elève 10.

C'est un garçon à l'âge normal. Il peut reconnaître des activités mathématiques mais il sait surtout que les mathématiques se font sur une feuille alors que le français est sur un cahier. Pour être bon en mathématiques, "il faut corriger et vérifier qu'on n'a pas de faute", ce qui est une manière de reprendre le conseil de la maîtresse "relire", mais pour ce qu'il faut faire avant le contrôle, il ne cite qu'écouter la maîtresse. Il ne demande d'explication à personne et fait des additions tout seul pour s'entraîner. Il ne peut pas utiliser la numération pour compter, bien qu'il en ait une certaine idée implicite puisqu'il commence par dire qu'en enlevant des 10 à 138, ça se terminera toujours par un 8, mais il ne peut pas se servir de cette remarque pourtant spontanée. Il peut poser une question pertinente pour le goûter et même y répondre mais avec des hypothèses implicites (on a déjà un paquet de croissants et il faut donner une chose, croissant ou chocolat, à chaque enfant), ce qui amène un malentendu avec l'expérimentatrice qui ne comprend pas ou feint de ne pas comprendre.

Elève 11.

C'est un garçon, né en 1979. Il semble ne pas savoir ce qu'on fait en mathématiques. Il pense ne pas savoir compter de 10 en 10 en reculant à partir de 138 mais peut en réalité le faire sans trop d'erreur. Il peut aussi ajouter 9 avec quelques erreurs qu'il corrige. Il semble se servir de l'aide qu'on lui apporte en lui demandant d'ajouter 10 quand il s'agit de compter de 9 en 9, mais ses réponses sur le problème des bons points nous font penser que la numération n'est vraiment pas disponible, et le classer au niveau 3. Sur le problème, il ne voit vraiment ce qu'il pourrait faire et l'expérimentatrice n'insiste pas.

Elève 12.

C'est aussi un garçon avec un an de retard. On ne peut être sûr que la première activité qu'il cite (trouver le mot qui va avec le dessin) soit bien une activité du cours de mathématiques mais ce qu'il dit ensuite nous laisse penser qu'il sait reconnaître une telle activité. Pour réussir il pense qu'il faut "ne pas mettre n'importe quoi, réfléchir et mettre les trucs qu'il faut". Nous avons déjà interprété cette réponse qu'il complète de cette façon "et quand on a terminé, il faut reprendre sa feuille et on écrit son nom", ce qui montre aussi que c'est une répétition des recommandations de la maîtresse et que l'élève met peut-être sur le même plan le fait de bien réfléchir et de marquer son nom. Il peut compter de 10 en 10 très vite tant qu'on ne franchit pas la centaine, mais pas de 9 en 9. Sur cette tâche, il se saisit difficilement des renseignements fournis par l'expérimentatrice. Il confond les paquets et les objets dans le problème, et ne peut répondre qu'avec beaucoup d'aide.

Elève 13.

Il s'agit d'un garçon né en 1979. Il cite spontanément des activités du cours de mathématiques. Pour être bon en mathématiques, il faut bien apprendre et être sage. Il fait des mathématiques hors de l'école et croit que ça sert dans la vie. Il pense qu'il ne sait pas compter en reculant mais y arrive très bien parce qu'il remarque tout de suite que tous les nombres se terminent par un 8, mais semble ignorer ce qu'est une dizaine et, pour ajouter 9, compte un à un ou pose l'addition dans sa tête. Pour le problème, il pose une question sur le prix et y répond en faisant 10 + 5. Il peut trouver combien acheter de boîtes de chocolat par additions mais confond les objets et les paquets pour formuler sa réponse.

Elève 14.

C'est un garçon à l'âge normal. Il sait reconnaître une leçon de mathématiques. Il montre une maîtrise des nombres et de la numération bien meilleure que tous les autres élèves. Sur le problème, la première phase confuse (on ne comprend pas bien ce qu'il veut dire avec la moitié) montre cependant qu'il a lu le texte avec des questions, sa résolution montre qu'il avait dans la tête les questions attendues. Pour devenir bon en mathématiques (et il sait qu'il l'est), il déclare qu'il faut apprendre ses leçons, dès que la maîtresse le dit et "bien regarder comment ça se passe". On voit qu'il nous fait part de sa propre expérience : "si on apprend bien ses leçons, on sait directement, sans regarder plusieurs fois".

Elève 15.

C'est un garçon né en 1980. Il sait reconnaître une activité de mathématiques et pense que pour être bon, il ne faut pas faire de faute, c'est-à-dire qu'il donne un moyen de constater si on est bon ou non. Dans la liste, il choisit apprendre ses leçons avant écouter la maîtresse. Sur le calcul, il donne le nombre d'unités et de dizaines de 75 mais ne s'en sert apparemment pas : il ne peut pas compter oralement mais le fait très vite quand je lui permets d'écrire les nombres parce qu'il fait en fait l'opération dans sa tête : +0, +1. Pour ajouter 9, il ne peut pas et compte sur ses doigts dans sa tête. Le fait de connaître le résultat de 58+10 ne l'aide pas pour trouver celui de 58+9. Pour lui, un problème, c'est quelque chose où il y a des nombres et où on peut calculer. Il entend le texte avec une idée a priori (on achète 10 croissants et 5 barres de chocolat) qu'il garde jusqu'au bout, ce qui amène une méprise de l'expérimentatrice : elle pense qu'il a répondu 5 à sa question "combien faut-il acheter de boîtes de chocolat...?" alors qu'il pense 5 barres de chocolat avec 20 croissants. La suite de l'entretien montre qu'il ne distingue pas les paquets et les objets.

Elève 16.

C'est une fille née en 1979. C'est la seule avec l'élève 14, à qui nous avons attribué le niveau 1 en numération (malgré ses problèmes en numération orale entre 70 et 100) et A en résolution de problème. Elle ne montre cependant pas le même degré de maîtrise. Elle aime les mathématiques et en fait à la maison (en devançant ce qui se fait en classe). Pour réussir, elle pense qu'il "faut apprendre bien, bien les feuilles que donne la maîtresse". Elle compte vite et bien "en changeant le nombre de dizaines". Elle s'en sert aussi pour ajouter 9, mais plus difficilement, avec quelques difficultés sur le nom des nombres dans les 70 et 80. Elle résout parfaitement le problème des bons points en cherchant spontanément combien il en faudrait encore pour avoir un autre cahier. Sur le problème, elle a une idée a priori : comme beaucoup d'élèves elle pense qu'on a déjà acheté 1 paquet de croissants et une boîte de chocolats et propose une solution en faisant certaines hypothèses sur la répartition. Mais elle ne reste pas bloquée sur ses idées a priori, prend en compte aussitôt les informations qu'on lui donne et résout très vite le problème. Ses longues remarques sur la notion de question montrent que, si elle ne la maîtrise pas encore tout à fait, elle se pose des questions théoriques d'ordre syntaxique. Il serait intéressant de connaître ses résultats en français et de savoir quelle classe cette élève a redoublée, et pour quelles raisons.

Elève 17.

Il s'agit d'une fille à l'âge normal. On ne peut pas affirmer qu'elle sait reconnaître une leçon de mathématiques autrement que parce que la maîtresse le dit. Elle peut cependant citer des exemples quand on lui a parlé d'opérations. Pour réussir, elle pense qu'il faut travailler en écoutant la maîtresse. Elle demande parfois à ses frère et sœur de l'aider mais semble ne pas apprécier que la maîtresse le fasse. C'est une élève pour qui il semble y avoir contradiction entre les performances sur les nombres et celles sur la résolution de problèmes. Elle a des difficultés avec la numération orale : quand je lui dis "soixante-douze", elle écrit 612, puis quand elle compte à partir de 42, 52, 62, elle dit "trente-vingt-deux" qu'elle écrit 72 et relit "quarante-vingt-deux", elle a ensuite des problèmes avec le nom de 82 puis confond 102 et 202. Pour compter de 9 en 9, elle compte un à un en sautant le nom de la dizaine. Elle ne peut pas se servir de la numération pour compter, même quand on lui demande de faire un dessin : après avoir entouré des dizaines sur une collection de croix, elle doit tout recompter un à un pour donner le cardinal de la collection. Sur le problème, elle a l'idée qu'il faudra faire une opération "... et puis ça fera 15" mais elle s'adapte tout de suite à la question posée peut-être parce qu'elle a déjà structuré l'énoncé en répondant à ses premières question implicites : il n'y a pas 25 croissants. La taille des nombres en jeu fait que ses difficultés numériques n'interviennent pas. Cette élève semble donc avoir une lecture du problème de mathématiques et une écoute des questions du maître suffisamment proches de ce que l'on peut attendre, mais des difficultés spécifiques dans le domaine numérique. Une autre hypothèse est que, pour ce problème, elle le résout dans le domaine pratique parce que, dès le début son problème est bien de donner un croissant et une barre de chocolat à chaque enfant.

Elève 18.

C'est une fille à l'âge normal. Elle reconnaît les mathématiques à la feuille que donne la maîtresse et aux "numéros". Elle trouve également important de travailler chez elle et d'écouter la maîtresse. Elle compte lentement en posant l'opération dans sa tête puis en comptant mentalement sur ses doigts. Elle peut enlever une dizaine à 138 quand on le lui suggère, mais, à 108, elle ne peut plus, même quand on le lui explique. Pour le problème, elle pense qu'on fait une opération entre 10 et 25, puis entre 10, 5 et 25. Elle confond les paquets et les objets et ne peut pas répondre à des questions de simple restitution des données, et semble utiliser des critères d'ordre de grandeur ou de vraisemblance pour répondre aux autres questions à moins qu'il ne s'agisse d'autant d'erreurs de calcul.

Elève 19.

C'est un garçon à l'âge normal. Il sait reconnaître les activités mathématiques et semble s'engager lui-même dans son apprentissage : pour réussir, il donne des expressions concrètes qui semblent traduire sa propre expérience plus que des recommandations générales entendues : on apprend dans le classeur et "quand t'as fini de faire quelque chose et que les autres ont pas fini, tu peux prendre ton classeur et tu révises". Même si c'est un conseil que donne la maîtresse, ce qui explique le "tu", cet élève semble le reprendre à son compte. De plus, il commence par chercher lui-même avant de demander et paraît avoir un projet : "il faut faire des mathématiques pour passer en 6ème", il veut devenir pharmacien et il sait qu'il lui faut faire des mathématiques pour y arriver. Il ne sait pas trop utiliser les dizaines et semble les confondre avec les unités au début, mais il finit par se débrouiller avec l'exemple des pièces de 10F auquel il a recours de lui-même. Il a une reconnaissance de forme du problème "des calculs où on met des phrases" et il peut répondre correctement au problème posé avec peu d'aide. Ses grandes hésitations du début nous l'ont fait classer en niveau 3 en numération, la suite aurait dû nous le faire classer en niveau 2, ce qui enlevait toute contradiction avec la résolution de problème et correspondant dans les deux cas à l'engagement de la responsabilité de l'élève manifesté dans les questions générales.

Elève 20.

C'est un garçon qui a un an de retard. Il sait reconnaître une activité mathématique et pense que le plus important pour réussir est de bien apprendre ses leçons. Il compte facilement de 10 en 10 à partir de 57 (il repère sans doute sans le dire qu'on garde toujours le 7) et peut commencer à retirer une dizaine à partir de 138 mais il bloque à 108 et ne peut compter que un à un. Pour ajouter 9, il pose l'opération mentalement. Il ne peut pas poser de question sur le problème mais résout celle qu'on lui propose assez facilement. Comme pour quelques autres élèves, une maîtrise faible de la numération (dans ce cas d'ailleurs limite entre un niveau 2 et un niveau 3) n'a pas empêché la résolution parce que l'élève se représente bien les paquets et les objets.

Elève 21

C'est un garçon né en 1980. Il sait ce qu'on fait en mathématiques bien qu'il déclare le contraire. Pour réussir, il met à égalité "bien écouter et apprendre ses leçons". Il compte bien de 10 en 10, dans les deux sens, sans pouvoir expliquer ce qu'il fait. Pour le comptage de 9 en 9, il réussit assez facilement aussi et peut seulement dire qu'il a reculé. On peut donc penser qu'il utilise la numération mais de façon totalement implicite. Il accepte mon explication "tu as ajouté une dizaine et enlevé une unité". Il semble que pour lui les problèmes, du moins ceux où on achète des choses doivent parler d'argent : "c'est un problème parce qu'on achète du chocolat des croissants, on donne les prix", puis après relecture du texte "c'est pas un problème parce qu'on donne pas l'argent qu'il fallait". Pour que ça soit un problème "on m'explique, on me donne l'argent, il faudrait que ça soit donné". Quand on lui demande combien acheter de boîtes de chocolat, il utilise une procédure adéquate : compter de 5 en 5 jusqu'à 25 mais ne conclut pas et il faut l'aider à reprendre son calcul en lui posant des questions sur ce qui se passe pour qu'il puisse répondre. De la même façon, il utilise une procédure correcte pour traiter le problème des bons points mais n'arrive pas à l'exploiter pour donner la réponse juste.

2.4. Analyse au niveau de la classe.

Nous avons vu que les élèves de cette classe pensent que le maître dit qu'il faut bien travailler, bien écouter, bien lire les consignes, trouver des choses, relire ce qu'on a fait, et aussi ne pas regarder la télé et rester calme et sage.

Si on regarde l'entretien avec ce maître, les objectifs qu'il met en avant sont l'acquisition de connaissances de base, donner aux élèves des outils et les moyens de les utiliser, et surtout l'acquisition de l'autonomie. Ce qui lui paraît le plus important pour la réussite d'un élève c'est le soutien de la famille, la cohésion avec l'école. Il donne peu de travail à la maison en mathématiques mais encourage les élèves à faire du travail supplémentaire facultatif et privilégie les exercices en classe. Il pense qu'en classe les élèves doivent avoir une attitude de recherche, de réflexion et c'est ce qu'il valorise. Il est important aussi pour les élèves de s'aider les uns les autres, par exemple dans le travail en groupes qu'il favorise. Ils doivent aussi ne pas se décourager, relire, revoir les choses autrement.

Il est clair que, sur l'ensemble des élèves, on a une image de ce que dit l'enseignant qui coïncide assez bien avec ce qu'il dit lui-même mais que certains enfants n'intègrent que les recommandations de surface comme "être sage, bien écouter", alors que d'autres en retirent des choses plus fondamentales au niveau de leur propre responsabilité, voire de l'attitude de recherche.

La cohérence avec ce qui se passe dans la famille a sans doute un rôle dans cette différence, mais d'autres facteurs interviennent aussi, par exemple l'attitude du maître qui est peut-être différente suivant les élèves, notamment quand ils sont considérés comme des bons élèves ou comme des élèves en difficulté. Voici quelques exemples extraits de la séquence enregistrée : "vous avez mis ensemble, avec quelques difficultés pour le groupe 6 et pour le groupe 3, hein,...", et un peu plus tard "Je constate que, comme tout à l'heure quand on a pris les cubes, ce sont les deux mêmes groupes qui cafouillent. C'est quand même curieux. Tout à l'heure, vous aviez des cubes de couleur, vous n'y arriviez pas et maintenant, vous avez des abaques et ces deux groupes n'y arrivent toujours pas. Qu'est-ce qui se passe ?" ... "on attend que ce groupe ait terminé de faire les échanges". ... plus tard "très bien, eh ben, vous voyez, vous y arrivez". Un peu après "le groupe 6, je ne suis pas satisfait. Ce matin comme cet après-midi, vous faites n'importe quoi. Tâchez de comprendre une bonne fois pour toutes."... puis ... "puisque le groupe 6 ne comprend pas, est-ce que vous avez repéré que le premier abaque représente 97 et le second 68 ? oui ? alors"... et après les explications données par des élèves qui ont compris et reprises en chœur, "on va appeler quelqu'un du groupe qui n'a pas compris, (il s'agit de E5), allez vite, vite". Un autre élève renchérit "dépêche-toi, on perd du temps". E12 est appelé pour aider E5. Elle termine et le maître demande "est-ce que tu as compris cette fois ? il faudrait être sûre, hein ?"

Ce genre de petite histoire se produit tous les jours dans la plupart des classes parce que le maître est devant des choix à faire dans l'urgence : des élèves ne produisent pas ce qui est attendu, il faut pourtant que la leçon avance, que le savoir de la classe progresse. Il peut négocier à la baisse avec certains et faire comme s'ils avaient réussi en leur faisant répéter ce qu'ont fait les autres ou attirer leur attention sur l'effort qu'ils ont à faire et dans ce cas prendre le risque de les décourager. Leur donner du temps supplémentaire et une nouvelle chance n'est acceptable que dans certaines limites, y compris par les autres élèves de la classe.

L'enseignant de cette classe choisit de ne pas négocier à la baisse, au risque de bousculer certains élèves. Il obtient ainsi que tous aient une certaine connaissance, au moins formelle, de la numération.

3. Les mathématiques vues par des élèves de CM.

Nous rendons compte maintenant des réponses des élèves de cours moyen au questionnaire écrit qui a été décrit dans la première partie de ce chapitre et qui comportait le même type de questions que celles qui ont servi de guide à l'entretien pour les CE1. Rappelons que nous avons recueilli, en mars 88, les réponses de deux classes à ce questionnaire écrit.

L'une des classes est un CM1 de 30 élèves d'une école qui recrute dans un milieu plutôt favorisé. L'enseignant de cette classe est l'instituteur A des entretiens, qui était aussi en 83-84 le maître du CM2A où ont été faites les observations rapportées au chapitre 3A. L'autre classe est un CM2 de l'école où nous avons fait des observations de 83 à 85, qui recrute surtout en milieu défavorisé. Elle a pour enseignant l'instituteur B des entretiens, qui était aussi le maître du CM2B de 83-84 et du CM2 de 84-85. Nous avons pour cette classe les réponses de 17 élèves sur 18.

Nous suivrons le même plan que pour les entretiens avec les CE1 en donnant d'abord des résultats question par question, avant de mettre en relation les réponses à diverses questions et de tenter des interprétations au niveau des élèves et au niveau des classes. Les réponses ont été données par écrit, nous n'avons donc pas les mêmes précisions sur les procédures utilisées par les élèves, nous n'avons pas non plus leurs réponses spontanées aux questions d'ordre général. En revanche nous pouvons faire la comparaison entre les deux classes.

3.1. Dépouillement par question.

Question 1. Numération, calcul mental.

Etant donné le mode de questionnement, nous n'avons pas la même précision sur les réponses des élèves : nous ne savons pas s'ils comptent rapidement ou non, s'ils pourraient ou non saisir des indications qu'on leur donnerait sur la numération... Nous pouvons seulement faire une analyse en termes de nombre d'erreurs, types des erreurs et recours explicite aux dizaines ou à une règle de calcul. Nous allons décrire les résultats des deux classes, les comparer et déterminer des niveaux sur le calcul qui serviront pour l'analyse par élève.

Comptage de 10 en 10 en reculant.

Dans le **CM1**, 28 élèves sur 30 ont compté correctement de 10 en 10 en reculant de 378 à 8. Quelques-uns s'arrêtent avant parce qu'ils écrivent gros et qu'il n'y a plus de place sur la feuille, nous n'en avons pas tenu compte.
Les erreurs sont les suivantes :
un élève (E8) enlève 11 à chaque franchissement de centaine : 208-197 puis 107-96.
un autre (E11) fait 2 erreurs : il passe de 208 à 192 puis après 2 "passe aux nombres à virgule", c'est-à-dire qu'il enlève 10 centièmes et continue ainsi 2 - 1,90 - 0,80 - 0,70 - 0,60 - 0,50 - 0,40 - 0,30 - 0,20 - 0,10 - 0,00. Il explique sa procédure "j'ai fait -10 -10 etc... je suis arrivé à 12 j'ai fait -10 = 2, 2 -10 = impossible, alors je me suis introduit dans les nombres à virgule."

En ce qui concerne les procédures,
- 14 élèves déclarent qu'ils enlèvent une dizaine (dont l'élève E8 qui enlève aussi une unité dans le cas du franchissement de la centaine mais ne le dit pas, il pense sans doute aussi enlever une dizaine dans ce cas). L'un d'eux précise qu'il garde les unités.
- 11 élèves déclarent qu'ils enlèvent 10. Ces réponses peuvent en fait recouvrir des procédures différentes. Elles peuvent par exemple avoir la même signification que "enlever une dizaine" : deux élèves disent à la fois qu'ils enlèvent 10 et qu'ils enlèvent une dizaine. Elles peuvent aussi signifier que l'élève pose l'opération dans sa tête : c'est peut-être le cas de E27 qui fait cette réponse et, pour expliquer, pose en colonne 278 - 10. Elles peuvent aussi, pour les 8 autres, faire référence à une autre pratique.
- 1 élève ajoute 10 "je fais 268+10 = 278 ou 8+10 = 18 etc... j'additionne"
- 1 élève déclare qu'il fait -8 -2
- 1 élève pose l'opération dans sa tête "il suffit de s'imaginer dans sa tête une opération posée et que tu effectues"
- 1 élève enlève sans doute une dizaine mais dit "il suffit de faire une soustraction et on sait que après 7 on a 6 etc..."
- 1 élève dit qu'il change les dizaines "j'ai enlevé 10 à chaque fois et je sais que le nombre se terminera toujours par 8 et que l'on sait aussi que les dizaines changent toujours.
- 2 élèves ne donnent pas d'explication.
Finalement 16 élèves au moins utilisent les dizaines et un le passage par la dizaine intermédiaire.

Dans le **CM2**, nous avons 13 réponses justes auxquelles nous pouvons ajouter une 14ème (E6 oublie seulement 18). Pour les autres,
- un élève s'arrête à 118
- un élève saute de 218 à 108
- un élève écrit 10-20- ...(il continue de 10 en 10)... 270-280-2 et explique "j'ai compté de 10 en 10 jusque 280 puis j'ai fait 280 - 278 = 2".

Pour les explications,
- 2 élèves déclarent enlever une dizaine
- 1 élève fait sans doute la même chose mais dit "c'est comme 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3... sauf que il faut rajouter un 8".
- 1 autre a la même idée mais dit "je fais entre 278 et 268 il y a 10 écarts, alors pour les autres c'est facile, on fait entre 268 et 258 il y a 10 écarts et on fait comme si c'était 270 + 10 = 260 sauf qu'on rajoute 8 - 2 = 268.

- 8 élèves déclarent simplement qu'ils enlèvent 10
- 1 élève déclare qu'il ajoute 10 (avec une réponse correcte)
- 2 élèves ne donnent aucune justification.
- 1 élève explique autre chose "je divise 278 par 10 pour vérifier 278 : 10 = 8.
- nous avons déjà rapporté l'explication de l'élève E1 qui compte de 10 en 10 en progressant à partir de 0.

Donc 4 élèves au moins utilisent les dizaines.

Comptage de 9 en 9

Dans le **CM1**, 25 élèves donnent des réponses entèrement correctes jusqu'à 253. Un élève s'arrête à 226, un élève fait une seule erreur : passage de 136 à 144, il n'avait pas d'erreur à la première question. 27 élèves ne font donc aucune erreur ou une erreur.

Les 3 autres élèves font plusieurs erreurs :

E11 fait une erreur au franchissement de centaine : 190-209, et ajoute deux fois 11 au lieu de 9 : 227-238-249-258

E16 fait 2 fois la même erreur : 154-162 et 234-242, sans doute dit-il 4+9 =12

E30 commence à 0 au lieu de commencer à 127 et passe de 189 à 208.

En ce qui concerne les explications,

12 élèves disent qu'ils ajoutent une dizaine et enlèvent une unité et 5 élèves disent qu'ils font +10 -1, dont 1 donne les 2 explications, ce qui fait 16 élèves qui utilisent les dizaines. Un élève remarque aussi les unités énumérées à l'envers.

10 élèves disent simplement qu'ils font +9. L'un d'eux remarque qu'on a la table des 9 de 136 à 190.

L'élève E30, déjà cité ci-dessus, explique "j'enlève tout le temps une unité et quand c'est 0, je recommence à 9, et tout le reste je rajoute tout le temps 1.

Pour le **CM2**, 7 élèves sur 17 ont une réponse entièrement correcte. Un élève s'arrête à 226, un autre à 190. Une élève fait une seule erreur qui est en fait une conséquence d'une erreur corrigée : elle avait écrit 199-218 etc... elle a corrigé 208-217-226 et a laissé la suite 245-254-263-272. Trois autres élèves font une seule erreur : 199-218 ; 217-236 ; 235-246. Donc 13 élèves ont fait au plus une erreur.

Un élève ne répond pas à la question posée et compte de 9 en 9 de 0 à 153 (il avait aussi commencé à 0 pour la première question).

Les 3 autres élèves ont fait plusieurs erreurs :

E2 fait ... 145-153-160-169-179-188-197-206-212.

E4 passe de 163 à 176 puis de 239 à 241.

E14 passe de 136 à 142, a effacé ce qui vient après 169 mais on peut encore lire 178-189-198-209-218 et le dernier nombre 258. Elle semble avoir fait une fois +9, une fois +11.

Au niveau des explications,

6 élèves n'en donnent aucune.

1 élève dit qu'il ajoute une dizaine et retire une unité (il est parmi ceux qui ont fait une seule erreur), et 2 autres déclarent faire +10 -1 (1 n'a pas fait d'erreur et 1 a fait une erreur), soit 3 élèves qui se réfèrent explicitement à 10.

2 élèves disent simplement qu'ils ajoutent 9.

1 élève utilise de temps en temps le passage à la dizaine "je compte sur mes doigts pour trouver le résultat ou alors je fais 127 + 3 = 130 + 6 = 136 et ça va encore plus vite et je trouve encore le résultat".

Les 4 autres élèves font de vagues références à la numération ou à l'ordre des chiffres :

E10 : "Pour trouver la solutions, nous voyons que les unités perse de nombre en nombre et que les dixienes monte de nombre en nombre" (sic).

E13 : "Je comptais les unités en partant de 6 jusqu'à 3".

E15 : "L'unité recule, la dizaine aussi et la centaine avance au bout de 10 fois qu'on s'en est servi".

E17 : "Comme je sais que 9 + 6 font 15, alors je m'aide à partir de ça, et je change les unités les dixièmes, les centièmes."

Bilan sur cette question

Au **CM1**, 25 élèves sur 30 ne font aucune erreur sur les deux questions.

4 autres élèves ne font qu'une erreur, éventuellement répétée :

E8 enlève -11 au lieu de -10 à chaque franchissement de centaine pour la première question.

E16 fait 4+9 =12 à la deuxième question.

E21 ne fait qu'une erreur : 136-144 à la deuxième question

E30 fait 188-209 et commence à 0 au lieu de 127 à la deuxième question.

Seul un élève, E11, fait des erreurs aux deux questions : passage de 208 à 192 et "introduction dans les nombres à virgule" à la première question, passage de 190 à 209 puis 227-238-249 à la deuxième question.
Finalement 29 élèves sur 30 semblent utiliser assez correctement la numération dans une tâche de calcul mental de ce type. C'est confirmé par les explications de 19 d'entre eux à au moins une des questions (dont 14 pour les deux questions). Un élève ne donne aucune explication. Les 9 autres se contentent du -10 ou +9 ou d'une explication un peu vague.

Au **CM2**, 7 élèves sur 17 ne font aucune erreur aux deux questions, 4 élèves ne font qu'une erreur à la deuxième question et 1 élève traite partiellement chacune des questions (jusqu'à 118 à la 1ère question et jusqu'à 226 à la 2ème).
Un élève oublie 18 à la première question et s'arrête à 190 à la 2ème.
Deux élèves font correctement la 1ère question mais font 2 erreurs ou plus à la 2ème.
Un élève ne comprend pas les consignes et commence à 0 à chaque fois.
Un élève fait des erreurs aux deux questions : passage de 218 à 108 pour la 1ère et 136-142 à la 2ème avec ensuite d'autres erreurs mais effacées.
Finalement 13 élèves sur 17 semblent utiliser assez correctement la numération dans ce genre de travail, du moins si la tâche n'est pas trop longue pour certains.
Pour les explications, 3 élèves font référence à la numération à une au moins des questions, deux le font clairement pour les 2 questions, mais E12 fait une erreur dans le comptage par 9. 8 élèves se contentent de -10 ou +9. Un élève ne donne d'explication à aucune des questions. Pour les autres, il y a une explication d'autre chose ou une explication très ambigüe.

Si on compare les deux classes, on constate une grande différence au niveau des réponses sans aucune erreur (25 sur 30 et 7 sur 17 respectivement) et au niveau des explications (19 élèves sur 29 font une allusion claire à la numération au CM1 contre 3 sur 17 au CM2). Cependant, les différences au niveau des performances ne sont pas si grandes qu'il y paraît : il y a en CM2 un grand nombre d'élèves qui font peu d'erreurs ce qui fait que, dans l'une ou l'autre classe, très peu d'élèves semblent réellement en difficulté sur cette question. En revanche, la différence de maîtrise de la numération entre les deux classes semble importante (réponses sans erreur et niveau d'explication) ainsi que sans doute la différence de concentration.

Nous ne pouvons adopter les mêmes catégories que pour le CE1, à la fois parce qu'en CE1 la numération est en cours d'acquisition et parce que le mode de questionnement ne nous donne pas le même détail sur les procédures. En tenant compte à la fois de la performance et du niveau d'explication, on peut déterminer des catégories qui nous serviront ensuite pour l'analyse par élève. On peut attendre au cours moyen une utilisation explicite de la numération et un calcul sans erreur, nous avons donc déterminé 4 grands niveaux avec des subdivisions :
A : aucune erreur sur les deux exercices, référence claire aux dizaines les 2 fois ou au moins la deuxième avec une explication du type "-10" la première fois.
A' même chose mais avec une ou deux erreurs de calcul ou travail non terminé.
B : aucune erreur sur les deux exercices, référence aux dizaines une fois seulement ou référence vague aux dizaines.
B' même chose mais avec une ou deux erreurs de calcul ou travail non terminé.
C : aucune erreur sur les deux exercices, pas d'explication ou très floues sans référence aux dizaines (exemple -10, +9).
C' : même chose mais avec une ou deux erreurs de calcul.
D : plus de 2 erreurs de calcul.
E : non respect de la consigne.

En CM1, nous avons 13 A, 2 A', 5 B, 6 C, 2 C' et 1 D, soit 15 au premier niveau (A ou A'), 5 au 2ème (B ou B'), 8 au 3ème (C ou C') et 1 au 4ème (D ou E). En CM2, nous avons 1 A, 1 A', 3 B, 3 B', 5 C, 2 C', 1 D, 1 E, soit 2 au premier niveau, 6 au 2ème, 7 au 3ème et 2 au 4ème. En fait seuls les élèves au 4ème niveau semblent réellement en difficulté en calcul, ils sont très minoritaires dans les deux classes, mais on trouve une nette différence dans le degré d'explication.

Question 2 Problèmes

Nous regarderons d'abord, pour chacune des classes, la résolution de la question posée (nombre de filets d'oranges), avant d'analyser les problèmes proposés par les élèves suivant 3 critères :
- est-il en rapport avec l'histoire proposée ?

- est-il cohérent du point de vue logique? y-a-t-il des questions? peut-on y répondre?
- est-il conforme au contrat habituel ? Sinon que révèle-t-il sur le contrat didactique ?

2.1. Filets d'oranges

Au niveau du résultat, pour le **CM1**

- 13 élèves donnent la réponse juste (18 filets)
- 3 élèves répondent 17 filets et il reste 3
- 1 élève (E12) trouve 87 élèves (il a oublié le CP) et 15 filets, ce qui est correct pour 87 élèves
- 1 élève (E30) trouve 115 élèves et répond 19 filets (reste 1)
- 1 élève (E8) résout correctement classe par classe et trouve qu'il lui restera donc 9 oranges.
- 1 élève (E17) répond 30 filets et justifie 6x30 = 180, il y a 105 élèves, il y aura assez d'oranges .
- 1 élève (E11) répond 11 en écrivant 6x = 105 puis 10x = 110 puis 1x = 11.
- 1 élève (E18) répond 15 filets sans justification
- 1 élève répond "il faut acheter 105 oranges, en tout, ça fait à peu près 76 filets".
- 1 élève (E3) répond 630 filets sans explication (or 630 = 6x105)
- 1 élève (E21) répond "on pourra donner au moins 36 oranges
- 1 élève (E24) cherche seulement le nombre total d'élèves
- 1 élève répond 255 filets (il calcule 18+30+53+46+57 et trouve 255 ; par ailleurs il fait 18+23+16+21+27 = 102)
- 3 élèves ne répondent pas du tout.

Malgré ma demande, la moitié des élèves n'ont pas fait les opérations sur la feuille, surtout dans le cas d'une réponse juste, mais beaucoup indiquent le nombre d'oranges en trop.

Finalement 19 élèves ont une démarche correcte avec une réponse plausible. Un élève donne une réponse hors contrat mais correcte pour la question posée ("sais-tu combien il faut acheter de filets d'oranges pour être sûr de pouvoir donner au moins une orange à chaque enfant ?", il répond 30 filets, ce qui est plus que suffisant !).
Trois élèves donnent des estimations ou des réponses fausses qui correspondent cependant à une représentation correcte de la question posée
Sept élèves ne répondent pas ou à peine ou ont une démarche vraiment inadéquate.

En **CM2**

- 6 élèves donnent la réponse correcte 18 filets. Parmi eux, 1 élève a seulement écrit 6x18 = 108, 5 élèves ont posé la division dont 2 avec comme résultat 17,5. L'un d'eux dit qu'il restera 1 orange. Les 3 autres élèves posent la division euclidienne. L'un d'eux effectue correctement la division et les deux opérations 6x17 = 102 et 102 + 6 = 108 avant de donner sa réponse.
- 1 élève répond "Dans l'école il y a 105 enfants. Il faut acheter 17 filets pour les enfants et 18 avec les moniteurs plus 2 oranges (il a posé la division 110 : 6 a trouvé 18 comme quotient et 2 comme reste. La présence de correcteur indique qu'il avait dû d'abord faire 105 : 6.
- 1 élève donne la réponse 17 après avoir posé la division euclidienne.
- 2 élèves répondent 17 filets et 5 oranges après avoir trouvé 17,5 comme quotient dans la division.
- 2 élèves font la même division mais ne donnent pas de réponse explicite au problème.
- 1 élève trouve 106 comme total, pose 106 : 6, arrête la division à 17,6 et répond 17,6.
- 2 élèves posent 105 : 6 mais ne savent pas faire la division. L'un d'eux trouve 10 comme quotient et ne donne pas de réponse, l'autre trouve 184 et répond 184 filets. Nous reproduisons ci-dessous les divisions posées avec dans les 2 cas erreur d'ordre de grandeur pour le 6 et décision différente pour faire quand même une soustraction impossible.

```
105  |6__          105 |6____
-60   10           6    184
 005               50
 005               48
 000                25
                    24
                    01
```

- 1 élève fait 105x6, trouve 130 et donne cette réponse.
- 1 élève a une démarche étonnante : 5x6 = 35   105+35 = 140 et 140 : 6 = 233,0 (il a effectué correctement la division en répétant 3 fois le cycle 20 : 6, quotient 3, reste 2 mais écrit 233,0 à la place du quotient.

Finalement 15 élèves sur 17 ont eu au départ une démarche correcte jusqu'à la reconnaissance de la division à effectuer mais moins de la moitié d'entre eux fournissent une réponse finale correcte, parce qu'ils ne maîtrisent pas soit la technique de division, soit les nombres décimaux, ou qu'ils perdent de vue le sens de la question posée.

Nous avons, pour cette question aussi, défini des catégories de traitement de ce problème :
A : résultat juste et justifié

A' : réponse "il faut 17 filets plus 3 oranges"
A" : division dans les décimaux, et à partir du quotient 17,5, réponse 17 filets plus 5 oranges.
B : résultat juste non justifié ("il faut 18 filets et il reste 3 oranges" est considéré comme une réponse justifiée, alors que "il faut 18 filets" est considéré comme une réponse juste non justifiée).
B' : même chose avec erreur sur le nombre d'élèves (1 élève dans ce cas, il a oublié le CP).
C : démarche juste, résultat faux (exemple 17 filets) ou absence de résultat, et C pour les élèves qui ne savent pas faire les divisions.
C' démarche juste incomplète : résultat suffisant, 1 cas : "avec 30 filets on peut donner une orange à tous les enfants".
D : démarche fausse
E : calcul du nombre d'enfants et arrêt.
N : non réponse totale.

En CM1, nous avons 6 A, 1 A', 7 B, 1 B', 4 C, 1 C', 6 D, 2 E, 2 N. En CM2, 6 A, 1 A', 2 A", 4 C, 2 C, 2 D. Pour les CM2, nous avons classé A l'élève qui répond 18 filets, reste 1 orange après avoir trouvé 17,5 comme résultat de sa division et A" ceux qui avec le même résultat ont répondu 17 filets et 5 oranges : ils font la même erreur sur l'interprétation du nombre décimal mais le premier sait ce qu'est une réponse au problème contrairement aux seconds.

On peut remarquer qu'il n'y a pas de B en CM2 parce que les élèves ont tous fait figurer toutes leurs opérations sur la feuille, alors que ce n'est pas le cas au CM1. Ceci nous incite à ne pas faire de distinction dans l'analyse entre les A et les B. Peut-être même certains élèves ont-ils trouvé le résultat mentalement. En revanche, en CM2, il y a relativement beaucoup de A', A" et C. Ce sont des élèves qui, tout en sachant mettre en œuvre la démarche correcte sont incapables de fournir le résultat juste, soit par manque de maîtrise de la technique de division (2 des 6 C du CM2), soit par incapacité à interpréter le résultat dans le problème. Au total, 7 élèves sur 17 au CM2 effectuent toutes les opérations correctement mais ne donnent pas la réponse attendue au problème. C'est le cas de 4 élèves sur 30 au CM1 (1 A' et 3 C, le 4ème C correspond à une élève qui résout le problème classe par classe, sans tenir compte des restes et trouve donc trop de filets).

Il y a donc davantage d'élèves qui reconnaissent la situation de division au CM2 : c'est le cas des 15 élèves sur 17 (88%) qui ont une démarche correcte. Au CM1, seulement 19 élèves sur 30 (63%) ont une démarche correcte par division ou multiplication. Mais les proportions d'élèves des deux classes qui ont une réponse entièrement correcte sont beaucoup plus proches, avec même un léger avantage pour le CM1 (13 sur 30, soit 43%) sur le CM2 (6 sur 17 soit 35%). Ceci s'explique d'une part par le manque de maîtrise de la division (2 sur 17) mais surtout par la mauvaise compréhension de ce qu'est une réponse au problème : 4 élèves sur 30 (13%) au CM1 et 7 élèves sur 17 (41%) au CM2 ont fait une procédure de résolution complète et correcte sans donner la réponse attendue.

2.2. Problèmes proposés par les élèves.

Les élèves de CM2 n'ont pas répondu à cette question, par manque de temps, nous a dit le maître. Nous analyserons donc les réponses des CM1. Cinq élèves n'ont pas abordé ce point. En fait, l'un d'eux, E1, demande seulement "combien y-a-t-il d'élèves dans l'école ?" Il y répond. Il n'a pas traité le problème des oranges, nous avons donc considéré qu'il s'agissait d'un début de solution à ce problème et que cet élève n'avait pas répondu à la 2ème question. Un autre élève calque le problème donné en remplaçant les filets d'oranges par des filets de pommes. Restent les réponses de 24 élèves.

Contexte choisi

Un peu plus de la moitié de ces élèves (13) utilisent, comme on le leur demandait le contexte proposé et posent une ou deux questions à propos de ce goûter. Cinq d'entre eux posent des questions similaires à celle qui était proposée, à propos du chocolat ou des croissants, souvent les deux. Deux élèves ajoutent des données à l'histoire : l'un demande "combien faudrait-il de tablettes de chocolat qui contiennent 10 carrés ?" et l'autre : "les oranges sont à 15 F le paquet, combien coûteront les oranges ?"
Mais presque autant inventent un problème sur une tout autre histoire (12). Un élève fait les deux (nous l'avons compté de chaque côté) : il répond aux questions attendues sur le chocolat et les croissants et invente un autre problème.
Ce non respect de la consigne donnée dans le questionnaire nous fait penser que les élèves de cette classe ont sans doute l'habitude d'inventer des textes de problèmes.

Cohérence, logique du problème.

Tous les problèmes proposés sont cohérents et, pour la quasi totalité d'entre eux, les données sont suffisantes pour qu'on puisse répondre à la question posée. Quelques- uns comportent des implicites qui se révèlent à travers les solutions fournies. La grande majorité des élèves fournissent une solution correcte au problème. Un élève fait une erreur de calcul, un autre fait la même erreur que pour les filets d'oranges (quotient par défaut de la division euclidienne au lieu du quotient par excès). Trois élèves ne répondent pas aux questions posées. Ils avaient tous les trois posé des questions sur le contexte proposé.

Conformité au contrat habituel sur le problème

-formulation

La plupart de problèmes ont une formulation qui ressemble à celle des problèmes de mathématiques qu'on a l'habitude de traiter à l'école. Nous avons déjà dit que dans presque tous les cas, il y a suffisamment de données pour qu'on puisse trouver la réponse à la question posée. Une seule exception : E 18 demande "comment s'appelle le maître ou la maîtresse du CP ?" Elle pose 2 autres questions plus classiques (combien faut-il acheter de tablettes ? Combien y-a-t-il de classes ?) et ne fournit aucune réponse. En ce qui concerne les filets d'oranges, elle avait répondu "il faut acheter 15 sachets d'oranges" sans donner aucune argumentation ni poser aucune opération. Il semble que cette élève ait considéré ce travail comme un jeu de devinette et qu'elle ait continué à jouer ce jeu. Peut-être est-ce ce qu'elle a l'habitude de faire face à un problème de mathématiques, nous ne pouvons en être sûre.
Les autres élèves qui ne répondent pas aux questions qu'ils posent respectent la forme des problèmes de mathématiques, même si la formulation en français n'est pas parfaite :

E19 : Combien de croissants ?	Combien en tout il y a d'élèves ?
Combien de tablettes de chocolat ?	CE2 + CM1 ? CE1 + CP ?

E20 : Pour que tout le monde ait 10 croissants, combien de sachets ? Et si les CM2 ne venaient pas ?

- type de réponse attendue

La plupart des problèmes inventés par les élèves appellent une réponse numérique, obtenue par le résultat d'une opération le plus souvent (14 cas) ou qui se déduit du résultat d'une opération, comme la question du nombre de filets d'oranges (6 cas qui posent tous une question du même type).

Cependant 4 élèves posent une question d'un autre type, qui appelle une réponse par oui ou par non, souvent après comparaison. Nous avons donné, parmi les exemples reproduits infra, le texte de ces problèmes (E10, E11, E14, E15). Il faut y ajouter E8 qui n'a pas posé de question mais implicitement pose une question de ce type. Tous ces élèves, sauf E15, ont inventé un problème dans un autre contexte.

Les deux types de problèmes sont habituellement proposés aux élèves. Ceux qui appellent une réponse numérique sont généralement les plus fréquents.

Complexité du problème proposé.

La complexité des problèmes proposés peut se repérer à 2 indices : le nombre d'opérations nécessaires pour répondre à la question posée et le nombre de données. Ces critères concernent essentiellement les problèmes entièrement inventés par les enfants, dans un contexte différent. En effet en respectant la règle du jeu proposée, il n'y avait pas de nouvelle donnée à fournir et il y avait plusieurs questions auxquelles on pouvait trouver une réponse en ne faisant qu'une opération. D'ailleurs les élèves qui ont utilisé le contexte proposé ont posé ce type de questions, en en proposant éventuellement plusieurs. Les seules questions qui pouvaient demander plusieurs opérations étaient celles qui considéraient seulement certaines classes. Mais, parmi les 12 élèves qui ont inventé un problème totalement différent, six élèves ont fourni des problèmes relativement complexes : 4 ont posé des questions qui nécessitaient au moins 2 opérations et 4 ont fourni un grand nombre de données (2 ont fait les 2). On verra que les problèmes qui portent sur un grand nombre de données, comportent souvent des implicites. Voici les textes de ces 4 problèmes (Nous rétablissons l'orthographe et la ponctuation pour faciliter la lecture) :

E8 "Il y a 3 enfants dans la famille. Leur mère leur donne 50F chacun : Pierre, Annie et Paul. Ils doivent acheter des gâteaux-apéritif. Ils ont des invités et ils doivent s'arranger pour avoir chacun 2 paquets. Et il doit leur rester au moins 1F.
1 paquet de curli 11F,50
1 paquet de tuc 32F,00
1 paquet de chips 20F,00
1 paquet de chipster 25F,00
1 paquet d'amuse-gueule 30F,00
1 paquet de petites pizzas 15F,00
Annie a pris le paquet de tuc 37F,00 et le paquet de curli 11F,50 = 47F,50.
Paul a pris un paquet de chips 20,00 et un paquet de petites pizzas 15,00 = 35,00.
Pierre a pris un paquet d'amuse-gueule 30F,00 et un paquet de chipster 15F,00 = 45F,00.

Suit une multiplication 3x50 = 150 et une grande addition : 30+ 15 + 37 + 25 + 20 + 15 = 142 et la conclusion : ils ont pu acheter tout ça".

On peut remarquer que l'élève s'est un peu perdue dans ses données et a changé le prix du paquet de chipster, mais de nombreuses ratures dans le choix des prix montrent qu'elles les a modifiés plusieurs fois pour que ce soit possible. Le dernier changement de prix du paquet de chipster s'explique peut-être parce qu'elle voulait que chacun des enfants dépense moins de 50F, ce qui montre le contrôle qu'elle gardait sur le sens du problème mais peut aussi laisser supposer qu'elle ne pense pas aux compensations possibles. C'est d'ailleurs cette élève qui avait résolu le problème des oranges classe par classe. De plus, ce texte ne comporte pas de question, mais il y a une question ouverte implicite : peut-on réaliser toutes ces contraintes.

E11. "Une dame a une ferme, elle a 6 poules, 9 cochons, 7 vaches, 3 lapins, 2 chats, 1 chien. Elle n'a plus de nourriture. Dans un porte-monnaie, il lui reste 300F. Aura-t-elle assez et combien lui restera-t-il d'argent ?" Les prix des denrées sont fournis sur des dessins : pour chat 15F, salade frisée : 39F, croquettes 20F, graines 10F, 3 bottes de foin 115F, pour cochon 33F" "Réponse : 6+9+7+3+2+1 = 28 animaux ; 20 + 10 + 33 + 39 + 15 + 115 = 227. Oui elle aura assez, il lui reste 300F - 227F = 73F"

E14. "Dans un bal, il y a 109 personnes et il y a que 72 chaises. Dans une pièce à côté, il y en a 22 et chez un marchand, il y a 42 chaises qui se vendent par 8. Est-ce qu'il y aura tout juste 109 chaises ? S'il en reste, on a le droit de remettre une chaise, est-ce que ça sera bon ? Oui car on fait 72 + 22 + 8 = 102 + 8 = 110 - 1 = 109.

Ces problèmes complexes comportent souvent des implicites qui sont levés dans la solution dans le sens d'une réduction de la complexité et pour qu'il ne manque pas de donnée pour résoudre. Pour le problème de l'apéritif, doit-on comprendre 2 paquets par personne présente ou 2 paquets pour chacun des 3 enfants ? Dans le deuxième cas, il manquerait une donnée : le nombre d'invités. Dans le problème de la ferme, on ne nous dit pas quelle quantité de nourriture est nécessaire pour chaque animal. La solution fournie opte pour l'achat d'une unité pour chacune des denrées, ce qui n'est pas vraiment conforme au contrat didactique habituel concernant le problème. L'élève le sent bien puisqu'il fournit une réponse à une question qu'il n'a pas posée : le nombre total d'animaux. La solution de l'élève nous montre qu'en fait ce problème ne répond pas au critère de complexité que nous avions retenu : il suffit d'une opération pour répondre à chaque question. Ainsi, pour certains problèmes, les implicites ne nous permettent pas de juger de la complexité à partir du texte seul, il faut aussi tenir compte de la solution proposée. C'est aussi le cas pour le problème suivant :

E3. "Dans un marché, une dame achète (elle avait 70F 50) : 6 oignons à 9F 50, 2 poireaux à 8F, 2 steaks à 4 F. Combien a-t-elle dépensé ? Combien lui reste-t-il ?".

Sa solution est la suivante : 9F50 + 8F + 4F = 21F 50. Elle a dépensé 21F 50. 70F50 - 21F 50 = 49F"

Parmi les problèmes qui nécessitent plusieurs opérations, il y en a encore 2 qui utilisent un contexte différent et un seul construit à partir de l'histoire du goûter :

E7. "Dans un chalet il y a 2545 lits + 5627. Si on en enlève 2831, combien en reste-t-il ?

E28. "Dans une école, on organise une fête. Il faut 6 gâteaux. Il y a 30 élèves qui vont à la fête, sais-tu en combien de parts il faut couper un gâteau ?
Dans une école, il y a une fête. Il y a 218 élèves. Ils n'y vont pas tous. Il y en a 30 + 104 + 45 + 120. On a acheté 218 verres. Combien faudra-t-il en retirer ?"

E2. "Combien faudrait-il de filets d'oranges s'il y a 30 parents en plus ? Combien faudrait-il de tablettes de chocolat qui contiennent 11 carrés ?"

Certains problèmes nécessitent une opération et une comparaison. L'un d'eux est bâti sur l'histoire du goûter, l'autre non. Les voici :

E10. "Des gens vont faire du ski, 52 de l'école L et 18 de l'école N. Le car peut contenir 50 personnes. Est-ce que tout le monde pourra tenir ?"

E15. "Peut-on donner 10 sachets de croissants pour la fête ? Aves 6 tablettes, y aura-t-il assez pour tous les élèves ?" (en fait, il veut dire boîtes de tablettes puisqu'il répond "oui, il y aura 15 chocolats de plus").

Finalement, 9 élèves fournissent un texte de problème relativement complexe, dont 7 dans un contexte différent de celui qui était proposé.

Les autres élèves proposent des problèmes plus simples, mais de complexité comparable à celui qu'on leur avait posé. Deux élèves ne respectent pas ce point du contrat didactique : E18, dont nous avons déjà parlé demandait, en plus du nom du maître, le nombre de classes (réponse fournie dans le texte) et

E29 : "Dans une école, le CP contenant 18 élèves fait un goûter d'anniversaire. Il décide d'acheter 18 tablettes, mais la boîte de chocolats est vendue par tablette de 20. Combien de boîtes faut-il acheter ? 1 boîte car il y a 20 tablettes de chocolat."

Un élève, E9, ne respecte pas le contrat de la tâche proposée : il recopie le même problème en remplaçant "oranges' par "pommes". C'est aussi le cas de l'élève E1 qui demande combien y-a-t-il d'élèves dans l'école ?

Questions "attendues". Contrat pour cette tâche.

Ce questionnaire est proposé en dehors du travail scolaire ordinaire. Les enfants savent que leurs réponses sont destinées à des chercheurs sur l'enseignement des mathématiques. D'ailleurs la deuxième partie du questionnaire n'est pas du tout scolaire. Mais le questionnaire leur est proposé par leur instituteur habituel, donc, en ce qui concerne les questions mathématiques, on peut penser que les habitudes scolaires fonctionnent. Il est vrai que c'est au cours d'un séjour en classe de neige, ce qui explique le choix de certains problèmes inventés par les enfants, mais ne change sans doute pas profondément le contrat didactique à propos du problème de mathématiques.

Ici, on demande d'inventer des problèmes à partir de cette histoire, ce qui est une formule vague. Le contrat habituel sur les problèmes de mathématiques veut qu'à la fin du problème, on se soit servi de toutes les données. On pouvait donc attendre, au sujet du chocolat et des croissants, les questions similaires à celle qui a été posée sur les oranges.

En fait, seuls 3 élèves posent les 2 questions attendues, dont un sous forme ouverte (E15, ses textes sont reproduits ci-dessus). L'un d'eux (E10) répond d'ailleurs à ces deux questions sans les poser, sur le recto de la feuille, sous la solution du problème des oranges et invente un problème dans un autre contexte au verso. Trois élèves posent une seule des 2 questions attendues, et 3 autres en posent une à propos d'une seule des classes. Nous avons déjà parlé de E29 qui pose un problème qui se résout à la lecture.

La formulation vague de la consigne a amené beaucoup d'élèves à l'interpréter en "inventer un problème du même genre", c'est-à-dire comportant beaucoup de données numériques.

Nous avons finalement classé les problèmes des élèves en catégories, en utilisant les critères précédents :
A : problème dans le contexte et complexe, 7 élèves.
A' : problème dans le contexte et simplifié, 4 élèves + E29.
B : problème hors contexte et complexe, 5 élèves.
B' : problème hors contexte et simplifié, 6 élèves + E10 qui en donne aussi un en A.
C : problème hors contrat, 2 élèves + E29.
N : non réponse, 5 élèves.

Mise en relation avec la résolution du problème des oranges

Il y a une liaison assez nette entre le fait de savoir résoudre le problème des oranges et la capacité à inventer un texte de problème. On peut s'en rendre compte en considérant le tableau suivant :

oranges	contexte conservé complexe	contexte conservé simple	autre contexte complexe	autre contexte simple	autres (hors contrat)	non réponse
réponse juste justifiée	E2 E4 E10	E19	E14 E28 E6	E10		
réponse juste non justifiée	E25 E23 E15	E5 E20	E7	E26		E12
démarche juste mauvaise réponse	E22	E30	E8		E9	E17
démarche fausse ou incomplète		(E29)		E3 E11 E21	E18 (E29)	E27
non réponse				E13 E16		E1 E24

Nous avons souligné en traits pleins les élèves qui posaient au moins une des questions attendues, et en pointillé ceux qui en posaient une dans une cadre simplifié (pour une classe). Pour les problèmes posés dans le contexte donné, nous avons appelé complexes les problèmes de même nature que ceux qui étaient proposés et simples les problèmes qui concernaient une seule classe.

Aucun des élèves qui n'avaient pas réussi à mettre en place une démarche correcte pour le problème ne pose de problème complexe et aucun n'en pose dans le contexte proposé, sauf E29 dont nous avons déjà dit que le problème qu'il propose est pratiquement hors contrat par sa facilité (combien de boîtes de chocolat pour le CP ?) Nous avons mentionné cet élève entre parenthèses dans les 2 cases correspondantes. Les problèmes hors contexte proposés par ces élèves ne comportent que des additions ou des soustractions, sauf un problème de E13 qui demande une multiplication par 10, d'ailleurs avec un sens d'addition répétée ("un train a 7 wagons, dans les wagons il y a 10 places. Combien peut-il y avoir de personnes dans le train", problème résolu par son auteur par une multiplication.)

Inversement, les élèves qui donnent une réponse juste et justifiée au problème des oranges, proposent presque tous des problèmes relativement complexes, pour moitié dans le contexte donné. Pour E19, ce n'est pas clair : il pose des problèmes sur 2 classes en disant "combien de croissants, combien de tablettes (voir le texte supra, dans le paragraphe "formulation"), mais certains élèves disent cela pour combien de paquets de croissants, combien de boîtes de tablettes ? Ici, nous ne pouvons pas savoir parce que E19 ne donne pas sa solution. C'est presque la même chose pour les élèves qui donnent une réponse juste sans la justifier, sauf en ce qui concerne E5 et E20 pour les problèmes dans le contexte, et surtout E26.

E5 demande combien il faudra de sachets de croissants pour les CM1. Ce problème a été classé simple parce qu'il porte sur une seule classe et donc des petits nombres. Mais le choix du CM1 nous indique peut-être un problème qui est fortement dans le contrat : on regarde pour sa propre classe.

E20 : "Pour que tout le monde ait 10 croissants, combien de sachets ? Et si les CM2 ne venaient pas ?".

Celui-ci a été classé simple parce qu'il donne un paquet de croissants à chaque enfant, et on peut donc le résoudre uniquement par des additions.

E26 propose les problèmes suivants :

1. "Un maître a besoin d'un paquet de craies par semaine. Combien il lui faut de paquets de craie dans l'année ? Il y a 45-46 semaines dans l'année. (la dernière phrase est peut-être la réponse)
2. Une dame a 2 enfants et il leur 6 feuilles et demie. Combien leur mère doit-elle acheter de feuilles ? Il faut qu'elle achète 13 feuilles."

Ces problèmes, au moins pour le premier, ne respectent pas le contrat habituel des problèmes de mathématiques : il n'y a rien à chercher.

2.3. Qu'apprend-on sur le contrat didactique concernant le problème, à propos de cette tâche ?

La résolution du problème des filets d'oranges nous a montré des différences entre les deux classes. En CM2, il semble que, pour un grand nombre d'élèves (7 sur 17), leur travail, quand ils résolvent un problème, consiste essentiellement à trouver les opérations à faire et à les effectuer. Ils donnent comme réponse le résultat de l'opération sans s'interroger sur le sens qu'il a dans la résolution ou même pas de réponse du tout pour 4 d'entre eux. En CM1, cette attitude semble moins répandue : il n'y a qu'un élève qui fait des calculs sans formuler de réponse. Les élèves de CM1 semblent avoir intégré un rapport au problème de mathématiques plus proche de celui que l'on attend à l'école, un certain nombre d'élèves du CM2 en restant au rapport superficiel du problème comme prétexte à faire des opérations.

Le choix des problèmes inventés par les élèves du CM1 montre que la réponse le plus souvent attendue au problème est un nombre (20 fois sur 26), le plus souvent le résultat d'une opération (14 fois). De plus, les élèves ont assimilé la forme habituelle des questions et le niveau de complexité qu'on attend d'eux. On trouve rarement des données inutiles, même dans des problèmes relativement complexes, mais on trouve des implicites qui comblent l'absence de données nécessaires à la résolution. Cela montre qu'il y a sans doute encore au CM1 des élèves qui lisent un problème avec des hypothèses implicites sur les données, comme c'était le cas au CE1.

Question 3 : Ce qu'on fait en mathématiques

Le questionnaire a été rédigé avec l'hypothèse que les élèves de ce niveau savaient reconnaître une activité de mathématiques. Cette question donne donc une idée d'une éventuelle différence dans les pratiques de maîtres des deux classes qui pourrait éventuellement éclairer d'autres différences dans les réponses. Les réponses à cette question peuvent aussi être mises en relation avec les déclarations du maître.

Au CM1, les élèves déclarent faire souvent ou très souvent
- du calcul mental (18 souvent, 9 très souvent, 3 quelquefois)
- des opérations (19 très souvent, 7 souvent, 5 quelquefois)
- des exercices (17 souvent, 8 très souvent, 4 quelquefois; 1 jamais)
- des problèmes (14 souvent, 9 très souvent, 7 quelquefois)

et plus rarement :
- de la géométrie (25 quelquefois, 3 jamais, 1 souvent et 1 très souvent)
- des mesures (25 quelquefois, 4 souvent et 1 très souvent)

Les autres activités citées spontanément à ce moment là sont les graphiques (cités 4 fois), "copier des lignes sur du calcul", calcul écrit, calcul rapide, fractions (souvent), cités chacun une fois. Trois élèves déclarent qu'on ne fait rien d'autre. Des élèves font intervenir d'autres activités à la question suivante, dans leurs préférences : l'un d'eux cite les questionnaires (veut-il parler de celui qu'il est en train de remplir ?), un autre cite les graphiques dont il n'avait pas parlé avant.

En ce qui concerne leurs préférences, un élève répond "rien" pour ce qu'il aime le plus comme pour ce qu'il aime le moins, un autre ne répond pas pour ce qu'il aime le plus et "rien" pour ce qu'il aime le moins. Un élève cite d'autres disciplines à toutes les questions. Les 27 autres expriment des préférences :
- les opérations, 14 fois. Certains précisent : addition (2 fois), soustraction (1 fois), multiplication (1 fois), division (3 fois). Deux élèves citent une opération dans ce qu'ils aiment le plus et une autre dans ce qu'ils aiment le moins (E21, respectivement multiplication et soustraction, E24 soustraction et division).
- les problèmes, 4 fois,
- le calcul mental, 3 fois
- la géométrie, 3 fois.
- les exercices, les mesures, les graphiques et les questionnaires sont cités chacun une fois.

Un élève a exprimé 2 préférences : géométrie et opérations.

Ce qu'ils aiment le moins, c'est "rien" pour 10 élèves. Les 19 autres déclarent ne pas aimer
- les opérations en général (2 fois) ou certaines opérations (soustraction 2 fois, multiplication 2 fois, division 1 fois).
- les problèmes, 6 fois,
- la géométrie, 3 fois,
- les mesures, 2 fois,

- le calcul mental, 1 fois.

Aucune activité ne recueille donc ni l'approbation ni le refus général.

Ce qu'ils trouvent le plus facile, c'est :

- les opérations (8 fois) ou une opération : addition, 6 fois, division, 5 fois,
- la géométrie, 4 fois,
- le calcul mental, 2 fois
- les mesures, les heures, les signes (<; >, =), 1 fois chacun.

E26 répond "rien"

Le plus difficile :

- les problèmes, 8 fois, plus 1 fois les exercices,
- la division, 4 fois,
- la géométrie, 3 fois,
- le calcul mental, 2 fois,
- les mesures, 2 fois,
- les bases, 1 fois

Huit élèves ne trouvent "rien" difficile et un élève ne répond pas.

Six élèves répondent "rien" à la fois pour le plus difficile et pour ce qu'ils aiment le moins. Cinq d'entre eux citent des choses qu'ils trouvent faciles, mais E26 trouve que "tout est assez dur".

Sept élèves aiment le mieux ce qu'ils trouvent le plus facile et trois aiment le moins ce qu'ils trouvent le plus difficile. Un élève est dans les deux cas à la fois. Aucun n'aime le mieux ce qu'il trouve le plus difficile, ni le moins ce qu'il trouve le plus facile.

Au CM2, les élèves déclarent faire souvent

- des opérations (9 très souvent, 5 souvent, 3 quelquefois),
- des exercices (9 souvent, 3 très souvent, 3 quelquefois et 2 jamais)

et plus rarement

- des problèmes (9 quelquefois, 6 souvent, 1 très souvent)
- du calcul mental (12 quelquefois, 3 souvent, 2 très souvent)
- de la géométrie (13 quelquefois, 4 souvent)
- des mesures ((7 quelquefois, 5 jamais, 1 souvent, 3 très souvent).

De plus E4 cite spontanément les fractions et décimaux et E15 les graphiques.

Ce qu'ils aiment le plus :

- les opérations en général, 8 fois, addition, 3 fois, addition et division, 1 fois (il aime le moins la multiplication), addition, soustraction et multiplication, 1 fois (il aime le moins la division), soit 13 pour les opérations
- la proportionnalité, 4 fois,
- le calcul mental, 3 fois,
- la géométrie, 2 fois et une fois "les maths en dessin"
- les durées une fois et les problèmes 1 fois.

Trois élèves citent 2 choses, un élève en cite 3 et un en cite 4.

Ce qu'ils aiment le moins :

- des opérations, 5 fois plus 2 fois "avec les nombres à virgule", 1 fois la multiplication et 2 fois la division,
- les fractions ou décimaux, 4 fois (non compris les 2 précédents)
- les problèmes, 2 fois, plus 1 fois les exercices,
- la proportionnalité et les mesures 1 fois chacune.

Deux élèves citent 2 choses et 5 n'en citent aucune.

Ce qu'ils trouvent le plus facile :

- les opérations en général, 5 fois, l'addition, 6 fois (dont 1 cite aussi la soustraction et 1 la multiplication), la division, 1 fois, soit 12 pour les opérations
- les durées ou les heures, 5 fois,
- "convertir des fractions", 1 fois

Deux élèves ne citent rien.

Ce qu'ils trouvent le plus difficile :

- les problèmes pour 5 élèves
- la géométrie, 3 fois,
- les fractions ou décimaux, 3 fois,
- la division, 1 fois

Un élève répond "rien" et 5 élèves ne répondent rien.

Onze élèves citent ce qu'ils trouvent le plus facile parmi les choses qu'ils aiment le mieux. Deux de ces élèves aiment aussi le moins ce qu'ils trouvent le plus difficile.

Il y a lieu de s'interroger sur la différence que les élèves font entre les exercices et les problèmes. Nous n'avons pas les moyens de le savoir mais beaucoup d'entre eux en font sans doute une puisque seulement 10 élèves au CM1 et 6 élèves au CM2 déclarent faire autant de l'un que de l'autre. La majorité fait donc une différence sur la fréquence de ces activités. Les élèves du CM1 déclarent faire plus souvent des problèmes que ceux du CM2 mais, comme nous ne savons pas quelle différence ils font entre exercices et problèmes, cet écart dans les réponses est difficilement interprétable. Une différence entre les deux classes semble en revanche se manifester dans la pratique du calcul mental, 27 souvent ou très souvent au CM1 (90%), 5 au CM2 (29,4%) contre respectivement 3 et 12 quelquefois

Dans les deux classes, les avis des élèves sont très partagés sur ce qu'ils aiment, trouvent facile ou difficile. On relève cependant en CM2 une plus grande proportion d'élèves qui aiment ce qu'ils trouvent facile.
Pour l'analyse par élève, nous retenons de cette question le paramètre de plus ou moins grande coïncidence entre ce qu'on aime et ce qu'on trouve facile qui nous paraît pouvoir être un indice de l'implication de l'élève dans la classe de mathématiques. Nous verrons si ce paramètre a réellement une signification et laquelle en comparant à ce qui se passe pour les autres questions.
Nous avons adopté les codes suivants :
coïncidence entre ce qu'on aime et ce qu'on trouve facile : code a
coïncidence entre ce qu'on n'aime pas et ce qu'on trouve difficile : code b
les deux : code c
élèves pour lesquels il n'y a rien qu'ils aiment le moins et rien qu'ils trouvent difficile : code d.
Nous avons en CM1 5 a, 2b, 1c, 5d et en CM2 8 a et 2 c, soit plus de liaison entre ce qu'ils aiment et trouvent facile ou n'aiment pas et trouvent difficile au CM2 (10 sur 17) qu'au CM1 (8 sur 30).
Nous pouvons attendre que le code d soit relié à la réussite en mathématiques.

Question 4. Un problème de mathématiques peut-il avoir plusieurs solutions ?

Pour les CM1, un problème de mathématiques a quelquefois plusieurs solutions (1 jamais, 23 quelquefois et 8 souvent : 2 élèves répondent à la fois quelquefois et souvent), et il y a souvent plusieurs méthodes pour le traiter (10 quelquefois et 21 souvent, 1 élève donne les 2 réponses)

Pour les CM2, on a 9 réponses souvent et 8 réponses quelquefois aux 2 questions (7 élèves font 2 fois la même réponse, 5 élèves pensent qu'il y a plus souvent plusieurs méthodes que plusieurs solutions, mais autant pensent le contraire).
En CM1, 12 élèves font la même réponse aux 2 questions, 16 élèves pensent qu'il y a plus souvent plusieurs méthodes que plusieurs solutions au problème et 2 pensent le contraire.
On peut attendre que la pratique des mathématiques au niveau du CM ait amené les élèves à rencontrer plus souvent des problèmes où on a plusieurs méthodes pour arriver à une solution que des problèmes où on a une méthode pour arriver à plusieurs solutions. Précisons qu'un problème qui a plusieurs solutions pour les élèves de ce niveau peut par exemple être un problème d'inégalité, chacun des nombres convenables étant alors considéré comme une solution. Le fait de répondre qu'un problème a souvent plusieurs solutions et qu'il y a quelquefois plusieurs méthodes pour trouver la solution nous a paru pouvoir être l'indice d'un rapport aux mathématiques inadéquat. Nous avons donc retenu comme paramètre pour cette question le jugement de valeur sur les problèmes. Nous n'avons pas pris en compte le fait de répondre souvent plutôt que quelquefois qui ne nous paraît pas significatif mais la comparaison entre les réponses :
plus souvent plusieurs solutions que plusieurs méthodes : code u
aussi souvent plusieurs solutions que plusieurs méthodes : code v
plus souvent plusieurs méthodes que plusieurs solutions : code w.
Nous avons en CM1 2 u, 12 v, 16 w et en CM2, 5 u, 7 v et 5 w.
Nous attendons qu'un code u soit l'indice d'un rapport aux mathématiques moins adéquat qu'un code v ou w, mais pour interpréter cette différence, il faudra la mettre en relation avec les réponses aux autres questions.

Question 5. Ce qu'il faut faire pour être bon en mathématiques.

Pour les CM1, il faut :
- bien écouter le maître, réponse donnée par 26 élèves, dont 4 ne citent que cela. Les 4 élèves qui ne font pas cette réponse répondent "se faire expliquer ce qu'on n'a pas bien compris" (seulement cela pour 3 d'entre eux) et "bien apprendre ses leçons pour le 4ème.
- bien apprendre ses leçons pour 14 élèves. A une exception près, ils ont tous fait aussi la première réponse.
- se faire expliquer ce qu'on n'a pas bien compris pour 15 élèves dont 3 ne font que cette réponse.
- faire beaucoup d'exercices et de problèmes : 1 élève
- autres réponses :"réfléchir à ce qu'on fait", 1 élève (E14), "savoir faire tout ça", 1 élève (E16, qui a coché les 2 premières lignes).

La plupart des élèves ont coché plusieurs réponses :
- les 3 premières : 3 élèves
- les 2 premières : 10 élèves
- la première et la 3ème : 8 élèves
- la première et la 4ème : 1 élève.

En CM2, les élèves ont tous coché "bien écouter le maître". Un élève n'a fourni que cette réponse, tous les autres en ont fourni plusieurs.
- bien apprendre ses leçons, choisi 14 fois
- se faire expliquer ce qu'on n'a pas bien compris, 14 fois
- faire beaucoup d'exercices et de problèmes, 10 fois

Tous les élèves sauf un ont coché plusieurs réponses :
- les 4 : 7 élèves
- les 3 premières : 5 élèves
- les deux premières et la 4ème : 2 élèves
- la 1ère, la 3ème et la 4ème : 1 élève qui ajoute "s'aider avec les parents"
- la 1ère et la 3ème : 1 élève (E16).

L'écoute du maître est donc largement dominante dans les deux classes, même si beaucoup d'élèves pensent que cela ne suffit pas. Mais, sur cette question, il y a une nette différence entre les deux classes dans le nombre des réponses cochées, 1 ou 2 pour 90% des élèves du CM1 (27 sur 30), 3 ou 4 pour 88% des CM2 (15 sur 17). Le grand nombre de réponses par élève dans le CM2 peut indiquer une absence d'idée claire sur ce qui peut permettre de progresser.

Par ailleurs, on peut penser que les élèves qui ne choisissent que la 1ère et la 3ème réponse ne se donnent pas beaucoup de responsabilité dans l'apprentissage. A moins qu'il ne s'agisse de bons élèves qui pensent que, quand ils ont compris, ils savent et n'ont pas besoin d'apprendre. Si l'on en juge par la résolution du problème, cela semble être le cas pour l'élève E16 du CM2. Au CM1, c'est moins clair. Sur les 8 élèves qui répondent 1-3, 3 ont une réponse juste et justifiée, 2 ont une réponse juste non justifiée, 1 répond 17, 1 ne répond pas et 1 a une démarche fausse.

Nous avons donc distingué, pour le codage de cette question, ce qui fait référence au travail personnel : arguments 2 (apprendre les leçons) et 4 (faire beaucoup d'exercices) de ce qui est plutôt une demande aux autres : argument 3 (se faire expliquer ce qu'on n'a pas compris). Nous n'avons pas tenu compte de l'argument 1 (bien écouter le maître) dans la mesure où presque tous les élèves l'avaient donné et où il peut s'interpréter des deux façons (activité de l'élève qui tire de l'information de ce que dit le maître, ou attitude passive et conformiste d'attente des indications du maître). Nous avons donné le code E aux élèves qui n'avaient donné que cet argument.

code F : arguments 1 et 3 seuls, E pour le 1 seul.

code G arguments 2 et 4 seuls

code H les deux types d'arguments.

Nous avons en CM1 12 F, 11 G, 6 H et en CM2, 2 F, 2 G et 13 H. La différence entre les deux classes dans les proportions de réponses H s'explique par les nombreuses réponses multiples au CM2 : 7 élèves ont coché les 4 arguments alors que ce n'est le cas d'aucun élève du CM1, et que seulement 3 élèves du CM1 en ont coché 3 contre 6 au CM2. Les réponses du CM2 ne sont, pour cette raison, sans doute pas très significatives de ce que les élèves considèrent comme le plus important.

Le code G correspond a priori à ce que nous avons codé a au CM1, H correspond à b et F à c, nous n'identifions pas pour le moment puisque dans un questionnaire écrit, les réponses sont suggérées, ce qui change l'interprétation qu'on peut en faire.

Question 6. Que faire si on n'a pas bien compris ?

En CM1, tous les élèves sauf un demandent au maître. Parmi eux, 5 demandent aussi à la famille, 2 à un camarade et 1 "essaie de revoir ses leçons dans sa tête". Un élève ne demande qu'à sa famille.

En CM2, tous les élèves demandent au maître. Douze élèves demandent aussi dans leur famille, et 6 à des camarades, parmi eux 4 demandent à la fois à leur famille et à un camarade. Un élève cherche tout seul. C'est celui qui, à la question précédente, disait qu'il faut s'aider avec les parents.
Nous distinguons, comme pour le CE1, les sources d'aide de l'élève :
maître seul : code m
famille seule : code f
camarades seulement : code c
si l'élève ne demande à personne, nous avons utilisé le code s.
Si l'élève utilise plusieurs sources d'aide, nous avons juxtaposé les codes, par exemple maître + famille + camarades : code mfc.
Si c'est après avoir fait un effort personnel que l'on demande de l'aide, nous avons pris le code de l'aide demandée avec une étoile, par exemple maître + effort personnel : code m*, maître + famille + effort personnel : code mf*.
En CM1, nous avons 21 codes m, 1 code m*, 1 code f, 5 codes mf, 2 codes mc, et en CM2, 3 codes m, 9 codes mf (dont 1 mf*), 2 mc et 3 mfc.

Il semble donc que les élèves de CM2 fassent plus appel à leur famille que ceux de CM1 qui n'en ont sans doute pas besoin dans la mesure où ils sont plus souvent en situation de réussite. Ils ont peut-être par ailleurs une aide de leur famille qui n'est pas identifiée comme telle parce que moins reliée au travail strictement scolaire.
Remarquons que les élèves de CM font moins souvent allusion à un nouvel essai personnel que ceux du CE. C'est sans doute un effet du questionnaire écrit qui ne suggérait pas cette possibilité.

Question 7. Quelles mathématiques hors de la classe ?

Les CM1 déclarent, pour 18 d'entre eux, faire du travail scolaire supplémentaire quand ils n'ont rien d'autre à faire le soir, le mercredi, le dimanche ou pendant les vacances, ou pour s'entraîner, notamment sur les divisions. Trois d'entre eux déclarent que des adultes ou une jeune fille leur en fait faire (famille ou cours particuliers). Trois élèves résolvent des problèmes qu'ils se posent eux-mêmes, en particulier en voiture ou dans une activité domestique. Trois autres déclarent les utiliser dans la vie courante (argent, mesures) et 6 dans leurs jeux (Monopoly, le compte est bon, électronique et "jouer à la maîtresse"). Les élèves ont fait chacun une seule réponse.

Quant aux adultes, les mathématiques leur servent pour ce qui a rapport avec l'argent (cité 21 fois), plus généralement servent à calculer (6 autres), pour les mesures (2 autres). Le dernier enfant dit simplement que c'est important. Deux disent aussi que ça sert à aider les enfants, un dit que ça sert pour le travail et un autre "à beaucoup de choses".

Les CM2 font moins souvent du travail scolaire hors de l'école : c'est le cas de 5 d'entre eux quand ils n'ont rien à faire, pour s'amuser. La majorité utilise surtout les mathématiques en faisant les courses (12, plus peut-être 1 autre qui écrit "pendant les cours". S'agit-il des courses ou des récréations ?), un autre pour partager les gâteaux. Deux élèves les utilisent dans des jeux, dont une précise "pour jouer à la maîtresse". Un élève ne répond pas à cette question.

En ce qui concerne les adultes, cela leur sert pour ce qui concerne l'argent, les chèques, le loyer, les impôts (12 élèves ont ce type de réponse, 4 d'entre eux citent aussi des mesures ou des plans). Deux élèves disent oui, dont un souligne que c'est très important dans la vie, mais sans donner d'exemple. Un ne sait pas et 2 ne répondent pas.

La vision de l'utilisation des mathématiques par les adultes n'est pas très différente dans les deux classes. Ce qui diffère en revanche, c'est leur propre utilisation des mathématiques, scolaire en CM1, on les fait pour s'amuser et pour s'entraîner, c'est une activité gratuite pour le moment et qui ne sera actualisée que dans la vie d'adulte, pour des activités qu'on ne connaît pas encore. Au CM2, au contraire, les mathématiques sont reliées aux courses, que ces élèves ont sans doute l'habitude de faire plus souvent que les élèves de CM1. Elles ont donc une fonction utilitaire. La question qu'on peut se poser, c'est de savoir si l'école ne renforce pas cette différenciation des points de vue suivant le milieu d'origine des élèves.
Pour cette question, nous avons retenu comme variable les occasions dans lesquelles les enfants faisaient des mathématiques hors de l'école :
A : travail scolaire ou jeux seuls
B : travail scolaire ou jeux, plus vie courante

C : vie courante seule.
Nous avons déjà souligné la différence entre les deux classes sur ce plan (27 codes A et 3 C au CM1, 2 codes A, 4 B, 9 C au CM2). L'absence de code B au CM1 s'explique par le fait que les élèves n'ont fourni qu'une réponse, deux élèves de CM2 n'ont pas répondu à la question.

Question 8. Le métier et les mathématiques.

Les métiers que les élèves veulent faire plus tard et le fait qu'il utilise ou non les mathématiques, ne semblent pas donner de renseignements intéressants, au niveau global. Cela peut néanmoins apporter des éléments pour l'étude de cas de chaque élève. Par exemple, un élève du CM1 semble n'avoir que des idées vagues sur les noms des métiers : il voudrait être directeur et cite comme métier utilisant les mathématiques "bureau". Les réponses sont de toute façon ambigües puisque certains élèves disent que tous les utilisent puisqu'il faut toujours compter, en particulier.de l'argent pour se faire payer ; d'autres élèves (1 dans chaque classe) déclarent qu'aucun métier n'utilise les mathématiques. De cette question, nous ne retenons donc que le milieu social d'origine des élèves et les métiers les plus cités parmi ceux qui utilisent les mathématiques, hormis professeur de mathématiques et instituteur :

Les métiers les plus cités sont ceux qui concernent l'argent (commerçant, caissier, banquier...), 12 élèves au CM1 et 10 au CM2 citent au moins un métier de cette catégorie. Vient ensuite ce qui touche à l'informatique (6 élèves du CM1 et 4 du CM2), puis architecte (2 dans chaque classe), secrétaire ou "bureau" (3 élèves au CM1, de plus, une élève a une réponse contradictoire à ce sujet : elle cite le métier de secrétaire comme utilisant les mathématiques et par ailleurs dit qu'elle veut devenir secrétaire et, à ce moment là, déclare que les mathématiques ne lui serviront pas parce que les secrétaires n'ont pas à calculer). A part ceux-là, des métiers divers sont cités : astrologue, astronaute, horloger, directeur, géologue, mécanicien (1 dans chaque classe), maçon (1 dans chaque classe), ingénieur (cité par un élève dont le père est ingénieur), armée, garagiste, menuisier, tricoteuse. On trouve essentiellement des métiers qui sont liés au fait de compter ou de mesurer, ce qui est bien normal puisque c'est l'image des mathématiques qui domine à l'école primaire.

Comme on pouvait l'attendre compte-tenu de la situation géographique des écoles, *les milieux d'origine des élèves* sont assez différents dans les deux classes. Nous avons retenu 3 catégories : I classes favorisées, II classes moyennes, III classes populaires. Il n'y avait en général pas de contradiction entre les professions des 2 parents, s'il y avait hésitation à partir de la profession d'un des parents, on a tranché à partir de celle de l'autre. Par exemple, père garagiste, mère à la maison a été classé II alors que père mécanicien, mère caissière ou employée ont été classés III. Quand il subsistait néanmoins une hésitation entre 2 catégories d'après les réponses des enfants, nous avons noté les deux catégories.

Pour le CM1, un élève ne répond pas. Les 29 autres se répartissent comme suit : 10 de milieu favorisé, 2 pour lesquels on peut hésiter entre favorisé et moyen, 11 de milieu moyen, 6 de milieu populaire. Les cas pour lesquels nous n'avons pas tranché sont les suivants : père chef de cabine, mère attachée commerciale d'une part et "mon père travaille dans une ambassade" d'autre part. Remarquons que ce dernier élève est peut-être étranger ainsi que celui dont le père est diplomate et la mère à la maison et que nous avons classé en I. Nous n'avons pas d'information sur la nationalité des élèves.

Pour le CM2, 3 élèves ne répondent pas, 10 sont de milieu populaire, 3 des classes moyennes, 1 élève a des parents qui ne font aucun métier, nous l'avons noté IV.

3.2. Analyse par élève.

3.2.1. Comparaison des performances sur le contenu et détermination d'un niveau de connaissance.

Les deux premières questions permettaient de se faire une idée du niveau de connaissance des élèves, les autres donnaient des éléments pour approcher la représentation que les élèves se faisaient des mathématiques.

Nous avons d'abord regardé le lien entre les résultats aux deux premières questions. Rassemblons dans un tableau à double entrée les résultats de ces deux questions :

comptage problème	A	B	A'	B'	C	C'	D	E
A	2- 4-10-14- 25- 28- *15*	*16*		*5*	19- *11*			*1*
B	5-7-15- 20-23	26						
A'	6				*8*			
A"			*12*		*3- 13*			
B'		12						
C	22		8- 30	*10*	9- *6- 7*	*4*		
C̲		*9*					*2*	
C'					17			
D	18	29- *17*		*14*	3- 27	21	11	
E	13					16		

Dans ce tableau sont indiqués les numéros des élèves des deux classes, en caractères droits pour les CM1, en italique pour les CM2.

Nous avons ensuite fait des regroupements concernant la progression conceptuelle sur la numération et la résolution des situations de division. Pour la numération nous avons partagé en 3 catégories : utilisation systématique des dizaines (A, A') d'une part, occasionnelle (B, B') ensuite et enfin les autres; pour le problème des oranges, nous avons aussi distingué 3 catégories : démarche juste, que la réponse soit formulée correctement ou non, justifiée ou non (A, A', A", B, B'), démarche juste ou incomplète et réponse fausse ou absence de réponse (C, C', C̲), démarche fausse ou non réponse. Cela nous donne le tableau croisé suivant, les élèves sont représentés par un numéro, les CM1 sont indiqués en caractères droits, les CM2 en italique.

comptage problèmes	A A'	B B'	autres
A A' B B'	2- 4-5-6-7-10- 14 I15-20- 23 -25- 28 *12 -15*	12- 26 *5 -16*	19 *1 -3 -8 -11 -13*
C C' C̲	8 -22- 30	*9- 10*	9 -17-*2- 4- 6- 7*
D E N	13- 18	I1- 29- *14- 17*	3-11-16-21-24-27

La liaison entre les deux questions semble surtout le fait du CM1. Au CM2, c'est plutôt le contraire qui semble se produire. Si nous prenons des catégories plus tranchées en regroupant A A' et B B', c'est à dire l'utilisation de la numération pour le comptage d'une part, A A', B B', C C' C̲, c'est à dire une démarche correcte pour les problèmes d'autre part, nous trouvons le tableau suivant (les nombres gras indiquent le nombre total d'élèves de chacune des classes dans chaque case).

comptage problèmes	A A' B B'		autres	
A A' B B' C C' C̲	2- 4- 5- 6 -7-8 - 10- 12-14 -15 20- 22- 23 -25- 26-28 -30	**17**	9 -17-19	**3**
	5 -9- 10- 12 -15 -16	***6***	*1 -2- 3- 4- 6- 7- 8 -11 -13*	***9***
D E N	1- 13- 18- 29-	**4**	3- 11- 16- 21- 24- 27	**6**
	14- 17	***2***		

En CM1, on a des résultats cohérents entre le calcul et la résolution du problème pour 23 élèves sur 30 (76,7%) en CM2 pour seulement 6 élèves sur 17 (35,3%). Ce résultat du CM2 s'explique surtout par le grand nombre d'élèves qui n'utilisent pas la numération pour compter ou font des erreurs mais reconnaissent la démarche de division : il s'agit probablement d'élèves qui n'ont toujours pas acquis les bases du calcul, objet d'apprentissage des premières classes de l'école, mais qui ont acquis certaines connaissances récentes ou qui reconnaissent les situations de division qui sont un enjeu actuel de l'enseignement et donc beaucoup pratiquées dans leur classe.

On peut regrouper d'une autre manière les élèves sur leur résultats en calcul mental : d'un côté ceux qui calculent bien même s'ils ne se réfèrent pas à la numération (A, B, C) et de l'autre ceux qui font des erreurs (A', B', C', D, E). Les résultats sont alors un peu plus cohérents pour les CM2 et montrent mieux la différence entre les deux classes : plus d'élèves qui calculent bien et n'adoptent pas la démarche correcte pour le problème en CM1 qu'en CM2, le contraire pour ceux qui font des erreurs de calcul et qui reconnaissent la division, comme on peut le voir sur le tableau suivant :

comptage problèmes	A B C		autres	
A A' B B' C C' C̲	**18**	***9***	**2**	***6***
D E N	**7**	***1***	**3**	***1***

A partir des catégories établies pour les deux premières questions, nous avons déterminé un *niveau de connaissance* pour les élèves reflétant les différences repérées ci-dessus et tenant compte des erreurs de calcul, de la façon suivante :

niveau I : élèves ayant une bonne maîtrise de la numération, qui résolvent correctement le problème des oranges : catégories A en numération et A ou B en problèmes (la justification n'était pas demandée explicitement dans ce second cas). Nous ajoutons en I l'élève qui a un code (A, A') (réponse 17 filets plus 3 oranges).
12 élèves au CM1 et 1 élève au CM2

Nous rattachons au *niveau II* deux types d'élèves :
* II_a des élèves qui résolvent correctement le problème, comptent bien mais pour qui la numération n'est pas disponible explicitement. Ils ont un code (B, A), (B, B) ou (B, B') ou même (C, A).
3 élèves au CM1 et 2 élèves au CM2.
* II_b un élève qui donne un début d'explication pour la numération avec une erreur de calcul et résout correctement le problème.
1 élève au CM2

niveau III : quatre types d'élèves :
* III_a : élèves calculant bien, ayant une démarche correcte pour le problème mais une réponse fausse du type 17 filets ou qui ne donnent pas de réponse : codes (A, C) ou (B, C) ou (C, A') ou (C, A") ou même (C, C). Nous ajoutons un élève qui a un code (E, A) : il n'a pas respecté la consigne pour la première question. Ce sont des élèves qui calculent bien mais qui ont du mal à justifier et à mener une résolution de problème jusqu'à son terme.
2 élèves ont ce niveau au CM1 et 6 au CM2.
* III_b : élèves qui ont des problèmes de calcul mais adoptent une démarche correcte pour le problème : codes (A', C), (A', A") (B', C). Nous y ajoutons un élève qui a un code (B, $\underline{C}$) ce qui traduit des problèmes avec la technique de division
2 élèves ont ce niveau en CM1 et 2 en CM2.
* III_c : élèves qui font le calcul mental sans erreur et avec référence explicite à la numération mais ne peuvent pas résoudre le problème : codes (A, D), (A, N), (B, D) ou (B, E).
4 élèves ont ce niveau en CM1 et 1 en CM2.
* III_d : élèves qui ne font pas référence à la numération (ou peu), font des erreurs de calcul mais ont une démarche correcte pour le problème : codes (B', C) (C', C) (D, $\underline{C}$).
3 élèves du CM2 sont dans ce cas.

niveau IV : élèves qui à la fois ne peuvent pas justifier leurs calculs de numération ou font des erreurs et ne savent pas résoudre le problème : codes (C, C'), (C', C), (C, D) ou (C, E) ou encore (C', N), (C', D), (D, C) (B', D) ou (D, D).
7 élèves ont ce niveau en CM1 et 1 en CM2.

Remarquons que, dans les tableaux précédents, nous n'avions pas toujours tenu compte des erreurs de calcul, ce qui fait que les élèves peuvent être classés dans un niveau inférieur à celui qu'aurait laissé prévoir leur place dans certains des tableaux précédents.

Si l'on compare les deux classes, on peut remarquer deux faits saillants :
- très peu d'élèves du CM2 atteignent le niveau I et très peu sont au niveau IV alors qu'ils sont relativement plus nombreux qu'au CM1 dans les niveaux II et III.
- beaucoup d'élèves du CM2 dans le niveau III_a (plus du tiers).
On peut visualiser la comparaison entre les classes dans le tableau suivant :

niveau	I	II_a	II_b	III_a	III_b	III_c	III_d	IV
CM1	12	3		2	2	4		7
CM2	1	2	1	6	2	1	3	1

Il manque souvent aux élèves du CM2 d'expliciter la numération (niveau II) ou d'aller jusqu'au bout dans la résolution du problème, c'est-à-dire formuler correctement la solution (niveau III_a) à moins qu'ils n'aient pas une aisance suffisante en calcul (niveaux III_b ou III_d).

3.2.2. Bilan

Nous avons rassemblé, pour chaque classe, tous les codes aux questions retenues dans un tableau à double entrée :

CM1

élève	comptage	oranges	problème	connais.	qu. 4 a	qu.4 b	qu. 5	qu. 6	qu. 7	milieu
1	B	E	N	IIIc		w	E	m	A	
2	A	A	A	I	d	v	G	m	A	II
3	C	D	B'	IV		v	H	mc	A	I
4	A	A	A	I		w	E	m	A	I
5	A	B	A'	I	a	v	F	m	A	I
6	A	A'	B	I	d	v	G	mf	A	I
7	A	B	B	I		v	H	mf	A	I
8	A'	C	B	IIb		u	E	m	C	II
9	C	C	C	IIIa		w	G	m	C	III
10	A	A	A - B'	I		v	F	f	A	II
11	D	D	B'	IV		v	G	m*	A	III
12	B	B'	N	IIa		w	G	mf	C	III
13	A	N	B'	IIIc	a	v	F	m	A	II
14	A	A	B	I	c	w	H	m	A	II
15	A	B	A	I	a, d	w	H	m	A	III
16	C'	N	B'	IV	a	w	G	m	A	II
17	C	C'	N	IV	a	v	E	m	A	II
18	A	D	C	IIIc		w	H	mf	A	I
19	C	A	A'	IIa		v	F	m	A	I-II
20	A	B	A'	I	a	w	G	m	A	I
21	C'	D	B'	IV		u	F	m	A	III
22	A	C	A	IIIa		w	F	mc	A	II
23	A	B	A - A'	I		w	G	m	A	II
24	C	E	N	IV	b	w	G	m	A	I
25	A	B	B	I	d	w	G	m	A	I
26	B	B	B'	IIa		v	H	m	A	III
27	C	D	N	IV		v	H	m	A	I-II
28	A	A	B	I	b	w	F	m	A	II
29	B	D	A'C	IIIc	d	w	F	mf	A	II
30	A'	C	A'	IIIb		w	F	m	A	I

CM2

élève	comptage	oranges	problème	connais.	qu. 4 a	qu.4 b	qu. 5	qu. 6	qu. 7	milieu
1	E	A		IIIa	a	v	H	m	C	III
2	D	C		IIId	c	u	H	mfc	C	III
3	C	A"		IIIa	a	w	H	mfc	C	III
4	C'	C		IIId		w	H	mc	C	
5	B'	A		IIb	a	v	H	mf	C	IV
6	C	C		IIIa	a	w	G	mfc	B	III
7	C	C		IIIa	a	u	E	m	C	III
8	C	A'		IIIa		w	G	m	B	III
9	B	C		III b		u	H	mc		III
10	B'	C		IIId	a	v	H	mf	B	III
11	C	A		IIa		v	H	mf	C	
12	A'	A		IIIb	a	v	H	mf	C	III
13	C	A"		IIIa	a	v	H	mf	A	III
14	B'	D		IV	c	w	H	mf	B	II
15	A	A		I		v	H	mf*	C	II
16	B	A		IIa		u	F	mf		
17	B	D		IIIc		u	H	mf	A	II

Remarquons que les textes de problèmes inventés n'ont pas servi à déterminer le niveau parce que cette question n'a pas été traitée au CM2, mais le résultat à cette question est en général cohérent avec le niveau, il a pu servir à trancher en cas d'hésitation.

Nous allons maintenant, à partir de ce tableau récapitulatif, faire des croisements pour tester nos hypothèses a priori.

3.2.3. Lien entre réussite et milieu social

Nous avons croisé le niveau de réussite et le milieu, d'abord en gardant toutes les nuances, ce qui donne le tableau :

réussite milieu	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IIIc	IIId	IV
I	4-5-6-7-20 25				30	16		3-24
I-II		10						27
II	2-10-14-28 23-*15*			22	8	13-29 *17*		16-17 *14*
III	15	12-26		9 *1-3*	*9-12* *6-7-8-13*		*2*	11-21 *10*
autres		*11-16*	*5*			1	*4*	
total	**12 *+1***	**3 *+2***	***1***	**2 *+6***	**2 *+2***	**4 *+1***	***3***	**7 *+1***

On a indiqué dans le tableau les numéros donnés aux élèves (sauf dans la ligne "total" où il s'agit d'un nombre d'élèves, ceux du CM1 sont en chiffres droits et ceux du CM2 en italique. Nous avons mis dans la catégorie autres les élèves qui ne donnent pas la profession de leurs parents et celui dont les parents ne travaillent pas.

Il est clair qu'il y a une liaison, attendue, entre réussite scolaire et milieu familial, mais elle ne semble pas jouer de la même façon dans les deux classes. Pour le voir plus facilement, nous allons regrouper tous les niveaux II et tous les niveaux III, nous mettrons aussi dans le niveau social II les élèves dont nous avions jugé le niveau social I-II. Nous indiquons cette fois un nombre d'élèves dans chaque case, avec la même convention pour les classes.

réussite milieu	I	II	III	IV	total
I	6	1	1	2	10
II	5 +*1*	2	3 +*1*	3 +*1*	12 + *3*
III	1	2	1 +*10*	2	7 + *10*
autres		*3*	1 +*1*		1 + *4*
total	**12 + *1***	**5 +*3***	**6 + *12***	**7 + *1***	**30 + *17***

Il s'agit cette fois, dans chaque cas, d'un nombre d'élèves.

Les enfants du CM1 sont majoritairement en niveau I et II alors que ceux du CM2 sont majoritairement en niveau III et IV.

Comme nous l'attendions, les enfants de milieu favorisé sont majoritairement en niveau I ou II, les enfants des classes moyennes se répartissent à peu près également sur tous les niveaux et les enfants de milieu populaire majoritairement en III et IV, mais il y a, surtout pour ces derniers, un très fort effet de classe : les enfants de milieu populaire du CM1 se répartissent à peu près également sur tous les niveaux, alors qu'au CM2, ils sont concentrés sur le niveau III. Ce phénomène apparaît encore plus nettement si l'on regroupe comme dans le tableau ci-dessous les niveaux de réussite I et II d'une part, III et IV d'autre part.

réussite milieu	I-II	III-IV
I	7	3
II	6 +*1*	7 +*2*
III	3	3 +*10*
autres	*3*	1 + *1*

Il y a sans doute plusieurs explications à ce phénomène : certaines sont peut-être liées à la personnalité du maître et à son attitude face à des élèves en difficulté ou de milieu défavorisé (nous y reviendrons lors de l'analyse des entretiens avec les maîtres), d'autres sont sans doute à rattacher au fait que dans la classe de CM2, il n'y a que des enfants de milieu populaire ou presque, et que ceci a sans doute été valable pour ces élèves pendant toute leur scolarité primaire. Divers travaux, notamment une enquête de l'IREM de Caen effectuée en 1983 (voir Do et Dutilleux, 1985), ont montré que l'échec pour les enfants de milieu populaire était plus important dans les écoles où ils étaient très majoritaires. L'attitude des maîtres est différente suivant qu'il y a quelques élèves de milieu populaire dans la classe ou que c'est le cas de la majorité d'entre eux. Ils ne font pas le même enseignement dans une classe où la majorité des élèves rencontre des difficultés ou dans une classe où c'est le cas de quelques élèves isolés.

3.2.4. Rapport aux mathématiques.

Pour les autres questions, nous avons mis en relation les éléments retenus d'une part avec le milieu social, d'autre part avec la réussite scolaire, en différenciant selon la classe. Nous avons rassemblé les résultats de chaque question dans un tableau double, en gardant les mêmes codes pour différencier les classes. Nous pourrons ainsi voir apparaître éventuellement une liaison avec l'une ou l'autre de ces variables.

Etant donnée la méthodologie employée, questionnaires écrits et effectif très restreint, nous ne pourrons retenir que des liaisons qui se manifestent assez nettement et nous ne pourrons en induire que des tendances qui confirment ou non nos hypothèses a priori.

a) *facile / agréable.*

Nous avions décidé de regarder, à travers la question 3, la coïncidence dans les réponses de l'élève entre ce qu'il trouve facile et ce qu'il aime (codes a,b,c) et aussi le fait de ne rien trouver difficile, avec l'idée que le fait d'aimer ce qu'on trouve facile et d'aimer moins ce qu'on trouve difficile devait être plutôt le fait des élèves en difficulté et le fait de ne rien trouver difficile celui des élèves qui réussissent. Les résultats de cette question sont résumés dans le tableau suivant :

	niveau				total	milieu			
	I	II	III	IV		I	II	III	autres
codes a, b, c	5	*1*	1 +*7*	3 +*2*	9+*10*	3	5 +*1*	1 +*8*	*1*
	5 +*1*		4 +*9*						
code d	4		1		5	2	2	1	

Là encore, il semble que les élèves se déterminent différemment dans les deux classes : aimer ce qu'on trouve facile ou trouver facile ce que l'on aime semble plutôt le fait d'élèves des milieux favorisés ou moyens dans le CM1 alors que cela semble plutôt le cas d'élèves qui ont un bas niveau de connaissance dans le CM2. Peut-être cela a-t-il une signification différente dans les deux cas, par exemple pour un certain nombre d'élèves de CM1 cela peut vouloir dire qu'ils aiment et trouvent facile beaucoup de choses parce qu'ils ont de bons résultats alors que pour d'autres cela peut être un sujet qu'ils aiment parce qu'ils le trouvent facile, par exemple les additions alors qu'ils trouvent tout le reste difficile. En revanche, le fait de ne rien trouver difficile semble bien être le plus souvent le cas des élèves qui ont une bonne réussite. Remarquons qu'aucun élève du CM2 ne trouve rien difficile et qu'un seul élève du CM1 a à la fois un code a et d.

b) *plusieurs solutions / plusieurs méthodes.*

Pratiquement tous les élèves des deux classes pensent qu'il arrive qu'un problème ait plusieurs solutions et qu'on puisse le résoudre en utilisant plusieurs méthodes. L'élément que nous avons retenu est la comparaison de fréquence entre plusieurs solutions et plusieurs méthodes : nous pensons que la pratique des élèves a dû leur faire rencontrer plus souvent des problèmes qu'on peut résoudre de manières différentes que des problèmes qui ont plusieurs solutions. Nous pensions donc que le fait de répondre "quelquefois" pour plusieurs méthodes et "souvent" pour plusieurs solutions (code u) serait plutôt le fait d'élèves dont le niveau de connaissances est moins bon, qui n'ont peut-être pas toujours une idée claire de ce qu'est une solution d'un problème ou une méthode de résolution. Nous résumons les résultats à cette question dans le tableau suivant :

	niveau				total	milieu			
	I	II	III	IV		I	II	III	autres
code u		*1*	1 + *4*	1	2+*5*		1 + *1*	1 + *3*	*1*
code v	5 + *1*	2 + *2*	1 + *4*	4	12+*7*	3	7 + *1*	2 + *4*	*2*
code w	7	1	6 + *4*	2 +*1*	16+*5*	6	6 + *1*	3 + *3*	1+*1*

Il semble bien en effet que la réponse codée u soit liée à un bas niveau de réussite : aucun élève en niveau I, un seul en niveau II. Il n'y a non plus aucun élève qui fait cette réponse dans les milieux favorisés, elle est donc liée à la conjonction d'un milieu moyen ou populaire et d'une faible réussite, c'est d'ailleurs surtout dans la classe de CM2 qu'on la trouve. Elle pourrait donc être liée à un facteur qui gêne la réussite d'enfants de milieu populaire, peut-être justement le fait de savoir ce que sont une solution et une méthode de résolution. En revanche, les réponses codées v ou w, beaucoup plus répandues, ne semblent liées ni au milieu social, ni à la réussite.

c) *le plus important pour être bon en mathématiques.*

Nous avons fait pour cette question le même genre de tableau que pour les précédentes :

	niveau				total	milieu			
	I	II	III	IV		I	II	III	autres
code F	4	1 +*1*	6 + *1*	2	8+*2*	3	8	1 + *1*	1 +*1*
code G	5	1	1 + 2	4	10+*2*	4	4	3 + *2*	
code H	3 +*1*	1 +*2*	1 + *9*	1 +*1*	6+*13*	3	1 + *3*	2 + *7*	*3*

code F : élèves ne donnant que les arguments "se faire expliquer ce qu'on n'a pas compris" ou "bien écouter le maître".
code G : élèves disant "bien apprendre ses leçons" "ou faire beaucoup d'exercices".
code H : élèves donnant les deux types d'arguments.

Nous avons déjà remarqué que les élèves de CM2 donnent très majoritairement une réponse de type H, et que cela ne nous paraissait pas significatif. Si l'on regarde les réponses des CM1, ce qui frappe, ce sont les nombreuses réponses de type F parmi les élèves des classes moyennes. Il semble que ces élèves aient une forte attente vis à vis des autres : il est plus important pour eux de se faire expliquer ce qu'on n'a pas compris que d'apprendre ses leçons. On peut préciser cette remarque en distinguant suivant la réussite scolaire de ces élèves :

B, classe moyenne et réussite I ou II : 3 F, 2 G, 1 H

B', classe moyenne et réussite III ou IV : 5 F, 1 G, 1 H,

donc la même tendance dans les deux cas, plus accusée quand la réussite est moindre, alors que pour les enfants de milieu populaire la tendance serait plutôt inverse : 3 G contre 1 F et 2 H. C'est un peu plus net pour les enfants de milieu populaire qui réussissent où on n'a pas de F:

C, classe populaire et réussite I ou II : 0 F, 1 G, 2 H

C', classe populaire et réussite III ou IV : 1 F, 2 G, 0 H.

Il semble plus important pour eux d'apprendre les leçons ou de faire des exercices que de se faire expliquer ce qu'ils n'ont pas compris. Les enfants de milieu privilégié se répartissent également dans les 3 catégories (3F, 4G, 3H).

Ces résultats sont compatibles avec l'hypothèse que, pour les élèves issus de milieu populaire, la réussite est liée au fait de se sentir responsable de son propre apprentissage.

d) *Que faire si on n'a pas compris ?*

Nous avons déjà dit qu'un seul élève, du CM1, ne demande de l'aide qu'à sa famille, il a le niveau I et une famille de milieu moyen. Tous les autres demandent des explications au maître. Un élève de CM1 dit aussi qu'il cherche seul, il a le niveau IV et vient d'un milieu populaire. Un élève de CM2 dit aussi qu'il cherche seul, mais en plus demande à sa famille (il a le niveau I et un milieu moyen). Nous le retrouverons avec les autres dans le tableau suivant où nous distinguons les élèves qui demandent de l'aide au maître seul et ceux qui font aussi appel à leur famille, suivant le niveau, le milieu familial et la classe, avec le mêmes codes que précédemment :

	niveau				milieu				total
	I	II	III	IV	I	II	III	autres	
codes m, m*	8	3	6 + *5*	6	7	11	5+ *4*	1+*1*	24 +*5*
codes f, mf, mfc	2+*1*	1 +*3*	2 + *7*	*1*	3	2+ *3*	1 + *6*	*3*	6 +*12*

Nous avons regroupé les codes de façon à séparer les élèves qui demandent des explications à leur famille de ceux qui n'en demandent pas.

On voit que, sur ce point, la différence se fait surtout entre les classes, les élèves de CM2 demandent beaucoup plus l'aide de leur famille que ceux de CM1. De plus, en CM2, les élèves qui ne demandent que l'aide du professeur ou des camarades sont tous des élèves de niveau assez bas (III) et de milieu modeste. Il est vrai que les élèves de niveau I ou II ou de milieu moyens sont très peu nombreux dans cette classe. En CM1, les élèves qui demandent des explications à leur famille sont presque tous de milieu favorisé ou moyen, mais ils sont minoritaires dans tous les milieux. *Ceci semble montrer que, contrairement à une idée répandue, les familles des élèves de milieu défavorisé s'intéressent au travail scolaire de leurs enfants et essaient de les aider, au moins au niveau de l'école primaire. Ceci est plutôt renforcé par l'existence de familles nombreuses : l'aide vient souvent des frères et sœurs.*

e) *Quelles sont les occasions de faire des mathématiques hors de la classe ?*

Nous avons ici distingué les élèves qui faisaient des mathématiques dans leurs jeux ou pour s'entraîner (code A), ce qui correspond à un projet différé, ceux qui déclarent en faire dans la vie courante (code C), avec donc un projet d'utilisation immédiate, et ceux qui déclarent les deux (code B).

	niveau				milieu				total
	I	II	III	IV	I	II	III	autres	
code A	12	2	6 + *2*	7	10	12 +*1*	4 +*1*	1	27 +*2*
code B			*3*	*1*		*1*	*3*		*4*
code C	*1*	1 +*2*	2 + *6*			1+ *1*	2 + *5*	*3*	3+*9*

Cette fois encore, la différence la plus grande est entre les classes : seuls 3 élèves de CM1, de milieu modeste ou moyen, songent à l'utilisation des mathématiques dans la vie courante, alors que c'est le cas de presque tous les élèves de CM2 qui répondent à la question. Autre différence, ce n'est le cas de presque aucun élève de bon niveau en CM1, alors que tous les élèves de niveau I ou II du CM2 font cette proposition. Evidemment, il s'agit là d'effectifs extrêmement faibles mais il se pourrait que l'ancrage des mathématiques dans la vie courante n'ait pas la même signification ni la même valeur pour tous les élèves. Cela traduit sans doute aussi une différence dans les pratiques des classes : recours au jeu ou à la vie quotidienne pour contextualiser les activités mathématiques. Il se peut d'ailleurs que le choix des maîtres ne soit pas indépendant du milieu dominant de la classe.

f) Profils d'élèves

A partir des variables distinguées précédemment et des valeurs retenues (u,v,w, F,G,H, m,f[3], A,B, C), nous avons établi tous les profils possibles et réparti les élèves sur ces profils. On trouve une grande dispersion : sur les 54 possibles 25 sont représentés (2 élèves n'ont pas de code A,B,C ; 45 élèves ont un profil complet sur les 4 variables. Seuls 5 profils regroupent au moins 3 élèves et 4 en regroupent 2 :

- w, F, m, A : 5 élèves qui trouvent qu'il y a plus souvent plusieurs méthodes pour résoudre un problème que plusieurs solutions, qui pensent que pour devenir bons en maths, il faut surtout écouter le maître ou se faire expliquer ce qu'on n'a pas compris, qui demandent des explications au maître ou aux camarades, mais pas à la famille, et qui font des maths pour s'entraîner ou pour s'amuser. Parmi eux on trouve 2 enfants des classes supérieures, 2 des classes moyennes et 1 qui n'a pas donné la profession de ses parents. Ils sont tous au CM1, 2 ont une réussite I ou II et 3 une réussite III ou IV, mais cela ne coïncide pas avec le milieu social.
- w, G, m, A : 5 élèves, tous du CM1, 3 de milieu favorisé, 2 de milieu moyen, 3 avec une réussite I ou II, 2 avec une réussite III ou IV. La différence avec le profil précédent, c'est qu'ils comptent plutôt sur l'apprentissage des leçons pour réussir.

Si l'on ajoute 2 élèves du CM1 qui ont le profil w, H, m, A, (tous deux ont un niveau I ou II, l'un des classes moyennes, l'autre de milieu populaire), cela fait 12 élèves du CM1 qui ont en commun les caractéristiques w, m,

[3]nous avons regroupé sous le code m tout ce qui ne contenait pas f et sous le code f tout ce qui le contenait, distinguant ainsi le fait de demander ou non de l'aide à la famille.

A, regroupement de 3 valeurs de variables majoritaire dans cette classe. Ce regroupement est plutôt caractéristique des milieux favorisés (5 des 10 élèves de milieu favorisé, 5 des 13 élèves de milieu moyen, 1 des 6 élèves de milieu populaire) et de la réussite (7 des 15 élèves qui ont un niveau I ou II contre 5 des 15 élèves qui ont un niveau III ou IV), mais on sait que la réussite est liée au milieu. On retrouve cependant sur ces 12 élèves les différences qu'on avait prévues et repérées sur l'ensemble des élèves : les codes G et H (élèves qui mettent en avant l'apprentissage des leçons ou la résolution d'exercices) sont plus liés à la réussite que le code F (élèves qui parlent seulement de bien écouter ou de se faire expliquer ce qu'on n'a pas compris) : 2 niveaux I et 3 niveaux III dans les codes F, 2 niveaux IV et 3 niveaux I dans les codes G, 2 niveaux I dans les codes H.

- v, F, m, A : 4 élèves du CM1, 1 de milieu favorisé, 3 des classes moyennes, 2 ayant un niveau I ou II, 2 un niveau III ou IV. Ils trouvent aussi souvent qu'un problème a plusieurs solutions que plusieurs méthodes, espèrent réussir en écoutant au maître ou en se faisant expliquer ce qu'ils n'ont pas compris, demandent des explications au maître et font des mathématiques pour s'entraîner ou pour s'amuser.
- v, H, m, A : 3 élèves du CM1, un de chaque catégorie sociale, 1 de niveau II, 2 de niveau IV.

Si l'on ajoute 2 élèves du CM1 qui ont le code v, G, m, A, 1 de milieu moyen et de niveau I, 1 de milieu populaire et de niveau IV, cela fait 9 élèves du CM1 qui ont en commun les codes v, m, A, 2 sur les 10 de milieu favorisé, 5 sur les 13 de milieu moyen, 2 sur les 6 de milieu populaire, 4 ont un niveau I ou II dont 2 un code F, 1 un code G et 1 un code H, 5 un niveau III ou IV, dont 2 ont un code F, 1 un code G et 2 un code H. Ce regroupement semble plutôt lié aux classes moyennes et relativement indifférent par rapport à la réussite. Nous avions déjà vu que les codes v et F étaient surtout le fait des élèves issus des classes moyennes, le couple v, F est le fait de 5 enfants de milieu intermédiaire, 1 de milieu favorisé, 1 de milieu populaire, tous 7 du CM1 et d'1 élève du CM2 qui n'a pas donné la profession de ses parents.

Par ailleurs, on trouve 10 élèves du CM1 regroupés sur les codes F, m, A. Si l'on croise pour ces élèves le milieu d'origine et la réussite, on trouve :
réussite I et milieu I : 2 élèves
réussite I ou II et milieu II (ou I-II) : 2 élèves
réussite I ou II et milieu III : 0 élève
réussite III et milieu I : 1 élève
réussite III ou IV et milieu II : 3 élèves.
réussite IV et milieu III : 1 élève.
Le dernier élève a une réussite III mais ne donne pas la profession des parents.
Ce regroupement ne semble pas lié à la réussite pour les élèves de milieu I mais il est peut-être une entrave à la réussite pour les élèves de milieu populaire : remarquons que les 3 élèves de ce milieu qui réussissent ont des codes (w, G, mf, C), (w, H, m, A), (v, H, m, A), c'est-à-dire qu'ils donnent tous de l'importance à l'apprentissage des leçons ou à la résolution de beaucoup d'exercices.

Ces résultats doivent bien sûr être considérés avec la plus grande prudence puisque, dans cette classe, il n'y a que 6 élèves de milieu populaire et que beaucoup de facteurs interviennent dans la réussite. Remarquons d'ailleurs que 22 élèves sur 30 ont les codes m, A qui semblent caractériser cette classe, alors qu'il n'y en a aucun en CM2. Nous avons croisé le milieu et la réussite pour les codes F, m, A. Si nous faisons de même pour les élèves qui ont un code G, m, A ou H, m, A, nous trouvons une réussite constrastée (I ou IV), sauf pour un élève de milieu III et réussite II:
milieu I et réussite I : 2 élèves
milieu I et réussite IV : 2 élèves
milieu II (ou I-II) et réussite I : 3 élèves
milieu II (ou I-II) et réussite IV : 2 élèves
milieu III et réussite I ou II : 2 élèves
milieu III et réussite IV : 1 élève

- v, H, f, C : 4 élèves, tous du CM2, 3 de niveau I ou II dont 1 des classes moyennes et 2 qui ne donnent pas la profession des parents, 1 de niveau III et de milieu populaire.

C'est le seul regroupement important d'élèves du CM2. On a un regroupement de 6 élèves du CM2 et 1 élève du CM1 sur le triplet v, H, f. L'élève du CM1 est de milieu favorisé et de niveau I, avec un code A, les 2 élèves de CM2 supplémentaires sont de milieu populaire et de niveau III. Nous retrouvons là le fait que pour les élèves de milieu populaire, et particulièrement pour les élèves du CM2, la réussite semble liée au code C, c'est à dire au fait d'utiliser les mathématiques dans la vie quotidienne.

Nous avions remarqué que le regroupement m, A (ne demander des explications qu'au maître ou aux camarades et faire des mathématiques hors de la classe pour s'entraîner ou pour jouer) n'existait pas au CM2 alos qu'il était largement majoritaire au CM1. Inversement, nous avons 9 élèves du CM2 et un seul au CM1 sur

les couples f, C ou f, B : demander des explications à la famille et faire des mathématiques dans la vie quotidienne. L'élève du CM1 est de milieu III et réussite II, ceux du CM2 se répartissent ainsi :
milieu II et réussite I : 1 élève
milieu II et réussite IV : 1 élève
milieu IV et réussite II : 1 élève, l'autre élève qui a une réussite II ne donne pas la profession des parents.
milieu III et réussite III : 5 élèves.
Nous retrouvons là tous les élèves de niveau I ou II sauf celui qui n'a pas dit à quelle ocasion il faisait des mathématiques hors de l'école.

Deux des élèves du CM2 qui ont une bonne réussite (niveau I ou II) n'ont pas donné la profession de leurs parents mais ils sont de milieu populaire ou des classes moyennes, aucun des enfants de la classe n'étant issu de milieu favorisé; un autre a des parents qui ne travaillent pas. Nous pouvons ajouter ces 3 élèves à ceux de milieu populaire ou moyen qui réussissent, cela nous fait alors un effectif de 9 au CM1 (6 de milieu II, 3 de milieu III) et 4 au CM2 (1 de milieu II, 1 de milieu IV et 2 de milieu II ou III). Les profils de ces élèves sont respectivement :
- w, F, m, A : 1 élève milieu II, CM1
- w, G, m, A : 1 élève milieu II, CM1
- w, G, f, C : 1 élève milieu III, CM1
- w, H, m, A : 2 élèves milieux II et III, CM1
- v, F, m, A : 1 élève milieu II, CM1
- v, F, f, A : 1 élève milieu II, CM1
- v, G, m, A : 1 élève milieu II, CM1
- v, H, m, A : 1 élève milieu III, CM1
- v, H, f, C : 1 élève milieu II, 1 élève milieu II ou III, 1 élève milieu IV, tous du CM2
- u, F, f : 1 élève milieu II ou III, CM2.

Six élèves demandent de l'aide à leur famille contre 7 qui n'en demandent qu'au maître ou aux camarades, alors que pour les élèves qui ne réussissent pas, dans les mêmes milieux, les effectifs sont respectivment de 10 et 14. C'est surtout vrai au CM2 où les chiffres sont de 4 et 0 pour ceux qui réussissent, alors qu'ils sont de 8 et 5 pour ceux qui ne réussissent pas.

Pour les enfants de milieu défavorisé, le fait de demander de l'aide à la famille semble donc un facteur de réussite. Cela rejoint probablement ce que disent les maîtres quand ils soulignent l'importance de l'entente entre la famille et l'école ou du soutien de la famille pour la réussite des élèves.

3.3. Analyse par classe

Nous avons comparé les deux classes pour chaque question. Nous avons vu que ce facteur était d'ailleurs très important et souvent dominant par rapport aux autres. Les différences entre les classes peuvent être liées à la personnalité du maître, à ses représentations des mathématiques et à sa pratique de classe. Elles peuvent être liées aussi à l'environnement dans lequel se trouvent les élèves : au CM2 la classe est composée majoritairement d'élèves issus de milieu populaire avec une minorité des classes moyennes ; de plus ces élèves ont été dans des classes de ce type depuis le début de leur scolarité. S'ils ont rencontré des élèves de milieu favorisé, c'est très rarement et avec un effectif trop petit pour qu'ils puissent avoir réellement du poids dans la classe. Ce phénomène pourrait aussi expliquer qu'au CM1, les réponses de tous les élèves se rapprochent de celles des milieux favorisés.

Rapprochons maintenant les réponses des élèves de celles de leurs enseignants (voir chapitre 6), notamment sur 4 points : ce que peut faire un élève pour progresser en maths, ce que devrait être un bon enseignement des maths, rôle du travail à la maison, ce que le maître cherche à valoriser chez ses élèves.

L'instituteur du CM1 insiste beaucoup sur le jeu comme élément de progrès pour tous les élèves et sur la mémorisation pour ceux qui sont en difficulté. Un autre point clé lui paraît la confiance de la famille et l'importance qu'elle accorde à la réussite de l'enfant à l'école. Pour l'enseignement, il insiste sur le fait de partir de situations vraiment concrètes et de manipulations, il pratique le travail en groupes. Ce qu'il cherche à valoriser chez ses élèves, c'est la communication sans crainte de faire des erreurs car les erreurs sont source de progrès. Le travail à la maison sert à entretenir de bonnes relations avec les parents et à exercer la mémoire des élèves Ce qui manque essentiellement aux élèves en difficulté, c'est la maîtrise du français et le fait qu'on ne propose pas des situations suffisamment concrètes aux élèves et qu'on ne leur laisse pas assez le droit de se tromper.

L'instituteur du CM2 pense que pour progresser l'élève doit suivre la classe parce qu'il ne peut pas faire grand chose à l'extérieur ; pour le faire avec profit, il doit manifester une certaine curiosité et surtout bien cerner la problématique. Le maître doit l'aider à faire l'inventaire des outils qu'il a et créer des situations de questionnement, de recherche. Le plus important c'est la situation familiale sur le plan affectif et la vision de l'école qui est donnée dans la famille. Pour lui, le poids de la famille est beaucoup plus grand que celui de l'école. Il pense que le travail en groupes peut améliorer l'apprentissage des élèves mais que c'est très difficile à mettre en place avec des élèves en difficulté qui manquent d'autonomie. Le travail à la maison sert à faire la liaison avec la famille et à préparer l'entrée au collège mais il a beaucoup d'aspects négatifs, les journées étant déjà chargées, il empêche les élèves d'avoir un autre travail intellectuel hors de l'école. Ce qu'il cherche le plus à valoriser chez ses élèves, c'est l'effort. Ce qui lui paraît le plus manquer aux élèves en difficulté, c'est la mémoire, des capacités d'analyse et de synthèse, des méthodes.

On voit que, si ces discours concordent sur un certain nombre de points, notamment l'importance que la famille donne à l'école et celle des situations de recherche, ce ne sont pas les mêmes choses qui sont mises en avant :
- le milieu d'origine des élèves semble avoir un rôle beaucoup plus déterminant pour l'instituteur de CM2, et nous avons vu qu'il l'avait effectivement.
- l'aide que l'enseignant apporte aux élèves, le fait de suivre en classe semble aussi plus important pour l'instituteur de CM2. Les élèves en difficulté manquent d'autonomie et de méthode, c'est sans doute pour cette raison qu'il est important que l'enseignant fasse l'inventaire des outils dont les élèves disposent. Mais à quel moment les élèves apprendront-ils à le faire eux-mêmes ? L'instituteur du CM1 semble donner une grande importance au jeu pour cela. Peut-être est-ce une des raisons pour lesquelles les élèves de CM1 citent plus souvent que ceux de CM2 les jeux comme occasion de faire des mathématiques. D'ailleurs parmi les 2 élèves de CM2 qui citent les jeux, l'un dit "jouer à la maîtresse", ce qui est en fait faire des mathématiques pour s'amuser, l'autre dit simplement "pour les jeux, les achats", alors que 3 élèves de CM1 citent des jeux "monopoly", "le compte est bon", "jeu électronique".

3.4. Retour sur la méthodologie

Comme prévu, les entretiens individuels nous donnent des résultats plus précis que les réponses à des questionnaires écrits. Cependant, les questionnaires nous ont permis de dégager quelques éléments qui paraissent liés à la réussite des élèves, notamment quand ils sont issus de milieu modeste : la part de responsabilité qu'ils se donnaient dans l'apprentissage, le fait de pouvoir demander des explications dans la famille, la relation faite entre les mathématiques en classe et leur usage dans la vie quotidienne. Le questionnaire n'est pas suffisamment précis sur ces points, par exemple on n'a pas fait intervenir le paramètre qu'ont mentionné certains élèves "bien regarder, bien réfléchir". Encore aurait-il fallu lui donner une forme suffisamment concrète pour qu'elle ait une signification. On aimerait par exemple avoir des informations plus précises sur la manière dont l'élève s'y prend pour apprendre ses leçons (est-ce en lisant, en récitant, en essayant de faire un exercice ?) ou pour résoudre un problème (lit-il le texte en entier, qu'est-ce qu'il y cherche, vérifie-t-il ses résultats, comment ?). Les questions générales sur l'image des mathématiques sont en général trop floues et il est difficile de les interpréter.

Nous avons essayé de préciser ces questionnaires l'année suivante avec des élèves de 6ème.

4. Les mathématiques vues par des élèves de 6ème.

Durant l'année scolaire 88 - 89, nous avons observé des élèves de 6ème en difficulté, regroupés dans une même classe et prévus pour faire un cycle 6ème - 5ème en 3 ans. Nous avons interrogé ces élèves en entretiens individuels à 2 reprises, au début et au milieu de l'année[4]. Nous avons aussi observé régulièrement une autre classe, en deuxième année de ce cycle, intermédiaire entre la 6ème et la 5ème, mais sans observation individuelle.

La plupart de ces élèves ont, au début de l'année une vision plutôt positive des mathématiques, qu'ils déclarent aimer assez, à quelques exceptions près. Ils aiment presque tous l'anglais qui est une matière nouvelle. Mais beaucoup d'entre eux aiment et réussissent les opérations (sauf la division le plus souvent) alors qu'ils n'aiment pas et ne comprennent pas les problèmes. En général, ils aiment ce qu'ils trouvent facile et n'aiment pas ce qu'ils trouvent difficile. Sur le plan des contenus, certains ont de grosses difficultés en numération écrite, la technique de la multiplication est presque toujours acquise mais pas celle de la division. Comme prévu, la plupart ont des difficultés avec l'ordre des décimaux et surtout avec la résolution de problèmes : beaucoup d'élèves ont du mal à poser des questions à partir d'un texte de problème.

En fait des problèmes de discipline se sont rapidement posés dans cette classe, quelques élèves étant assez nettement opposants, et les professeurs se sont montrés très déçus de cette organisation qui avait bien fonctionné l'année précédente.

En février, plus du tiers des élèves ne sont pas contents d'eux-mêmes, de leur travail ou de leurs progrès. Un autre tiers se juge en progrès. Près de la moitié des élèves ne sont pas contents d'être dans cette classe et

---

[4] Ce travail est rapporté dans le cahier DIDIREM n° 5, publication de l'IREM de Paris 7. Les questionnaires utilisés sont reproduits parmi les documents annexés à ce chapitre.

préfèreraient être dans une sixième "moyenne". Ils sont majoritaires parmi les élèves qui ne sont pas contents de leur travail. Les élèves qui se trouvent en progrès sont au contraire souvent contents d'être dans une classe où on avance à leur rythme. Il est probable que chacun des facteurs agit sur l'autre. Les points jugés les plus difficiles par la moitié des élèves à chaque fois sont encore la division, la résolution de problèmes et les méthodes de travail.

Plus de la moitié des élèves (8 sur 15) sont défavorables au travail en groupes alors que 4 seulement le jugent positifs. Cela n'est pas étonnant dans la mesure où ils ne posent pas de question à leurs pairs et où certains même n'aiment pas expliquer ce qu'ils ont trouvé. Ils apprennent leurs leçons mais ne cherchent pas d'autre exercice que ceux qu'on leur demande et la majorité ne refait pas les exercices faits en classe. Ils ne se servent pas de leur livre sauf pour lire le texte de l'énoncé de l'exercice à chercher. Ils passent en général peu de temps à chercher un même exercice (moins de 10 minutes). Pour résoudre un exercice, la plupart des élèves essaient de se souvenir de leur cours mais moins de la moitié d'entre eux se sert pour cela de son cahier ou essaie de se souvenir d'un exercice qui ressemble à celui qu'ils cherchent.

L'observation en classe et les résultats aux tests donnés à chaque fin de trimestre nous ont permis de constater quelques faits saillants dans le comportement des élèves face aux mathématiques.

Problèmes d'expression et de lecture.

Aussi bien à l'oral qu'à l'écrit, les élèves n'arrivent pas à faire des phrases, même simples ayant un sens, à utiliser correctement le vocabulaire. Leur expression est presque toujours partielle et imprécise, ils parlent en termes d'action et très difficilement en termes de description (exemples "la médiatrice, c'est la perpendiculaire" ; on demande comment construire la médiatrice d'un segment, réponse "on met le compas au milieu" ; question : qu'est-ce qu'un triangle rectangle? réponses : "on prend une équerre", "on a un côté perpendiculaire").

Inversement, la plupart des élèves rencontrent de grandes difficultés pour décoder seuls un texte de problème et prendre en compte la totalité de l'information. Par exemple, dans un problème portant sur des modèles réduits de voitures, ils mettent sur le même plan toutes les informations numériques, celle qui indique l'échelle et celles qui donnent des dimensions des voitures.

Manque d'investissement, lassitude.

Le manque d'investissement se fait en particulier sentir dans les contrôles où un certain nombre d'élèves n'abordent pas une partie des questions, et dans le travail à la maison. Ceci est sans doute à relier à un manque de méthodes et d'assurance de réussir.

En classe, les élèves se lassent très vite d'une situation, il est de ce fait très difficile de mener à terme l'exploitation de la situation et de tirer les bénéfices de la recherche amorcée. Certaines situations ont cependant bien "accroché" les élèves, par exemple la comparaison de tarifs de taxis, particulièrement en utilisant des représentations graphiques. Ces situations restent plus facilement dans la mémoire des élèves et pourraient jouer le rôle de situations de référence, ce qui n'est pas le cas pour des situations qui n'aboutissent pas.

Manque de méthodes

Les élèves ne savent pas comment aborder un problème. Au mieux, ils essaient de se souvenir du cours mais ne savent pas comment l'utiliser. Ils semblent manquer de situations complexes de référence ce qui les amène à se replier sur la recherche d'une opération à effectuer ou d'une règle à appliquer. De plus, ils ne prennent souvent en compte qu'une partie de l'information et ont du mal à l'organiser pour se faire une représentation du problème. Cependant, les élèves commencent à prendre l'habitude de contrôler les résultats qu'ils avancent.

Le manque de méthodes et d'investissement rend plus difficile le travail à la maison. Une "aide individualisée" (heures supplémentaires en fin de journée par 1/2 classe ou 1/3 de classe) permettait aux élèves de faire leurs devoirs en présence d'un enseignant, elle avait pour but de donner des méthodes de travail de façon à faire acquérir un minimum d'autonomie aux élèves. En fait peu d'élèves ont vraiment progressé sur ce plan.

Difficultés de socialisation

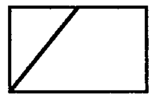
Le travail en groupe et les phases collectives sont difficiles à gérer parce que beaucoup d'élèves, comme ils l'ont eux-mêmes reconnu lors des entretiens de février, sont incapables de communiquer : ils ont du mal à s'exprimer, certains n'en ont pas envie, ils sont incapables d'écouter leurs camarades et de respecter des règles élémentaires de prise de parole. Les élèves recherchent une relation avec l'adulte, on a d'ailleurs constaté des progrès dans l'écoute du professeur, mais les relations entre élèves à propos du travail restent difficiles. Certaines activités ont cependant permis d'avancer sur ce point, en petits groupes, notamment l'informatique où la collaboration est rendue nécessaire par les conditions matérielles et où le professeur n'est plus l'interlocuteur privilégié. Inversement, le travail sur ordinateur rend quasiment impossible les phases collectives parce que les élèves acceptent plus mal de s'interrompre (la machine joue un rôle attracteur) et qu'ils travaillent à des rythmes différents. Le bilan doit être fait dans une séance ultérieure.

Manque de capitalisation des élèves

Les résultats de l'observation et des tests de fin de trimestre ont permis de confirmer que ces élèves ont du mal à retenir le cours, à mémoriser vocabulaire et propriétés.

Recherche d'algorithmes

Dans l'ensemble, les élèves cherchent à utiliser le plus possible des algorithmes, qui constituent des économies de pensée. Dès le début de l'apprentissage d'une notion, ils se construisent des règles de fonctionnement qui, souvent, ne prennent en compte qu'une partie de l'information et qui ont des domaines de validité très restreints, voire nuls. Par exemple, au moment de l'apprentissage des fractions, dès la première séance, l'écriture fractionnaire a été liée au report : 1/3 est la mesure de la longueur qui se reporte 3 fois dans l'unité. Les élèves retiennent le report mais non le rôle de l'unité.



Ainsi, alors qu'il s'agissait d'évaluer des portions de feuille de papier par rapport à la feuille entière, 3 groupes d'élèves qui avaient à évaluer les 2 pièces ci-contre dont la réunion faisait une demi-feuille ont bien évalué le triangle en disant qu'il se reportait 4 fois dans la demi-feuille mais ont estimé que le trapèze valait 1/3 parce que le triangle se reportait 3 fois dans le trapèze.

Cela pose le problème de l'équilibre à adopter lors de l'institutionnalisation : si, à l'issue d'une phase de recherche, il n'y a pas d'institutionnalisation, les élèves ne retiennent que le contexte et une partie de l'action sans réflexion sur celle-ci, mais dès qu'il y a institutionnalisation, on a mise en place d'une règle qui va être utilisée sans référence au sens. On est alors devant la nécessité de déstabiliser ces règles aussitôt qu'elles s'installent, ce qui peut alors détruire toute possibilité de référence à la situation dans la construction de la notion qu'on visait dans cette situation.

Difficultés à changer de point de vue

Une notion abordée dans un contexte est difficile à réutiliser dans un autre contexte. Les changements de cadres sont difficiles pour tous, d'autant plus pour certains élèves qui ont des connaissances très peu mobilisables dans un des cadres en jeu. Par exemple un des élèves de la classe réussit très bien dans le domaine géométrique mais a beaucoup de difficultés avec les nombres, il résiste à traduire les problèmes dans le cadre numérique ; pour un autre élève, c'est exactement le contraire.

Conclusion.

Les observations faites en classe de 6ème confirment et précisent ce qui ressortait du travail précédent (voir chapitre 3 notamment).

Les réponses aux différents questionnaires décrits dans ce chapitre nous ont permis d'avoir quelques précisions sur le contrat didactique concernant le problème de mathématiques et sur le lien entre la réussite des élèves de milieu populaire et certaines variables

On n'a pas les moyens, pour les élèves de CM2, d'avoir des informations précises sur le contrat didactique concernant le problème de mathématiques, et on ne les a que de façon très indirecte au CM1. Il semble néanmoins que, dans cette classe, les élèves ont intégré la nécessité d'une question dans un problème. Cependant, au CM2, beaucoup de réussites médiocres dans la résolution du problème des oranges s'expliquent par la mauvaise interprétation, ou l'absence d'interprétation, des résultats de la division. C'est même une différence assez nette entre les résultats du CM1 et du CM2. Tout se passe comme si, pour certains élèves dont on peut prévoir qu'ils seront en difficulté en mathématiques, le problème était vu comme un prétexte pour faire des opérations, considérées comme la tâche essentielle, plutôt que les opérations comme un moyen de trouver une réponse à une question.

Nous avons remarqué que, pour certains élèves de CE1, la question ne pouvait se dissocier de la réponse. Il semblerait que c'est encore le cas pour certains élèves de CM2 face à un problème de mathématiques : on chercher une réponse en termes d'opérations à effectuer sans chercher à éclaircir la question à laquelle on répond ni le rapport entre cette question et les données.

De plus, pour les problèmes bâtis sur un contexte de la vie quotidienne, il faut écarter les questions qu'on ne peut pas traiter par le calcul à partir des données, et, pour la résolution, les informations qu'on pourrait tirer de son expérience et qui ne sont pas fournies, même si on peut s'en servir comme vérification. Il nous semble que pour les jeunes élèves, même s'ils répondent à des questions absurdes du type "âge du capitaine", ils font intervenir aussi des connaissances qu'ils ont par ailleurs sur la situation utilisée dans le problème, ce qui les amène à faire des hypothèses implicites supplémentaires. Remarquons que ces deux observations sont tout à fait compatibles : les réponses fournies pour les problèmes absurdes sont le plus souvent des réponses plausibles. D'ailleurs, le fait de répondre à des problèmes absurdes et de chercher l'opération à faire pour résoudre qui marque l'entrée dans un certain rapport au problème scolaire est peut-être aussi une étape nécessaire dans le cheminement vers la logique du raisonnement mathématique : on prend en compte les données fournies sans en ajouter.

. Par ailleurs, les réponses aux questionnaires nous ont permis de voir qu'en CE1 et en CM2, classes qui recrutent presque exclusivement des élèves issus de milieux populaires, la réussite de l'élève semble liée au fait de considérer sa responsabilité dans l'apprentissage (priorité donnée au fait d'apprendre ses leçons ou de faire beaucoup d'exercices). Cela semble beaucoup moins net pour les élèves de milieu favorisé du CM1 à qui le travail personnel scolaire paraît avoir moins d'importance, à ce niveau scolaire du moins.

De plus, il semble y avoir un effet de l'environnement scolaire dans la réussite des élèves de milieu défavorisé : leur réussite paraît meilleure dans l'école où ils sont minoritaires que dans celle où ils sont majoritaires. Il est bien sûr imprudent de tirer une conclusion de l'observation de 2 classes mais cette constatation recoupe des observations faites sur une plus grande échelle. Cela peut également s'expliquer en rapprochant ce résultat des déclarations des enseignants qui confirment qu'ils ne peuvent faire le même enseignement dans une classe forte et dans une classe faible.

Les élèves de milieu populaire semblent plus souvent que les autres demander des explications à leur famille et le fait de le faire semble un facteur de réussite pour eux. On peut penser que les élèves de milieu favorisé n'ont pas besoin d'aide pour les questions scolaires au niveau de l'école primaire parce qu'elle leur vient sous des formes variées, conversations, jeux, qui ne sont pas perçues par les enfants comme aidant au travail scolaire.

Le fait de citer l'utilisation des mathématiques dans la vie quotidienne semble plutôt le cas de bons élèves dans la classe où la majorité des élèves sont issus des milieux populaires, alors que les enfants de milieux favorisés de l'autre classe le font rarement. C'est peut-être un effet des activités que proposent l'enseignant : plus axées sur le jeu dans le CM1, plus axées sur les problèmes issus de la vie quotidienne dans l'autre classe. Mais c'est peut-être aussi le fait d'avoir un projet d'utilisation à court terme de ce que l'on apprend ou au contraire un projet différé pour les enfants de milieu favorisé : on est à l'école pour apprendre, les projets professionnels et l'utilisation qu'on aura des connaissances sont pour beaucoup plus tard (cf Isambert-Jamati, 1990).

Les conclusions que nous venons de tirer sont évidemment à prendre avec une extrême prudence, étant donné le petit effectif étudié. Ils sont à considérer comme des pistes de travail et non comme des résultats.

Nous allons voir dans le chapitre suivant comment certaines convictions des enseignants, notamment concernant l'enseignement à des élèves faibles peut renforcer les élèves dans leurs propres représentations et enclencher un cercle vicieux qui conduit à l'absence d'apprentissage des élèves. Dans le dernier chapitre, nous réinterpréterons les représentations des enseignants et des élèves dans une perspective didactique et nous reviendrons sur notre cadre théorique.

CHAPITRE 6

QUELQUES ELEMENTS CONCERNANT LES REPRESENTATIONS DES ENSEIGNANTS

Les difficultés de communication que nous avons parfois rencontrées quand il s'agissait de mettre au point une séance d'enseignement avec les enseignants des classes observées et notre pratique d'animation de stages de formation continue de l'IREM nous ont amenée à essayer d'éclaircir des éléments qui pouvaient être contradictoires ou suffisamment éloignés dans nos représentations des mathématiques et de leur enseignement. Nous avons d'abord recueilli des éléments d'information relativement informels en utilisant les opportunités que nous avions à ce moment là : nous avons interrogé les élèves instituteurs auxquels nous enseignions alors, lancé une discussion dans un stage de formation continue de professeurs de collège et distribué un questionnaire dans un autre. Ces premières observations informelles nous ont permis de mettre au point un questionnaire qui a servi de trame à des entretiens avec des instituteurs et des professeurs de collège dont ceux des classes où avaient eu lieu les observations.

Nous donnons d'abord une description rapide des réponses obtenues dans la première phase. Nous développerons ensuite les études de cas.

1. Des élèves-instituteurs

Pendant l'année scolaire 84-85, nous intervenions dans le DEUG premier degré[1] et nous avons demandé à nos élèves instituteurs de répondre par écrit aux questions suivantes :
Pour vous, qu'est-ce que les mathématiques ?
Qu'est-ce que faire des mathématiques, avoir une activité mathématique?
Qu'est-ce qu'enseigner les mathématiques ?
Quel intérêt avez-vous trouvé en faisant des mathématiques ? Quels désagréments ou quelles difficultés avez-vous rencontrées ?
Quand vous résolvez un problème de mathématiques, savez-vous si votre réponse est juste ou non ?
Les questions ont été formulées oralement, les élèves-maîtres les ont notées eux-mêmes. Nous avons recueilli 17 réponses sur 20 inscrits.

1.1 Les mathématiques, l'activité mathématique

Les réponses aux deux premières questions sont souvent assez mêlées, nous les regroupons donc. Il apparaît sur les mathématiques six grands pôles :

- *les mathématiques comme outil de modélisation* (exprimé par 13 personnes) : passer du concret à l'abstrait, problèmes de la vie quotidienne, permettre une réflexion sur ce qui nous entoure, rationaliser une situation réelle, la généraliser, décrire la logique de notre univers physique, donner une emprise sur le réel qui nous échappe, théoriser les phénomènes réels... Un normalien, par ailleurs étudiant en DEUG A écrit même *"C'est un langage rigoureux qui permet de décrire la logique de notre univers physique, formé à partir d'un ensemble cohérent de concepts dont le sens et l'existence sont étroitement liés aux questions résultant de l'observation de ce monde qui nous entoure. Faire des maths, c'est justement trouver les questions qui obligent à dégager, faire ressortir la logique abstraite de notre univers physique, rendant nécessaire l'utilisation du langage mathématique et son apprentissage."*

- *les mathématiques comme activité abstraite,* s'appuyant sur une logique rigoureuse, avec un langage rigoureux (exprimé par 14 personnes). Dans une autre réponse, cette conception est aussi exprimée mais de façon qui semble un peu contradictoire *"science exacte dans la mesure où elle s'appuie sur la démonstration et qu'elle accepte et justifie les exceptions possibles aux règles qu'elles élaborent (elles admettent la contradiction)"*

[1] à l'époque où les élèves instituteurs étaient recrutés après le baccalauréat et préparaient un DEUG spécial premier degré pendant leurs années d'école normale.

- *les mathématiques comme outil ayant des applications dans d'autres domaines* (5 fois). Pour l'un des normaliens, qui regroupe dans sa réponse l'activité mathématique et son enseignement, c'est même leur seule justification, *"Pour ma part, faire ou enseigner les maths uniquement dans le but de "pratiquer une activité mathématique" n'a pas de sens. Elles ne servent à rien. Elles n'existent que si elles s'incluent dans un projet général de travail tout comme le français ou autre, c'est-à-dire que l'on doit amener les notions mathématiques à partir des matières dites "secondaires" : la géographie, les sciences etc... Les maths sont des outils. Là uniquement elles auront un sens et je pense que les enfants y attacheront plus d'intérêt."*

- *les mathématiques comme une somme de connaissances et science à part entière* est une représentation qui est assez peu exprimée : un seul normalien l'exprime clairement :*"une science qui énonce des théorèmes, des définitions, des formules"* (pour lui faire des mathématiques c'est appliquer des formules, faire des exercices, mais il évoque aussi l'aspect ludique), deux élèves-instituteurs parlent de calculs, un autre dit à propos de l'activité mathématique : *"utiliser des connaissances déjà acquises pour aboutir à un nouveau concept, une autre formulation des données".* Seules 3 personnes parlent de résolution de problème à propos de l'activité mathématique.

- 3 réponses font intervenir des *considérations sociales* : activité fondamentale, indispensable, ce qui ne va pas forcément de pair avec une vision très positive des mathématiques, et avec, dans l'exemple qui suit, une curieuse identification entre le cours magistral et les mathématiques "pures" (peut-être l'auteur ne conçoit-il pas qu'on puisse s'intéresser à des problèmes internes aux mathématiques ?) *"faire des maths pour des maths n'a à mon avis pas grand sens. Certes certaines notions, certains modes de pensée sont indispensables à acquérir mais ils peuvent également s'apprendre à travers toutes sortes d'activités ne faisant pas appel au cours magistral"*

- 2 réponses font intervenir le *domaine affectif* à propos de l'activité mathématique : *"un moment d'intense "jouissance", d'immense frustration, parfois des deux lors de la saisie, la compréhension (ou la non-compréhension), la résolution des problèmes ou des jeux" "obtenir un certain plaisir intellectuel par la résolution de certaines données, avoir l'impression de débrouiller certains problèmes et peu à peu d'acquérir des techniques et une façon de raisonner permettant d'aller plus loin".*

Trois personnes évoquent l'*aspect jeu.*

Deux normaliens ne font apparaître que l'aspect modélisation ou application au réel sans faire allusion à l'idée d'abstraction, inversement deux autres ne parlent que de raisonnement logique ou d'abstraction, les 13 restant mentionnent les deux points de vue d'une manière ou d'une autre.

1.2 Enseigner les mathématiques

Les conceptions exprimées sur l'enseignement sont très fortement reliées à celles qui concernent l'activité mathématique et à l'intérêt ou au désagrément qu'ils ont trouvé à faire des mathématiques. Les témoignages portent sur plusieurs registres :

- *les acquisitions des élèves*
* leur faire acquérir un mode de raisonnement, des méthodes pour résoudre des problèmes ou même "construire la pensée" (5 réponses dans ce sens).
* leur faire acquérir des techniques, des connaissances (4 réponses de ce type, dont 2 ont aussi cité le point précédent). Une personne parle d'apprentissage des lois mathématiques.
* leur rendre familier un langage (1 réponse, l'étudiant de DEUG A dont nous avons déjà cité le début de la réponse).

- *les motivations* :
* leur faire ressentir le besoin d'apprendre les mathématiques (1 réponse)
* leur faire acquérir le goût des mathématiques, l'envie, développer la curiosité, leur faire aimer (et donc aimer soi-même) 4 réponses de ce type. Un élève instituteur va plus loin sur le plan affectif *"un patchwork intelligent et odorant de passion, d'angoisses, de doutes, de certitudes, de recherche, de jeux mais aussi l'apprentissage des principales lois mathématiques"* (il avait fait une réponse dans le même style –reproduite plus haut– à la question 2)

- *comment enseigner*
* le trait dominant est qu'il faut s'appuyer sur des activités concrètes, tirées de la vie quotidienne ou des autres disciplines (7 réponses dans ce sens). Parmi eux, deux précisent qu'il faut aller du concret vers l'abstrait , pour un autre c'est lié sans qu'on indique de sens *"faire passer quelque chose qui peut paraître abstrait au départ et qui en même temps peut être très proche de la réalité de tous les jours"*

* une autre réponse est plus ambigüe sur ce point :*"élaborer à travers des propositions de réflexion, des processus de raisonnement, d'ordonnancement d'une pensée plus rigoureuse mais ouverte, essayer de joindre à une théorie une pratique efficace soit en partant de la théorie pure soit de la pratique (expérimentation)"*

1.3. L'intérêt qu'ils y ont trouvé

Deux normaliens ne répondent pas à cette question, un autre déclare y avoir trouvé bien souvent des frustations et pour un quatrième, ce n'est pas mieux : *"Jamais passionné car j'ai souvent été en situation d'échec. Je n'ai jamais pris de plaisir à faire des maths puisque cette activité m'a toujours été imposée et d'une façon rarement abordable (seul centre d'intérêt : les probabilités en fin de terminale)".* Les deux intérêts les plus souvent cités par les 13 autres rejoignent ce qui a été dit pour les caractérisations de l'activité mathématique. Ce sont d'une part l'utilité pratique ou les applications en physique ou dans les autres matières (5 personnes), d'autre part l'acquisition de méthodes ou d'une certaine rigueur dans le raisonnement (6 personnes). Un normalien cite les deux. Un autre parle du bac : *"apports : certaines techniques, un certain type de raisonnement peut-être même une certaine logique... le bac..."* Certains (3) mentionnent un contenu qui les a intéressés (probabilités : 1 fois, algèbre : 1 fois, calcul mental : 2 fois, étude de fonctions : 1 fois) ou se placent sur un plan affectif ou épistémologique en faisant allusion explicitement ou implicitement au plaisir, à la sécurité, la certitude. Nous reproduisons intégralement ci-dessous ces 5 réponses, qui parlent aussi de raisonnement et de rigueur :
"plaisir de résoudre des problèmes et d'arriver à clore un sujet, d'arriver à un objectif par rapport au plaisir de l'activité littéraire souvent plus frustrante par l'impression qu'elle donne de ne jamais se terminer et de toujours soulever d'autres questionnements, ce qui peut sans doute être le cas des maths à un niveau plus élevé ; plaisir du raisonnement pour lui-même et en tant que tel"
"plaisir intellectuel ; développement de la curiosité ; rigueur du raisonnement ; avoir de la suite dans les idées et parfois conserver un certain entêtement à chercher la résolution d'un problème"
"plus de rigueur au niveau de la pensée et la possibilité de répondre "vrai ou faux" à un résultat trouvé"
"être en situation de recherche, définir un raisonnement, résoudre rapidement des opérations sur les nombres (calcul mental)"
"clarification et théorisation de lois aperçues de façon empirique, découverte de raisonnement logique, découverte d'un vaste terrain de jeu".

Le plan affectif apparaît en fait dans beaucoup de réponses, même quand l'intérêt exprimé est autre : *"m'a permis d'aborder la physique (au secondaire), j'ai enfin vu le côté "pratique" de tout ce qu'on m'a fait "avaler" de la matière "mathématique"."* Cet aspect se retrouve évidemment quand ils parlent de leurs difficultés qui sont souvent le pendant des intérêts.

1.4. Leurs difficultés

Elles tournent surtout autour de l'abstraction (6) et de l'absence de finalités (8)
"abstraction, faire quelque chose sans savoir son application utile",
"on ne sait pas où l'on va",
"travail sur des notions totalement abstraites (dont on ne peut concevoir aucune réalité ... ou alors cela a été mal appréhendé) ; acquisition de techniques de raisonnements dont il ne reste que le nom dans ma mémoire (et encore !) de vagues souvenirs sur les programmes du secondaire que je n'ai pas pu / su réutiliser (ou alors en fac ou pour briller en société !) ; quand au primaire , le "bourrage" de crâne, exercices répétitifs sans supports concrets ...",
"j'ai souvent l'impression de perdre mon temps car je ne vois pas toujours l'aboutissement du travail",
"ne pas avoir atteint un niveau suffisamment important pour voir concrètement à quoi servaient certains phénomènes mathématiques que j'ai acquis", "absence de but, c'est-à-dire que je ne voyais pas à quoi cela pouvait servir; une fois hors du cours elles ne me servaient plus"
"passer d'un raisonnement concret à un même raisonnement dans l'abstraction. Par exemple traduire les phrases françaises en données mathématiques (même problème face à l'informatique)"
"Quelle est l'utilité de tous ces théorèmes ?"

D'autres parlent de manque de motivations (2), de difficultés de concentration (2), de raisonnement ou de logique (5), de manque de rigueur (1) ou de soin (1, pour la géométrie), de manque de bases (2) ou de la difficulté de garder le fil, d'avoir une vue d'ensemble du problème (2) : *"ne pas perdre de vue où je vais devant la masse de calculs divers qui m'y conduit", "manque de synthétisation du problème".* Certains citent des contenus qui leur ont posé problème : trigonométrie, géométrie (2)

Les réponses expriment souvent l'inquiétude ou les désagréments ressentis, parfois de façon assez forte : *"Extrêmes désagréments au secondaire C avec l'impression de ne plus comprendre le pourquoi de ses réflexions et surtout de ne plus voir dans les maths qu'un moyen de s'en sortir dans notre société,"être bon en maths" semblant le seul moyen d'arriver ! Décrochage total et important dégoût à ce moment là. Difficultés lorsque je suis mise face à des problèmes qui semblent dépasser les moyens que je possède pour les résoudre ... sorte de blocage sans doute lié à un passé mathématique plein de désagréments"*

" en 3ème, je voyais des tas de chiffres, de formules et je n'avais aucune emprise dessus. Je n'étais pas méthodique, je prenais tout au hasard. Désagréments aussi quand je cherche longtemps, trop longtemps, ça m'énerve vite ... Souvent je me demande : mais où vont-ils chercher tout ça. Quand je vois, je comprends, mais pour trouver, c'est autre chose".

"critère sélectif de l'incompréhension"

"l'impression de ne rien comprendre, l'obligation d'apprendre toute notion "par cœur" pour parvenir à l'obtention de la moyenne"

Même l'élève-instituteur qui passe un DEUG A et qui par ailleurs dit son intérêt et son plaisir à faire des mathématiques exprime ces sentiments : *"parfois sentiment d'échec, de dévalorisation. L'entêtement conduit éventuellement à l'impatience et à un découragement momentané".* Les difficultés qu'il mentionne sont un peu différentes : *"se concentrer sur une longue durée, se poser les bonnes questions"*

Un des normaliens déclare ne pas avoir de réelle difficulté en mathématiques (en se demandant si c'est pédant de le faire) mais remarque que *"tels qu'ils sont enseignés en fac, les maths peuvent devenir inintéressants car trop loin de la réalité physique".*

1.5. Autoévaluation

Certains pensent savoir si leur réponse à un problème de mathématiques est juste ou non (5), pour d'autres, cela dépend du problème (3). Certains précisent : *"Je ne le sais vraiment que quand je peux le vérifier ou quand je m'appuie sur une règle, une loi et que je sais que je n'ai pas fait d'erreur de calcul. Mais quand je cherche un problème comme la situation du billard, je ne sais jamais si j'ai juste ou non", "je pense savoir si j'ai juste ou non dans le cas de mathématiques basées sur le calcul, les nombres, les choses concrètes. Pour ce qui est de démonstrations, de réflexions théoriques, je n'en sais absolument rien", "je sais si j'ai juste ou faux lorsque je peux le vérifier concrètement (ex : preuve par 9...), autrement non".* Pour un autre, *"une vague idée émerge, basée plus sur l'intuition que sur la vérification par une preuve quelconque".* Une normalienne répond simplement "non". Trois normaliens n'ont pas répondu à cette question et l'un d'eux se dérobe *""je sais qu'on ne sait jamais" disait Gabin".*

1.6. Conclusion

Les réponses sont variées et les sensibilités exprimées diverses. Cependant si l'on regarde l'ensemble des réponses d'une même personne au questionnaire, on voit se dégager quelques traits qui sont partagés par beaucoup de normaliens et qui pourraient constituer le noyau central d'une certaine représentation des mathématiques et de leur enseignement.

Eux-mêmes déroutés par l'abstraction de notions auxquelles ils n'ont rien compris, dans l'enseignement d'une matière dont ils n'ont pas vu les finalités, ils se donnent des objectifs pour enseigner les mathématiques de façon que les enfants ne rencontrent pas les mêmes difficultés qu'eux :

- *les mathématiques servent à résoudre des problèmes concrets*, il faut proposer aux enfants des situations de la vie quotidienne, là on voit la finalité ; il ne faut surtout pas faire des maths pour les maths.
- *l'abstraction est difficile, il faut la "faire passer"* parce qu'il est nécessaire d'acquérir un raisonnement logique, mais il faut "faire des maths sans le dire", abstraire en douceur "en élargissant les constatations vers une démarche plus abstraite".
- *donner des motivations aux enfants en les mettant en situation de recherche.*

Huit normaliens ont toutes leurs réponses conformes à cette représentation. Ils ont tous cité le manque de finalités dans leurs difficultés.

Un autre normalien, tout en partageant en gros les options précédentes, ajoute qu'il faut aimer les mathématiques pour les enseigner et les faire aimer par exemple à l'aide du jeu.

Deux autres ont mis en avant le fait d'aimer les mathématiques pour les faire aimer, dont un *"en les faisant apparaître comme des défis de logique, comme des jeux du raisonnement",* et les deux en en montrant les applications concrètes. Mais pour l'ensemble de leurs réponses, ils se rattachent plutôt à une autre représentation :

- les mathématiques sont un mode de raisonnement, c'est cela qui est un outil, qui peut aider à appréhender le réel ou à se libérer d'idées préconçues *"voir au delà des choses et des apparences"*, acquérir une démarche et l'expliciter. Pour eux, le réel est un endroit où peut s'appliquer ce raisonnement mais ce n'est pas la motivation principale de l'enseignement des mathématiques.

Six réponses se rattachent à cette représentation. Quand les auteurs mentionnent des difficultés, c'est plutôt au niveau des motivations ou du raisonnement.

Pour un autre (celui qui passe le DEUG A), c'est plutôt l'aspect acquisition d'un langage qui est mis en avant.

Un normalien a donné toutes ses réponses sur le plan affectif en se dérobant sur le fond. Il est difficile de le rattacher à un des groupes précédents.

1.7. Précisions sur l'échantillon

Je crois qu'il est utile de préciser qu'il s'agit d'un groupe de normaliens qui a choisi l'option mathématique, donc qui avait envie d'en faire, même si pour certains d'entre eux ce n'est pas une matière forte, comme le traduit ce commentaire en fin de réponse (nous n'avons pas les renseignements sur les études antérieures de cette étudiante) : *"J'ai choisi une filière mathématique parce que c'est dans cette matière que j'éprouve le plus de difficultés, et une angoisse face aux enfants. Notamment dans l'explication, au niveau de "faire passer les connaissances". Je trouve donc dommage (mais je me trompe peut-être, la suite le dira...) que l'on soit "sanctionné". Il aurait été plus facile pour moi de prendre français où j'aurais été sûre de ne pas avoir de problème quant à l'évaluation. Je pense pourtant que cette voie "facile" ne m'aurait rien apporté "professionnellement", d'où un paradoxe dans la formation. C'est dans les matières les plus faibles que l'on devrait être formé et non pas comme cela se fait souvent, là où on est les plus forts..."*.

Le groupe comportait 20 personnes. Nous avons des renseignements sur les études précédentes de 17 d'entre eux, qui ne coïncident pas exactement avec les 17 qui ont répondu au questionnaire : il nous manque les renseignements de début d'année sur 2 de ceux qui ont répondu au questionnaire en mettant leur nom et 3 ont répondu de façon anonyme. Sur ces 17, 8 ont un bac D, 3 ont un bac B, 1 a un bac F_6, 3 ont un bac G_2, 1 a un bac A_5, 1 a un bac A_3. Beaucoup (12) ont commencé des études supérieures et les ont abandonnées :
- 1 année d'école d'infirmiers (après un bac D)
- études de droit (2), l'un après un bac B, l'autre après un bac D
- 1 an de médecine (après un bac D)
- 1 trimestre en DEUG SNV (après un bac D)
- 1 a fait une année d'hypokhâgne et un DEUG de géographie (après un bac D)
- 1 a fait de la gestion économique en fac et à l'ENSET et un BTS de comptabilité gestion (après un bac B)
- 1 a fait une année de PCS 0 (après un bac B)
- 1 a fait une année de psychomotricité et une année de DEUG géographie après un bac A_5
- 1 an de sciences économiques (après un bac G_2)
- 1 an de BTS option comptabilité après un bac G_2
- 1 est actuellement en 2ème année de DEUG A (après un bac F_6). Certains ont également exercé divers emplois. L'un d'eux a même un CAP de conducteur routier tous tonnages.

2. Représentations répandues chez les professeurs de collège à partir de demandes et de réflexions exprimées en stage.

Les remarques qui suivent ne constituent pas une étude des dites représentations, ce qui aurait demandé un travail méthodologique qui n'était pas à notre portée au moment du recueil des données. Ce sont des pistes qui devaient pouvoir être pour nous le point de départ d'une réflexion théorique et méthodologique. Nous partons de déclarations de professeurs de collège dans les stages IREM et de réponses à un questionnaire, que nous rapportons dans les deux paragraphes suivants, avant d'inférer quelques éléments qui nous paraissent très fortement ancrés dans les représentations des professeurs de collège. Bien qu'ils ne figurent pas explicitement dans leurs déclarations, sans doute à cause même de leur évidence, ces éléments surgissent dès qu'on travaille sur une situation concrète qu'il s'agit vraiment d'utiliser dans l'enseignement..

2.1. Expressions à l'oral au cours de stages.

Dans ce paragraphe, nous rassemblons quelques traits caractéristiques apparus au cours de discussions dans des stages de formation continue de l'IREM . Nous nous appuyons en particulier sur l'enregistrement de la première séance d'un stage sur l'articulation entre les activités et le cours dans les nouveaux programmes de 6ème et 5ème qui a eu lieu en octobre 87 et sur le bilan du même stage en décembre 87. L'objet de cette première séance était d'expliciter les contraintes et les marges de manœuvre des professeurs pour traiter ce programme ainsi que les difficultés des élèves et de préciser ce qu'on attendait comme connaissances à l'issue de l'enseignement. Le point de départ était la première version d'un questionnaire[2] qu'A. Robert venait d'élaborer pour aborder l'étude des représentations des professeurs et le fil directeur était constitué par des interventions de R. Douady qui tendaient à donner les grandes lignes de la dialectique outil-objet et du jeu de cadres. C'est dans cette perspective qu'il faut replacer un certain nombre d'interventions, notamment celles qui portent sur les situations de recherche.

Il nous faut en outre remarquer que les professeurs qui viennent dans ce type de stages forment un public qui présente certaines spécificités et n'est certainement pas représentatif de tous les professeurs de collège. Ils ont fait la démarche de s'inscrire et de se déplacer, d'ailleurs certains d'entre eux ont déjà assisté à d'autres stages de l'IREM (ou autres) comme en témoignent certaines interventions. De plus, sur les 42 personnes présentes il n'y a qu'un petit nombre d'entre elles qui prennent réellement la parole. Néanmoins, il nous semble que les contraintes et les conceptions exprimées sont suffisamment représentatives du fonctionnement du système didactique pour mériter notre attention. Nous allons classer ces interventions suivant trois rubriques : les contraintes, les situations de recherche, les rapports entre le concret et l'abstrait. Certaines interventions relèvent de plusieurs rubriques, par exemple, il est clair que ce qui est dit sur les situations de recherche est très lié aux contraintes exprimées et aux conceptions des professeurs sur concret et abstrait. Enfin, les professeurs nuancent leurs réponses en fonction du niveau des élèves : s'il est faible, les contraintes sont plus importantes, on a encore moins le temps de faire des exercices de recherche en classe et on est obligé de donner la priorité aux techniques si on veut assurer un minimum de réussite des élèves. Les interventions des professeurs sont généralement transcrites en italiques, celles qui concernent des différences suivant le niveau des élèves ou les élèves en grande difficulté le sont en caractères `"courier"`.

Nous avons aussi ajouté, à propos d'élèves en difficulté, des remarques de professeurs de CAP agricole recueillies au cours d'un stage que nous avons animé à une autre occasion. Nous signalons à chaque fois l'origine particulière de ces citations.

2.1.1. Les contraintes exprimées

Elles sont d'origines diverses, on peut distinguer ce qui vient des élèves, ce qui vient de l'institution, ce qui vient des autres professeurs, et même ce qui vient de la propre histoire d'élève du locuteur.

Du côté des élèves (généralités, méthodes de travail).

Ce sont le plus souvent les manques qui sont mis en avant : manque de connaissances anciennes solides, manque de méthodes, manque de capitalisation des connaissances nouvelles, oubli. Les professeurs se déclarent gênés par l'hétérogénéité des classes et par le fait de devoir reprendre des apprentissages qui, à la limite, ne sont pas de leur compétence. Les motivations des élèves sont au contraire parfois jugées positives, les manques précédents étant alors jugés d'autant plus navrants.
Ainsi, un professeur qui enseigne en BEP déclare : *"les classes sont très très hétérogènes car les élèves sortent de 3ème ou de CAP ... et ce qui me frappe c'est que les acquis ne sont pas du tout acquis, or chacun a essayé de faire le maximum. Voyez-vous, on a besoin de travailler énormément les fractions pour le professeur d'électronique, alors je ne sais plus parce que j'ai enseigné en collège, mais il y a très longtemps donc évidemment j'ai un petit peu perdu de vue le programme et quand je me retrouve en début d'année en face de ces fractions, bon, ben, c'est terrible, fractions, puissances, ce sont des notions qui ne sont absolument pas connues"*, et un peu plus tard : *"...et aussi acquérir une méthode de travail. Ce qui frappe aussi, c'est qu'ils n'ont absolument pas de méthode de travail, qu'ils ne savent pas tenir un cahier propre et... Par contre, je remarque une chose, ils ont envie ; depuis 2 ans, j'ai des élèves qui ont envie ... je trouve que c'est vraiment extraordinaire, mais par contre, ils ne savent pas comment, alors c'est franchement regrettable et donc il y a un décalage dans ce sens, donc il faut leur donner une méthode et mon premier cours de cette année, c'est comment faut-il travailler en mathématiques"*. A une demande de précision, elle ajoute : *"Vous n'avez peut-être pas ce genre de livre en 3ème. J'ai la chance d'avoir un livre que je leur ai fait acquérir cette année, il s'adresse aux élèves de BEP 1ère et 2ème année, il y a un livre pour chaque type de classe et ce livre, c'est un cours-exercices. D'ailleurs, il y a très peu de cours et beaucoup d'exercices d'application avec des*

[2]voir le texte du questionnaire 1 en annexe. Il s'agissait d'une version légèrement différente, un peu moins détaillée ; notamment les questions 19 et 20 n'y figuraient pas. Elles ont été ajoutées à l'issue de cette discussion avec des professeurs de collège.

réponses à la fin du chapitre et en début de chapitre il y a un test, c'est dommage que ça soit au début mais on le place à la fin, et il y a un autotest qui demande 30 ou 40 minutes. Alors j'ai donc passé du temps à leur expliquer comment travailler avec ce livre. Evidemment, il y a toujours ceux qui ont envie et qui vont en faire énormément et d'autres qui vont... mais c'est une méthode qui est excellente. En plus, grâce à un stage que j'avais suivi, je leur ai appris que nous étions en somme de 2 catégories – auditifs ou visuels – et qu'il fallait qu'ils essaient de savoir dans quelle branche ils se situent afin de savoir ce qu'ils devraient améliorer car l'idéal ce serait d'être les deux. Cela nous a conduits assez loin ... Tout cela pour leur faire acquérir des méthodes de travail. Il y a des élèves qui ne savent pas tenir un cahier, c'est tout de même un peu dommage, alors j'utilise un cahier de cours, un cahier d'exercices et un cahier de recherche, on ne l'appelle pas cahier de brouillon volontairement. Nous l'utilisons lorsque nous faisons des exercices ensemble, mais ce cahier de recherche, je tiens à ce qu'il soit bien tenu, or il y a des élèves qui écrivent absolument dans tous les sens. De même, ils arrivent au tableau, bon, ben, n'importe où dans le tableau. Alors, je ne sais pas, je trouve que ce sont des questions qui sont fondamentales pour justement les faire progresser tant en mathématiques que dans les autres matières. C'est le point n° 1 en début d'année."

Du côté des contenus : Les difficultés constatées sur les nombres

Les exemples sont souvent pris dans le domaine des nombre décimaux, et beaucoup des erreurs fréquentes et connues sont citées:

- mauvais alignement des nombres (sans tenir compte de la position de la virgule, par exemple 3,5
+13

3,5x2 = 6,10
1,5 < 1,45
0,3x0,3 = 0,9
2,3 - 1,46 se termine par un 6
le produit doit être supérieur au nombre, la multiplication augmente, le carré aussi : *"l'autre jour on avait 3,... x 0,... ils m'ont dit c'est pas possible, la multiplication on doit trouver quelque chose de plus grand"*

Quand les nombres servent à désigner des mesures, il peut de plus y avoir des confusions induites par l'usage social : par exemple la confusion, signalée par un professeur, entre 1,5 F et 1F 5c. Cette erreur est aussi liée aux situations d'apprentissage par changement d'unités, notamment sur les longueurs puisque nous avons nous-même souvent constaté que pour les élèves en difficulté de 6ème 1,45 cm se lit aussi 1cm et 45 mm.

Les professeurs dénoncent le manque de sens des nombres décimaux pour les élèves et le fait que certaines mauvaises conceptions sont tenaces et réapparaissent régulièrement malgré un apprentissage apparent fugace.

"Les élèves sont très très loin de se rappeler de ce qu'ils ont fait à l'école primaire avec leurs petites bûchettes en dixièmes etc... ce qui fait que les nombres en fait n'ont aucun sens : unités, dixièmes, ça ne veut plus rien dire dans leur tête, ils ne se posent plus la question, ils le savent. Je pense que si on les questionne, ils sont capables de dire que la position de ce chiffre signifie ceci ou cela mais ils n'y pensent pas tout simplement.".

"La méthode la plus facile pour obtenir une solution est de simplifier au maximum, par conséquent ils vont séparer partie entière et partie décimale en 2 nombres et agir comme s'ils avaient 2 nombres."

"Je trouve que les décimaux c'est une des choses les plus difficiles à leur rentrer dans la tête parce que quand on suit les élèves, bon, en 6ème, 2 c'est un entier, c'est pas un décimal, on apprend, en novembre, ils sont bien convaincus que c'est un décimal, vous redémarrez en septembre en 5ème, c'est un entier, c'est plus un décimal, et puis en 3ème c'est pareil alors qu'on sait bien que 6 mois avant, ils étaient bien convaincus que c'en était un. J'ai bien l'impression que dès l'instant où on a introduit cette virgule au niveau du CE2 ou du CM1, ce nombre, cette virgule, ils ne savent pas quoi en faire, ils ne savent pas ce que ça représente un décimal, et tant qu'ils n'auront pas compris ça, on retombera sur ces erreurs là...

Dans le cas d'élèves en grande difficulté scolaire (CAP agricole), les professeurs insistent sur les problèmes de mémorisation : *"On a des élèves pour 2 ans, la première année, je traite tout le programme de maths et la deuxième année je recommence. Si je fais la moitié la première année et l'autre la deuxième année, eh bien, ils ne vont pas s'en rappeler : 15 jours après ils ne se rappellent plus, ils ne comprennent pas leurs formules"*, et ils avouent leur impuissance : *"ils ne savent toujours pas la numération, la méthode qu'on emploie, c'est celle qui a généré l'échec".*

Du côté institutionnel. L'évaluation.

Les programmes sont à peine mentionnés, sans doute parce que c'est une contrainte trop évidente. Ce qui apparaît le plus nettement c'est l'évaluation qu'on peut qualifier d'institutionnelle (examens notamment) qui a des incidences sur les pratiques à plusieurs niveaux. D'un côté les professeurs dénoncent ces contraintes qui les lient à des problèmes type, de l'autre, ils les trouvent nécessaires puisqu'ils sont perdus sans elles. De plus, elles les aident à répondre à une demande sociale des élèves, des parents et à leur propre désir de voir les élèves réussir. Un professeur s'exprime longuement sur ce point en reliant les contraintes au phénomène d'oubli constaté chez les élèves et à la non disponibilité de savoirs élémentaires *"...nous situer dans nos contraintes ... par exemple au niveau des contenus en 3ème, il y a les programmes, plus il y a le brevet des collèges, et puis il y a les annales, c'est-à-dire des exercices type qui apparemment sont destinés à évaluer, ça rejoint aussi les problèmes d'évaluation et de sélection, alors on ne peut pas sortir de là. Si vous prenez l'examen vous avez toujours le même type d'exercices de calcul, ça commence à évoluer mais de manière extrêmement anarchique ce qui fait qu'on ne sait plus retrouver nos petits là-dedans, parce que ça part tellement dans toutes les directions qu'on s'y perd un peu. Au niveau des contraintes, il y a aussi ces fameux programmes, et là aussi on est un petit peu prisonnier, l'exemple des nombres décimaux et des fractions, c'est vrai que les fractions, c'est un truc qu'on touchait en 4ème, qu'on touchait pas avant et qu'on touchait plus après... C'est vrai qu'il y avait un décalage dans l'étude de certains points mathématiques, ce qui fait qu'on oublie. Par exemple vous allez travailler sur les pourcentages en 6ème ou en 5ème ... et puis quand vous vous retrouvez en 3ème en sciences physiques et que vous avez un raisonnement à faire sur la proportionnalité, même l'application d'un pourcentage en 3ème, y compris les bons élèves, ils sont complètement paumés, par contre, ils savent parfaitement factoriser un polynôme ou développer une expression parce que ça, ça fait partie de la batterie des choses qu'on va leur demander le jour du brevet et que ça fait partie de nos contraintes, et puis aussi de nos souhaits plus ou moins profonds de les voir réussir à l'examen qui sera peut-être le seul pour eux."*

L'évaluation est un leit-motiv qui revient sans cesse : à propos des situations de recherche, à propos des relations avec les collègues, et à travers elle, on voit apparaître ce qu'il faut enseigner.

Elle est source d'angoisse pour les professeurs qui veulent que leurs élèves réussissent et craignent de les pénaliser vis à vis de l'évaluation "institutionnelle" qu'ils auront à subir un jour ou l'autre. Cette inquiétude est renforcée face à une nouvelle demande du système (changement de programme) et à l'isolement que ressentent les enseignants. Nous en prenons pour témoin les interventions du même professeur au cours du bilan du stage, reproduites ci-après : *"Moi, je suis un peu déçue parce que on a quelques petits points mais j'en aurais voulu d'autres. Moi, je viens chercher des idées, c'est surtout ça. Je viens chercher des idées et un échange entre collègues, parce que c'est pas du tout évident dans les collèges. Il y a des gens qui travaillent ensemble, ça va mais, nous, même si c'est pas un froid, un mur, bon, c'est à la récréation, c'est 5 mn, c'est 10 mn, bon on se passe des trucs, je sais que moi, je photocopie ce que j'ai, ce que je ramène de stage mais je suis une des rares dans mon collège"...* (une autre : *"moi, je suis la seule"*) *"Parce que quand on est tout seul, on n'est pas toujours très à l'aise. Il y a des chapitres où ça va, j'arrive à présenter des choses bien, mais il y en a d'autres, entre autres avec les angles alternes internes, j'ai écrit vocabulaire sur le cahier de cours et puis c'est tout parce que je ne sais pas m'en sortir autrement." "J'avais envisagé au départ de faire un exercice et voir les angles qui avaient la même mesure et puis j'ai reculé parce que quand on est tout seul, on sait pas trop."* un autre professeur appuie : *"On est vraiment isolés." "Quand on est tout seul, ... il y a les collègues mais on sait pas trop... est-ce que ça va aller... est-ce que je suis quand même à peu près dans des choses... et puis les enfants, est-ce qu'ils vont pas être pénalisés finalement... Les autres travaillent pas comme ça. Moi, j'ai des collègues qui font réciter du cours. J'en demande intégré à autre chose mais je fais jamais donner une définition, mes collègues font réciter des définitions. Alors, bon, moi je me sens un petit peu... Moi, je ne les fais pas réciter par cœur donc ils n'ont pas l'habitude de les apprendre par cœur et mot à mot."*

Du côté des autres professeurs

Il y a le problème du changement de professeur d'une année à l'autre : "Imaginez que quelqu'un fasse cette simulation de recherche et que l'année d'après l'élève tombe sur quelqu'un de dogmatique."

... et aussi celui des collègues qui enseignent au même niveau et avec lesquels il faut s'entendre, par exemple pour décider de tests communs. Cette question semble soulever beaucoup d'intérêt et, à la première intervention sur ce sujet, les stagiaires se mettent à parler dans tous les coins en même temps. C'est une contrainte plus ou moins librement consentie, qui n'est pas ressentie de la même façon par tous, ainsi qu'en témoignent ces interventions :

"On en fait deux par an, c'est très difficile de faire ça, il faudrait que l'équipe soit d'accord... On a déjà beaucoup de problèmes alors si en plus, il y en a un qui se met à faire comme vous dites... On en fait en décembre et en mai, alors ça ne donne pas beaucoup de liberté... il faut que tout le monde fasse la même chose au même moment..."

"Les tests communs, ça dépend si on institutionnalise d'une façon qui est très dramatique vis à vis des enfants, autrement, si c'est le résultat d'un travail d'équipe, si une équipe a décidé de prendre le programme de telle façon, de le répartir de telle manière sur l'année... C'est un gros boulot mais... Dans l'équipe dont je fais partie tous les tests sont programmés sur l'année. On l'a organisé entre nous ..."

Dans un autre établissement , on fonctionne par groupes de niveau avec des contrôles communs à chaque demi-trimestre *"libre à chacun d'organiser son enseignement comme il veut, de faire les contrôles qu'il veut, les devoirs* *qu'il veut, sans en rendre compte, s'il en a envie, peu importe, on se voit à un moment donné pour réguler ces contrôles communs. Les acquis au bout des 6 semaines sont les mêmes... Enfin, avec les bons groupes on a fait bien plus de choses, on a été bien plus loin mais on essaie de faire un contrôle commun au niveau connaissances minimum exigibles des élèves pour pouvoir faire des comparaisons puisque nous avons 6 classes de ces 2 niveaux et nous faisons fonctionner 3 classes en 4 groupes de niveau et 3 classes en classe entière et ça nous permet de faire des comparaisons sur les acquis des élèves. C'est tout à fait viable, tout le monde est très content, on s'échange des documents, on s'échange des cours, c'est très très enrichissant à mon avis pour tout le monde. Chez nous, ça marche bien. On fait la concertation sur l'heure du déjeûner, on l'a fixée d'un commun accord..."*

"On n'est jamais tous exactement avec la même optique, mais ces concessions, pour qu'elles soient possibles, il ne faut pas un éventail monstrueusement ouvert..."

Les critiques au sujet des autres collègues sont beaucoup plus librement exprimées au bilan de fin de stage, notamment vis à vis des professeurs qui transportent tels quels des contenus de 4ème en 6ème ou de 3ème en 5ème ou qui continuent de traiter les anciens programmes : "(le début de l'enregistrement manque) ... *j'ai été voir des livres de 5ème, même des très avancés, il n'y a pas ça* (il s'agit de résolution d'équations du premier degré générales avec des coefficients fractionnaires)". *"C'est comme ça qu'elle a compris les programmes". "Inutile de vous dire qu'il n'est pas question de parler de faire des activités quelconques.... Elle se casse pas la tête, elle prend son programme de 4ème, elle fait la même interrogation en 4ème et en 5ème... Ses fractions sont déjà terminées. Ce n'est pas un cas marginal". "Ils ont fait leurs préparations..." "En 6ème, elle a fait les décompositions en facteurs premiers". "Les très élitistes sont fortement convaincus que c'est une erreur (de faire des activités). Il y a une majorité de gens qui sont comme ça et il faut faire avec, ils ont les élèves". "Elle en est encore, et c'est la majorité dans l'établissement, il n'y a que 20% des élèves qui doivent rentrer en 6ème donc tous les autres devraient pas être là." "A l'inspection, est-ce qu'ils sont d'accord entre eux parce que ... les IPR, on ne les voit jamais."*

Le biais de l'évaluation permet aussi d'aborder d'autres questions didactiques :

"Il y a autre chose, un même résultat peut avoir des significations différentes, on peut avoir résolu son équation et n'avoir aucune idée de ce que cela représente, au contraire, on peut réinvestir..." Réponse du professeur qui vient de parler des groupes de niveau : "*ça, il faut y penser au moment de la rédaction du texte du contrôle*"

Du côté de sa propre histoire d'élève

L'histoire de l'élève qu'a été le professeur intervient de deux manières dans les conceptions des enseignants : on ne sait pas faire autrement que ce qu'on a connu, et puis, quand même on a appris de cette façon, alors ce n'était peut-être pas si mauvais. Un professeur réagit à une intervention sur ce que sont les mathématiques faites par les mathématiciens. *"Il me semble que malgré tout, les gens qui ont fait des recherches et qui sont arrivés à des résultats finissent par établir des règles et dans l'enseignement que, nous on a reçu, à tous les niveaux, on nous a bien donné des règles, on ne nous a pas fait adopter la même démarche, la démarche de la recherche. On nous a donné des résultats et on nous a dit : voilà, vous allez appliquer ces résultats ... sans que nous-mêmes, nous ayons à aucun moment ressenti le besoin de ces règles."*

2.1.2. Les situations de recherche

Suite à l'intervention du professeur de BEP retranscrite plus haut, au sujet du *cahier* de recherche, R. Douady demande ce qu'elle entend par *exercice* de recherche et développe ce qu'on pourrait entendre par là (construction d'un nouvel outil ou adaptation d'un outil à un nouveau type de situation, les élèves ne disposant pas d'avance de toutes les connaissances nécessaires pour répondre au problème). Cette interprétation déclenche un débat sur ce qu'on peut demander aux élèves, débat où les professeurs expriment leurs incertitudes, en liaison avec les contraintes précédentes, sur la capacité des élèves à trouver, la difficulté de vaincre les habitudes des élèves et des autres professeurs, le temps qu'on peut y consacrer et la peur de pénaliser les élèves en travaillant de cette façon. Nous reproduisons les interventions de quelques professeurs sur les exercices de recherche et le temps à y consacrer :

"Il y a une application qui se fait au jour le jour et une application qui se fait à plus longue portée".

"Il y en a un qui est un réinvestissement de la connaissance, une mobilisation de la connaissance alors que l'autre c'est simplement s'approprier un outil."

"Est-ce que ça ne fait pas partie aussi du travail que l'on peut donner à faire à la maison ?" et, sur l'objection d'un collègue qui dit qu'il leur faut des méthodes : *"on peut le guider, ce travail "*

"Je considère que c'est important mais qu'il y a des compétences techniques de calcul de base qui sont prioritaires par rapport à ce type d'enseignement. Il y a les contraintes des programmes, les contraintes des demandes, les élèves de fin de 3ème qui vont aller travailler, qui vont aller en CAP, il y a un minimum de techniques à savoir et je donne la

priorité à ... Des exercices de recherche, j'en fais en classe, mais à partir du moment où la classe est déjà bien avancée au niveau technique. ... en devoir à la maison ou en groupe en classe ..."

" ... je vois une autre contrainte... c'est que, les élèves n'étant pas habitués à travailler comme ça ... ils sont désarçonnés ... Ils n'ont pas l'opiniâtreté de chercher. Dès qu'ils ne trouvent pas, ils ne poursuivent pas. Les problèmes ne sont pas trop difficiles mais en général, ils ne trouvent pas ... problème ouvert, type IREM de Lyon ..."

Un autre professeur enchaîne *"Sur des problèmes de ce type là, ce ne sont pas toujours les élèves qui ont l'habitude d'avoir de bons résultats qui réagissent le mieux"*

L'évaluation a déjà été mentionnée au début de la discussion mais elle revient à ce moment là pour expliquer la difficulté qu'il y a à donner des problèmes de recherche aux élèves.

"je vois une autre contrainte : on les évalue sur leur faculté à reproduire..."

2.1.3. Les rapports concret-abstrait et les connaissances à développer chez les élèves

Les rapports entre concret et abstrait sont une préoccupation importante pour les professeurs de collège, mais sur cette question, les avis sont partagés, des conceptions différentes sur les mathématiques s'expriment et beaucoup sont pris dans des contradictions à ce sujet : il faut traiter des situations concrètes avec les élèves pour qu'ils donnent du sens à ce qu'ils font, mais il faut leur apprendre des techniques qui, elles, portent sur les nombres abstraits, et dans les problèmes concrets ou issus des autres matières, les élèves ne reconnaissent pas les notions mathématiques en jeu. De plus, les problèmes où il y a une modélisation à faire sont plus difficiles que les problèmes purement mathématiques

"...parce qu'ils ont quelque chose de matériel, de concret à toucher, on peut leur faire découper des bandes de papier, se rendre compte que les entiers ne suffisent pas et puis ils ont quelque chose qui est un petit peu plus palpable que de leur parachuter de nombres, une virgule, une partie décimale, une partie entière et il en reste un petit peu plus, peut-être."

"Je pense qu'il y a un problème fondamental, c'est que la plupart de nos élèves, en 6ème, on est encore sur des nombres assez concrets, mais à partir de la 4ème, on peut leur faire accepter n'importe quoi. Ne serait-ce qu'au niveau des égalités, 144 = 12, ça ne les dérange pas beaucoup, le gros problème c'est que nos élèves ne sont pas du tout sensibilisés aux nombres. Un nombre pour eux, d'ailleurs j'en ai fait souvent l'expérience, en prenant une valeur et en la concrétisant, en l'associant à une somme d'argent, le nombre devient parlant, alors que le nombre tout seul, le nombre mathématique, pour eux, ça n'est rien ... (les nombres) ils ne sont pas du tout signifiants."

"...un problème, il y avait une courbe à construire. Si on avait donné le problème abstraitement : construire la courbe..., tout le monde aurait su faire, mais comme il y avait derrière ce petit problème, tout le monde a été déboussolé, même les bons élèves."

"quand on a acquis une technique et qu'on veut l'utiliser concrètement..."

"...aussi les cours de physique. Un élève qui va être bon en maths en 3ème va savoir manipuler les puissances de 10 sans problème, en physique, ça ne va plus. Pour eux, les maths, c'est un cours. Sorti des maths, même si ... c'est quand même pas des maths...". Un autre professeur ajoute : *"C'est aussi quelque chose qui manque à votre questionnaire, les rapports de maths et des autres cours." "dans toutes les matières"*.

Les professeurs de CAP agricole constatent aussi le divorce pour leurs élèves entre la théorie et la pratique : *"Ils ont du mal à utiliser ce qu'on leur apprend". "En situation réelle, ils n'ont pas l'impression de faire des maths, jamais. S'ils ont besoin de calculer, ils calculent mais ils ne pensent pas qu'on utilise ce qu'on fait en maths." "...chez les maîtres de stage, là c'est du pratique, mais pour leur faire dire ce qu'ils ont fait qui a rapport aux maths, jamais !" "... si on leur présente une situation pour cacher des maths derrière, ils ont l'impression qu'on se moque d'eux".*

L'utilisation de lettres est pour certains professeurs entièrement du côté de l'abstrait et du formel et ne peut qu'être imposé par le professeur.

" quand vous posez votre problème, là, c'est à quel niveau, le a ? les a qu'est-ce que ça représentait ? Pour un enfant, qu'est-ce que ça va représenter, à quel niveau un a, comment on le matérialise ?" (Réponse : j'ai dit on suppose que a est un nombre tel que a fois ...) *mais quand on travaille on matérialise les choses, qu'est-ce que ça représente ... Placé devant un truc technique abstrait, disons artificel, c'est un peu ce que disait le collègue tout à l'heure, ... c'est parfaitement formel, il y a des règles que le professeur impose donc l'enfant réussit s'il adhère à ce que dit le prof, s'il est docile, mais c'est tout." (Réponse : ça dépend de l'apprentissage qu'il a eu avant) "mais c'est l'apprentissage d'une docilité ... l'application linéaire, ils savent pas le reconnaître dans un problème réel, ça veut dire que simplement dans le problème dirigé, il fait en docilité ce qu'on lui demande, mais si demain il doit le réinvestir quelquepart, il ne peut pas."*

"Est-ce qu'il y avait quelque chose dans les programmes précédents pour mettre en relation le théorique et le pratique ?"
"Est-ce que ces obstacles didactiques n'ont pas été renforcés par tout ce qui était lié aux maths modernes, c'est-à-dire quand on nous demandait d'axiomatiser en 4ème, de distinguer ce qui est rationnel de ce qui est..."
"Alors, l'axiomatique, elle a plus tellement de place." Le même professeur, une minute après *"Je me demande si c'est pas l'inverse. Quand on part du cas concret pour essayer d'en tirer une généralité... c'est la démarche inverse de la démarche naturelle aux mathématiques, me semble-t-il. C'est une construction de l'esprit, il me semble les mathématiques."* Après une intervention de R. Douady expliquant que le travail des mathématiciens ne consiste pas toujours à construire des théories, et qu'ils ne le font pas au départ, et une référence à l'histoire du postulat d'Euclide, le même professeur reprend la parole et fait l'intervention citée plus haut à propos de sa propre histoire d'élève.

Un autre aspect des relations entre abstrait et concret est l'interaction sens et technique.
Voici, pour illustrer ce point quelques réflexions de professeurs sur le fait d'expliquer ou non la technique de la division :
"La division des décimaux... la technique passe assez bien en 6ème, 5ème, on peut pas leur donner le sens, on peut pas expliquer pourquoi c'est comme ça. Les élèves, ça leur passe au-dessus de la tête. Des bonnes classes, ça passe bien, mais des classes faibles, ils n'y arrivent pas, ils suivent pas. ... La technique on peut la faire assez tôt mais l'explication de pourquoi cette technique, je crois que ça dépend vraiment des classes." "La question, c'est pas le pourquoi de la technique, je crois que la question, elle est pourquoi une division ... Le pourquoi une division, c'est vrai que c'est dans une situation où une division sera nécessaire qu'on pourra en discuter, mais alors pourquoi on fait une division comme ça ..."

De plus, la recherche n'intéresse pas toujours les élèves :
"Ce qu'ils nous demandent, ce qu'ils aiment, c'est des recettes. Quand on veut leur expliquer le pourquoi des choses, on les voit ... quand on arrive à la conclusion, à la recette alors là tout le monde ... "
"Le problème, si c'est un devoir de recherche à la maison par exemple où il y en a 2 ou 3 qui ont vraiment été intéressés et les autres, bon, ils trouvent que c'est beaucoup perdre de temps pour arriver à quelque chose qu'ils connaissaient déjà avant"

Plus généralement, qu'est-ce qu'un enseignement de mathématiques, quelles compétences développer chez les élèves ?

Un professeur répond à une intervention de R. Douady soulignant les difficultés des élèves instituteurs face aux ensembles de nombres, et leur hésitation devant des écritures comme $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 0{,}5 = 0{,}50$ *"... on parle de sélection ... est-ce qu'il faut qu'on enseigne de façon un peu graduelle, en somme pyramidale, d'abord les fractions puis après autre chose ou à vrai dire on s'en fiche ... bon, qu'est-ce qu'ils veulent faire, une partition des nombres : les nombres avec une partie décimale et ceux qui n'en ont pas etc... et faire des sortes de classes d'équivalence, c'est comme ça qu'ils les voient, est-ce que ça, c'est important, parce qu'ils peuvent faire plein de choses, ils peuvent envoyer des fusées sur la lune si ils veulent, sans savoir ça."*

Un professeur propose d'ajouter quelque chose au questionnaire : *"Nulle part n'est traité le problème de ce que peuvent changer ces nouveaux programmes, dans notre attitude vis à vis des enfants, dans nos exigences vis à vis des enfants et dans l'attitude des enfants vis à vis du programme qu'on leur demande. J'ai la sensation d'après ce que je peux voir que ça change beaucoup de choses. " (...) "Au niveau des commentaires de programme d'ailleurs, je crois que c'était assez clair, ce qu'on essaie de rechercher c'est plutôt une attitude de l'enfant devant un travail qu'une connaissance. Les connaissances exigibles sont finalement minimes ... moins de technique, je crois que ça change quand même quelque chose. ... Quand on regarde les connaissances exigibles qui sont bien détaillées dans les commentaires des programmes, elles sont minimes, il faut quand même être sérieux, c'est peu de choses".*

A travers cette remarque, on voit comment fonctionne la contrainte des programmes et on peut prévoir que les contenus traités vont se rabattre sur les compétences exigibles qui sont communes pour tous et qui sont sujettes à évaluation, alors que normalement, les programmes prévoient que beaucoup d'autres contenus doivent être abordés au cours d'activités, dont certaines sont suggérées dans la partie gauche des commentaires. Ce qui est retenu, c'est la partie exigible et les commentaires généraux puisque le reste, choix des activités... est de la responsabilité du professeur et n'a pas à être connu des autres. On peut penser également que les attitudes vont elles-mêmes se codifier et apparaître comme des contenus, c'est cette transformation qu'on peut voir à travers les référentiels qui essaient d'inventorier tous les savoirs et savoir-faire attendus des élèves. L'article du BGV (supplément au bulletin de l'APMEP) de février 1990 qui donne une information sur les nouveaux programmes de collège, à l'adresse des professeurs de seconde, nous semble aussi aller dans ce sens. En effet, la comparaison entre les anciens et les nouveaux programmes est présentée sur 4 colonnes : ce qui a disparu, ce qui a été réduit, ce qui a été développé, ce qui est nouveau. Or ce qui a disparu est exclusivement au niveau du contenu alors que ce qui est nouveau, mises à part les statistiques, est au niveau du contrat didactique, des activités à proposer aux élèves ... qui auraient tout aussi bien pu être proposées aux élèves dans le cadre des anciens programmes, par exemple "multiplicité des points de vue selon lequel on considère le calcul littéral, situations-problèmes à support géométrique/ grandeur/ environnement conduisant à des mises en équation, résolution par essais et erreurs, activités calculatoires considérées comme un terrain sur lequel peut s'exercer la démarche scientifique..."

Avant de faire une première synthèse sur les représentations des professeurs de collège, nous allons compléter les observations recueillies oralement en stage par des réponses à un questionnaire écrit.

2.2. Réponses à un questionnaire écrit

Nous avons déjà parlé au chapitre 2 d'un questionnaire sur la graduation d'une demi-droite proposé en mai 1986 (c'est-à-dire juste avant la mise en place des nouveaux programmes) à des professeurs de collège participant à un stage IREM sur les nouveaux programmes de collège. Le texte se trouve en annexe du chapitre 2, nous reprenons ici une forme raccourcie des questions dont nous rendons compte maintenant : places respectives du cours et des exercices dans la pratique professionnelle de ces enseignants, différences éventuelles de choix suivant le niveau des élèves, description plus détaillée des choix à propos de la place faite à l'enseignement de la graduation d'une demi-droite. Les 39 réponses montrent des différences individuelles notables dans la gestion du temps entre cours et exercices, et des variations dans leur enseignement suivant le niveau de la classe, notamment dans le choix des exercices. Il reste cependant des points de vue assez largement partagés, notamment ce qu'il y a lieu de faire face à des élèves en difficulté.

Les réponses ont été numérotées : chaque citation —reproduite en italiques— est donc accompagnée du numéro correspondant indiqué entre parenthèses. On peut ainsi repérer des réponses d'un même enseignant à des questions différentes.

2.2.1. Place du cours, place des exercices

La répartition entre le temps consacré au cours et aux exercices est très variable : de moins de 1/8 à 80% suivant les enseignants. Elle varie plus d'un enseignant à l'autre que, pour un même enseignant d'une classe à l'autre. Le même argument de manque de temps est utilisé par les uns pour expliquer qu'il consacre très peu de temps aux exercices (P10), par les autres pour expliquer qu'ils y passent au contraire la plupart du temps (P4). Nous reproduisons dans chaque cas les réponses les plus détaillées. Il y aurait évidemment lieu de se demander ce que veut dire pour chaque professeur "chercher des exercices en classe" : les réponses reproduites ci-dessous laissent penser que la signification n'est pas la même pour tous et que la nature des exercices doit varier beaucoup aussi, avec sans doute une majorité d'exercices qu'on peut qualifier "d'entraînement".

- 9 professeurs consacrent nettement moins de la moitié du temps aux exercices en 6ème, quelle que soit la classe (souvent 1/4 ou 1/3, mais c'est 1/8 pour un enseignant).

(P8) *Moins d'1/8 du temps hebdomadaire, un peu plus dans une classe faible.*

- 11 professeurs y consacrent environ la moitié du temps, quelle que soit la classe, auxquels il faut ajouter 2 professeurs qui le font pour une classe faible (ils y consacrent plus de temps pour une classe forte) et 1 qui le fait pour une classe forte (plus de temps pour une classe faible).

(P6) *Environ la moitié du temps se passe à faire le cours et les corrections de devoirs faits à la maison, l'autre moitié à faire rechercher des exercices en classe par les élèves et à les faire corriger par les élèves.*

- 13 enseignants y consacrent nettement plus de la moitié du temps, quelle que soit la classe, auxquels il faut ajouter les 3 professeurs dont nous avons parlé ci-dessus, 2 pour qui c'est le cas pour une bonne classe, 1 pour qui c'est le cas si la classe est faible.

(P3) *Il n'y a pratiquement plus de cours magistral, la grande majorité du temps est donc consacrée à la recherche de problèmes et d'exercices dont le contenu varie suivant le niveau de la classe.*

(P4) *Le nombre d'heures de maths imparti à chacune des classes du 1er cycle me paraît insuffisant en regard du programme imposé. Aussi, je m'efforce de réduire au maximum le cours magistral, le réduisant aux notions strictement essentielles. Disons que dans l'ensemble, j'emploie les 3/4 du temps à l'approche des notions nouvelles puis aux exercices qui s'y rapportent.*

(P5) *Tout au long de mes cours, les élèves recherchent la solution de problèmes et exercices eux-mêmes ; je ne suis qu'un guide, quelle que soit la classe. Il faut évidemment intervenir plus souvent dans une classe faible. Ce sont le plus souvent les élèves qui dictent la solution, quels que soient les contenus.*

(P7) *3h sont consacrées à des corrections d'exercices, exercices de recherche sur polycopiés ou dictés ou sur le livre, tracés de figures avec instruments. 4ème heure : synthèse, cours ou contrôle tous les 15 jours. En géométrie la part du cours est plus réduite au profit des manipulations.*
(P9) *Dans une classe de 6ème, bonne ou faible, les 3/4 de la séance sont consacrés aux exercices et problèmes (pour l'introduction d'une notion et ensuite pour son application).*

En général, pour un même professeur, le temps consacré aux exercices diminue de la 6ème à la 3ème, à un même niveau scolaire, il varie parfois aussi suivant qu'il s'agit d'une classe forte ou d'une classe faible, mais pas toujours dans le même sens. Il semble d'ailleurs que les différences sont accusées dans le cas d'une classe faible : les professeurs qui consacrent peu de temps aux exercices en consacrent encore moins dans une classe faible, ceux qui passent plus de temps aux exercices qu'au cours le font d'autant plus qu'il s'agit d'une classe faible.

- 4 professeurs consacrent plus de temps aux exercices dans une bonne classe que dans une classe faible.
(P10) dans une bonne classe *à peine 1 heure,* dans une classe faible *très peu de temps (les élèves sont lents et les programmes chargés). Les programmes sont trop chargés pour permettre des cours style "travaux dirigés". Bien souvent (classe de niveau moyen ; ce type de travail me semble valable pour une classe de bon niveau), ça n'est pas rentable parce qu'il n'y a que 3 ou 4 élèves qui cherchent toujours les mêmes!), les autres attendent passivement la solution.*

- 6 professeurs consacrent plus de temps dans une classe faible que dans une bonne classe
(P13) *En principe moitié cours, moitié exercices, mais plus la classe est faible, plus la partie exercices est lourde au détriment des démonstrations abstraites. En algèbre, toujours plus d'exercices que de cours.*
- les autres ne font pas de différence au niveau de la durée, ou ne précisent pas, mais beaucoup (12 commentaires en ce sens) font une différence dans la nature des exercices proposés.
(P12) *Dans les classes faibles, davantage d'exercices systématiques d'application de règles d'où, pour ces élèves, moins d'exercices de raisonnement, de recherche".*
(P15) *En 6ème suite de calculs avec lettres pour les bons élèves, "nombres vrais" seulement avec les plus faibles. Réflexion sur les compositions d'aires, écriture de l'hypothèse et petit raisonnement justificatif en géométrie pour les "bons", "constatations" pour les plus faibles.*
(P17) *Pour les "bons" : suite de calculs avec lettres, pourcentages à trouver, réflexions sur les compositons d'aires, écriture de l'hypothèse géométrique. Pour les "faibles" : calculs simples, applications simples de pourcentages, constatations de géométrie.*
(P19) *Même temps, mais (pour une classe faible) exercices plus simples et moins nombreux.*
(P23)*Exercices préparatoires : 10 mn en début de cours, exercices d'application : 15 mn en fin de cours ; les règles de calcul sont d'abord trouvées sur des exercices avant d'être généralisées. Avant de faire un devoir en classe, je consacre une heure complète à une série d'exercices. Dans une classe faible, beaucoup d'exercices d'application simples ou par séries avec seulement quelques variantes d'un exercice à l'autre.*
(P26) *En 6ème, bonne classe : 30 à 40 mn de recherches individuelles longues ; classe faible : exercices copiés ou recherches simples, pas de temps de recherche mais observation et répétitions, calcul mental. En 3ème, bonne classe : 1/2 h de recherche individuelle d'exercices corrigés individuellement et collectivement ; classe faible : 45 mn, peu de "cours". Exercices faits ensemble, modèles redonnés à la maison, élèves essayant de les faire au tableau.*
(P28) et (P29) *Recherche plus évidente et menée pas à pas dans une classe faible.*
(P36) *Pour des exercices très techniques, les élèves les réalisent en classe, le délai d'exécution dépendant du niveau de cette classe. Lorsque des problèmes sont posés, ils font le plus souvent l'objet d'une résolution "à la maison". Quand le niveau de la classe l'autorise, des problèmes de géométrie (en classe de 4ème et de 3ème) sont traités en plusieurs séances, avec un certain dirigisme.*

- 2 professeurs réservent la recherche d'exercices en classe au soutien
(P34) *Pendant le soutien (systématique dans les classes faibles) : travail sur la compréhension d'un énoncé, la mise en forme claire des informations, la construction des figures, l'observation des propriétés, le classement de ces propriétés, trouver celles qui répondent aux questions posées. S'il n'y a pas de soutien , le jour où est donné le travail, questions orales et explications de l'énoncé (analyse de la structure de la phrase en français : sujet, qui est perpendiculaire ? à qui ?...Recherche et mise en forme à la maison, correction complète : depuis le texte... solution à la séance suivante. En 4ème, même travail en géométrie, surtout pour l'écriture claire de toutes les hypothèses et recherche des théorèmes susceptibles d'être utilisés (recherche à la maison par manque de temps).*

- Un professeur détaille son point de vue sur le rôle des exercices dans son enseignement.

(P22) *Importance des exercices en classe : ils doivent permettre aux enfants de ne pas se trouver en position d'échec, de ne pas se décourager lorsqu'ils se retrouvent seuls à la maison. Avec une bonne classe, on peut évidemment faire davantage d'exercices et plus variés. Avec une classe faible, davantage d'exercices traditionnels et répétitifs.*

Principe *En 6ème, 5ème et 4ème faire toujours en classe des exercices qui sont du même type que ceux qui sont donnés à la maison. Très grande importance du cahier d'exercices qui est un instrument de travail primordial. Il est capital d'apprendre au fil des années à bien le tenir, l'ordonner, le consulter. En 3ème, moins de temps en classe pour les exercices car le programme est plus dense et l'enjeu est souvent la classe de seconde. En contrepartie la participation des élèves est sollicitée en permanence lors du déroulement du cours (entraînement collectif, en principe, à la démonstration). Toutefois les exercices à faire à la maison sont souvent commencés en classe. Des conseils, des indications, des références sont donnés aux élèves. Les devoirs à la maison prennent une grande importance en classe de 3ème. Ce sont des devoirs d'entraînement avant le devoir qui mettra le point final à une leçon. Ils doivent permettre à l'élève de faire la mise au point de ses connaissances, de ses acquis. Ils donnent aux élèves une idée, un aperçu du devoir de mathématiques de la classe de seconde et au delà.*

2.2.2. Différences suivant les élèves dans l'enseignement de la graduation d'une demi-droite.

Nous pouvons préciser les pratiques sur un exemple : la graduation d'une demi-droite.[3] Beaucoup de professeurs accordent plus de place, ou au moins plus de temps à la graduation d'une demi-droite dans le cas d'une classe faible (19 réponses sur 39). Cependant ils proposent plus d'exercices mélangeant nombres non entiers et graduation dans le cas d'une bonne classe (12 réponses). Parmi eux, 7 enseignants, à la fois passent plus de temps sur la graduation avec une classe faible et proposent plus d'exercices mélangeant graduation et nombres non entiers à une classe forte. Aucun n'est dans le cas contraire. 9 enseignants proposent autant d'exercices de ce type dans les deux cas, dont 3 y consacrent plus de temps dans une classe faible et 6 autant. 2 enseignants passent plus de temps dans une classe forte et proposent plus d'exercices mêlant nombres non entiers et graduation. Quelques-uns précisent que pour une classe faible, ils ne font la graduation qu'avec des nombres entiers. 3 personnes répondent "non", dont 2 précisent "manque de temps" pour les exercices sur nombres et graduation. Pour ces deux dernières personnes, qui répondent à la première question que la place accordée à la graduation dépend du niveau de la classe, cela semble vouloir dire qu'ils ne font pas du tout d'exercices de ce type. Citons quelques commentaires :

(P2) *Dans une classe faible seulement les nombres à virgule. C'est une notion facile à comprendre pour les élèves forts, il faut insister davantage pour les élèves faibles.*

(P3) *Il est indispensable d'y consacrer beaucoup plus de temps avec des élèves en difficulté. Les bons élèves assimilent très rapidement cette notion, que ce soit avec des relatifs, des fractions... mais les élèves faibles demandent qu'on insiste davantage, qu'on varie les exercices. Cette notion doit être reprise tout au long de l'année.*

(P14) *Place constante. Un peu plus (de temps) pour une bonne classe parce que les enfants comprennent plus vite, on fait plus d'exercices.*

(P19) *soutien en classe faible, approfondissement dans une bonne classe.* (plus d'exercices ...) *dans une bonne classe;* et pour les relatifs *on utilise plutôt des entiers en 6ème et 5ème.*

(P24) Entiers *plus pour les classes faibles*

(P25) Pour les exercices sur nombres et graduation *A peu près le même temps (la difficulté est différente au niveau des nombres non entiers.* Sur nombres relatifs *Aussi longtemps que nécessaire à la compréhension des élèves (parfois très longtemps).*

(P26) *Place constante. Le temps passé n'est pas le même mais j'essaie de faire autant d'exercices.*

(P34) *Place constante : les élèves de 3ème n'ayant jamais travaillé sur les représentations, sur les mesures algébriques n'ont aucun repère pour les équations, les inéquations, les intervalles, quant à Thalès ! Plus de temps pour une classe faible: repère concret, visualisation immédiate pour les ensembles, les intervalles. Plus d'exercices dans les classes faibles de 4ème et 3ème concernant la représentation, la relation d'ordre. Dans les classes fortes plus d'exercices sur distances et valeurs absolues. En 6ème temps équivalent pour graduation, addition, ordre. Dans les classes fortes, plus de temps sur* $a+x = b$ *équivaut à* $x = b-a$ *(et représentation).*

(P38) *Place sensiblement constante. Plus de temps en cours pour une classe faible. Plus d'exercices simples pour une classe faible.*

(P39) *Place constante. Plus de temps pour une classe faible. Beaucoup plus d'exemples avec une classe faible, beaucoup plus d'exercices avec une bonne classe.*

[3] Nous avons décrit en détail dans le chapitre 2 les réponses des professeurs sur la place faite dans leur enseignement à la graduation d'une demi-droite. Nous reprenons cette question du point de vue des différences faites suivant les élèves.

2.3. Eléments semblant assez stables dans les représentations de beaucoup de professeurs de collège

Par delà les différences individuelles, les conceptions diverses sur les mathématiques (en particulier au plan abstrait/concret, théorie/outil pour résoudre des problèmes, éventuellement dans d'autres disciplines), il semble se dégager quelques idées sur l'enseignement des mathématiques qui ne sont pas formulées mais qui sont sous-jacentes à la plupart des interventions :
- on ne peut pas demander aux élèves de faire quelque chose qu'on ne leur a pas enseigné. On ne peut donc leur poser que des problèmes analogues à ceux qu'on a déjà traités avec eux, ou du moins n'utilisant que des méthodes déjà exposées. Ceci explique la résistance à la notion de problème de recherche, telle que l'exprime R. Douady ; d'ailleurs le professeur qui a prononcé le mot "cahier de recherche" rectifie tout de suite "je crois que ce n'est pas ce sens là, c'est si vous voulez des exercices d'application".
- l'enseignement doit progresser de façon continue. C'est un peu une conséquence du principe précédent : il faut enseigner les théories que les élèves vont appliquer, même si on traite beaucoup d'exemples avec eux. On ne peut donc ajouter qu'un peu de difficulté à la fois. Si les élèves sont en difficulté, il faut ajouter des maillons intermédiaires, faire des plus petits pas.
- on enseigne les mathématiques sous une forme définitive, ce qui a été enseigné avant devrait être connu des élèves, il faut éventuellement le revoir, et on ne peut le remettre en question. Les savoirs actuels des élèves sont le résultat d'enseignements antérieurs, ils devraient être compatibles avec l'enseignement nouveau qu'ils ont à recevoir. Les distorsions éventuelles proviennent de lacunes dans les connaissances antérieures qui ont besoin d'être consolidées.
- pour que les élèves apprennent, il est nécessaire qu'ils écoutent et qu'ils participent en classe, ils doivent aussi s'entraîner. S'ils écoutent bien, tout en étant actifs, et que le professeur explique bien, ils vont apprendre. Comme nous l'avons vu, il existe cependant des variations importantes sur la proportion entre explications du professeur et entraînement des élèves, variations accentuées dans le cas d'élèves en difficulté.
- on ne peut laisser un travail des élèves non corrigé, on ne peut pas prendre le risque de laisser des erreurs dans la tête des élèves, donc il faut pouvoir contrôler tout ce qu'ils font, et traquer les erreurs éventuelles, et même si possible les prévenir. Ce principe est aussi incompatible avec la notion de problème de recherche au sens où en parle R. Douady parce que la diversité des méthodes devient trop grande, surtout si on donne à des groupes différents des valeurs différentes des paramètres de la situation. Ce dernier point apparaît comme un des plus forts quand on veut mettre en place une situation concrète dans une classe. Par exemple, un professeur qui avait participé à plusieurs stages de formation continue et qui essayait dans sa classe la situation des découpages de papier pour travailler sur les fractions (cf brochure IREM Paris 7 n°62 p.51-62 ou ch. 3A p.391-392) demande, affolé après la première séance : comment faire le bilan, cela va prendre un temps fou d'envoyer les 7 groupes au tableau raconter tout ce qu'ils ont fait. L'idée que chaque groupe pourrait ne rendre compte que d'une partie de son travail (sa procédure pour une ou deux pièces) et qu'il se pourrait donc qu'il reste à son insu des procédures erronées non corrigées – même si la correction avait lieu dans un autre cas – lui était difficilement acceptable. Ceci explique aussi en partie le poids de l'évaluation sur les pratiques des professeurs. C'est le moyen de savoir si leur message passe. La correction d'un exercice est une nouvelle occasion de délivrer le message.

On peut relier beaucoup de ces convictions aux contraintes exprimées par les professeurs, en particulier à l'évaluation. Le principal souci de l'enseignant est la réussite de son enseignement, ce qui peut s'évaluer selon deux critères :
- d'une part, le succès des élèves aux examens ou aux contrôles, notamment s'ils sont communs à plusieurs classes du même niveau (évaluation officielle). C'est d'ailleurs aussi ce qu'attendent les élèves et les parents d'élèves.
- d'autre part, la bonne marche de la classe, l'ambiance propice au travail, avec des élèves intéressés et qui prennent du plaisir à faire des mathématiques. Un indice en est la participation des élèves.

Cette réussite est le principal moyen de valorisation du professeur lui-même. Pour l'assurer, il doit
- parvenir à motiver les élèves, capter et conserver leur attention, les faire participer. Il n'est plus envisageable de dispenser des cours magistraux, en tous cas au collège. Il faut que les élèves aient une part assez grande d'activité visible.
- aider le plus possible les élèves à acquérir les contenus qui seront l'objet de l'évaluation importante, ce qui a des conséquences institutionnelles. Pour cela, il faut une gradation bien adaptée des difficultés, des explications claires, voire des explications modèle que les élèves pourront reproduire (phrases de résumé écrites dans le cahier, exercices type intégrés dans le cours). Il faut surtout éviter que les élèves fassent des erreurs dans ces évaluations officielles et pour cela il est nécessaire d'abord de corriger toutes les erreurs qui se produisent en cours

d'apprentissage (une erreur non corrigée a toutes les chances de se reproduire), et même, autant que possible, de prévenir les erreurs en mettant les élèves en garde, en leur signalant des endroits dangereux.

Les contraintes sont plus fortes quand les élèves sont en difficulté, surtout quand l'ensemble de la classe est faible, et, comme on peut le voir notamment sur l'exemple de la graduation, le professeur modifie ses choix dans le sens d'exercices plus simples, laissant moins d'initiative à l'élève, il propose plus de répétitions, d'exemples à imiter, reproduire, moins de recherche. *C'est aussi dans ce cas que les différences s'accusent. Les professeurs mettent l'accent sur ce qui leur paraît le plus efficace : leurs explications, mises en garde ou l'entraînement des élèves. Pour ceux qui donnent beaucoup d'importance aux explications on a un renforcement du cours, pour ceux qui donnent plus d'importance à l'entraînement des élèves, on a une augmentation de la part déjà importante des exercices.*

3. Quelques études de cas.

3.1. Recueil des données.

Nous rapportons dans ce paragraphe les analyses des entretiens que nous avons eus avec quatre instituteurs et quatre professeurs de collège en suivant des grilles de questionnement que l'on peut trouver en annexe de ce chapitre (questionnaires 1, 2 et 3). Les grilles sont données à titre indicatif, le questionnement étant assez souple, et les points pas toujours abordés dans le même ordre. Suivant les réponses des enseignants et le temps disponible, certaines questions ont été plus ou moins approfondies, des questions n'ont pas été posées ou d'autres ajoutées.

3.1.1. Elaboration de la grille

La première grille est celle qu'avait élaborée A. Robert pour une recherche menée en collaboration avec J. Robinet et rapportée dans le cahier DIDIREM n°1. Elle a servi de point de départ pour l'élaboration des deux autres, fabriquées pour la présente recherche. A travers les questions, nous espérions obtenir des précisions sur :

- les représentations des enseignants sur les mathématiques, ce que sont pour eux les mathématiques, ce qui leur paraît important de transmettre aux élèves :
questions 2, 6, 7, 10, 11, 19 du questionnaire pour les professeurs
questions 3, 6, 7, 10, 11, 14, 17 du questionnaire pour les instituteurs
- les représentations des enseignants sur l'école, le métier d'élève :
questions 3, 8, 9, 12, 15, 16, 17, 18 du questionnaire pour les professeurs
questions 1, 2, 4, 8, 9, 12, 13, 15, 15 bis, 16, 16 bis du questionnaire pour les instituteurs
- les représentations sur l'enseignement des mathématiques :
questions 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 du questionnaire pour les professeurs
questions 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 15 bis, 16, 16 bis du questionnaire pour les instituteurs
- les représentations sur les difficultés des élèves :
questions 1, 4, 6, 7, 12, 13, 15, 16, 17, 18 du questionnaire pour les professeurs
questions 4, 5, 6, 12, 13, 15, 15 bis, 16, 16 bis du questionnaire pour les instituteurs.

Nous reproduisons ci-dessous ces deux questionnaires :

A. Professeurs de 6ème

1. Qu'attendez-vous de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire ?
   - contenus
   - méthodes

Qu'est-ce qui d'après vous manque aux élèves qui ont des difficultés en mathématiques au collège?

2. Qu'entendez-vous par avoir des connaissances en mathématiques pour un élève qui sort du collège ?
et pour un professionnel ?

3. Qu'est-ce qui est le plus important pour la bonne réussite de la scolarité au collège.
(rapport famille-collège, attitude de l'élève en classe, travail personnel, rapport enseignant-élève).

4- Qu'est-ce qui manque à votre avis aux élèves en difficulté en mathématiques ? D'où viennent leurs difficultés, où se situent-elles ?

5- Que doit faire un élève (en classe, à la maison) pour progresser en mathématiques ? Quels conseils donnez-vous ?
Qu'est-ce qu'écouter ? Comment écouter ?

6- Quels sont d'après vous les critères d'un bon enseignement des mathématiques ? Y-a-t-il des différences suivant les élèves ?
Pouvez-vous mettre vos idées en pratique ? Si non pourquoi ?
Quelles sont les qualités d'un bon enseignant ?

7- Pensez-vous que tous les élèves puissent acquérir les notions des programmes de mathématiques jusqu'en 3ème ? jusqu'en terminale B ?

8- Le travail en groupes peut-il améliorer les résultats sur l'apprentissage individuel des élèves ?

9- Faites-vous travailler vos élèves en groupes ? A quelle fréquence ? pour quel type d'activité ? Quelle répartition du temps vous paraît la plus efficace entre travail en groupes, individuel, collectif, cours, évaluation, corrections.

10- Dans l'enseignement des mathématiques, quelle répartition vous paraît-il la plus adéquate en classe entre
- résolution de problèmes
- apprentissage de techniques
- établissement de résultats (définitions, théorèmes)

et dans le travail personnel pour les élèves ?

11- Différenciez-vous des types de problèmes ou de situations mathématiques ? Quel usage respectif en faites-vous dans votre enseignement ?

12- Attribuez-vous un rôle important à la mémoire ? Pourquoi ? Quel est ce rôle ?

13- Quel est le rôle du travail à la maison ? Quel type de travail à la maison donnez-vous ?

14- Peut-on enseigner des méthodes de résolution de problèmes en mathématiques? Comment?

15- Quelle place faites-vous à l'évaluation des élèves ? Quel type de contrôle donnez-vous ? Quelle fréquence ? Que cherchez-vous à évaluer ? Les connaissances ? les méthodes ? autre chose ?
L'évaluation a-t-elle un rôle dans l'apprentissage des élèves ? Quelle correction faites-vous des contrôles ?

16- Qu'est-ce que vous appréciez le plus chez les élèves individuellement ? en classe ?
Qu'est-ce que vous essayez de valoriser le plus chez les élèves ?

17- Quels types d'actions vous paraissent efficaces pour réduire les difficultés des élèves en mathématiques au collège ?

18- D'où viennent d'après vous les difficultés des élèves en seconde? Que faire pour y remédier ?

19- Si vous deviez caractériser les mathématiques, quels termes choisiriez-vous : théorie, outils pour résoudre des problèmes, langage, outils de modélisation du réel, calcul, formalisme, abstraction, objet de savoir, autre ?

B. Instituteurs

1- Quel est pour vous le rôle essentiel de l'école primaire
- éducation, formation de la personnalité
- mettre en place des apprentissages de base
- accéder à une culture
- éducation sociale : apprentissage de la vie en société
- acquisition de méthodes de travail
- autre

Voyez-vous une évolution des objectifs entre le CP et le CM ?

2- Quel est le plus important pour une bonne réussite de la scolarité primaire pour un élève ?

famille :
- que les attentes de la famille coïncident avec celle de l'école
- que l'élève soit encouragé et soutenu moralement à la maison
- que son travail soit suivi et qu'il soit aidé
- que l'ambiance familiale soit calme et sereine

école :
- qu'il soit actif en classe
- qu'il soit attentif et écoute bien en classe
- qu'il ait une part de travail personnel suffisante
- qu'il puisse interagir avec des camarades

enseignants :
- qu'il ait de bonnes relations avec ses enseignants
- qu'il attribue aux mots du maître une signification proche de celle que lui-même lui attribue

Avez-vous changé d'avis sur ces questions depuis le début de votre carrière ? depuis 5 ans ?

2bis- Comment l'élève doit-il écouter ?

3- Qu'entendez-vous par avoir des connaissances en mathématiques pour un élève qui sort de l'école primaire ?

4- Qu'est-ce qui manque à votre avis aux élèves en échec en mathématiques ? D'où viennent les difficultés des élèves ? Où se situent-elles ?

5- Que doit faire un élève (en classe, à la maison) pour progresser en mathématiques ? Quels conseils donnez-vous aux élèves ?

6- Quels sont d'après vous les critères d'un bon enseignement de mathématiques ? Y-a-t-il des différences suivant les élèves ? Pouvez-vous mettre vos idées en pratique en classe ? Sinon pourquoi ? Quelles sont les qualités d'un bon enseignant ?

7- Pensez-vous que tous les élèves puissent acquérir les notions des programmes de mathématiques jusqu'en 3ème ? jusqu'en terminale B ?

8- Le travail en groupes peut-il améliorer les résultats sur l'apprentissage individuel des élèves ?

9- Faites-vous travailler vos élèves en groupes ? A quelle fréquence ? Pour quel type d'activité ? Répartition du temps entre travail en groupes, individuel, collectif, corrections, évaluation ?

10- Dans l'enseignement des mathématiques, quelle répartition vous paraît la plus adéquate entre
- résolution de problèmes

- apprentissage de techniques
- mémorisation de résultats
- manipulations

Différenciez-vous différents types de problèmes ou de situations mathématiques ? Quel usage respectif en faites-vous dans votre enseignement ?

11- Quelle place doit-on faire d'après vous à l'enseignement de la géométrie à l'école primaire ?

12- Attribuez-vous un rôle important à la mémoire ? Pourquoi ? comment?

13- Quel est le rôle du travail à la maison ? Quel type de travail à la maison donnez-vous ?

14- Peut-on enseigner des méthodes de résolution de problèmes de mathématiques ? comment ?

15- Quelle place faites-vous à l'évaluation des élèves ? Quel type de contrôle donnez vous ? Quelle fréquence ? Que cherchez-vous à évaluer ? les connaissances, les méthodes ? autre chose ?
L'évaluation a-t-elle un rôle dans l'apprentissage des élèves ? Quelle correction faites-vous des contrôles ?

15 bis- Qu'est-ce que vous appréciez le plus chez les élèves individuellement ? en classe ?
Qu'est-ce que vous essayez de valoriser le plus chez les élèves ?

16- Quel type d'action vous paraît efficace pour réduire les difficultés des élèves en mathématiques à l'école primaire ?

16bis- D'où viennent d'après vous les difficultés en mathématiques des élèves au collège ? Quelles remédiations voyez-vous ?

17- Si vous deviez caractériser les mathématiques, quels termes choisiriez-vous ? On suggère : théorie, outils pour résoudre des problèmes, langage, outils de modélisation du réel, calcul, formalisme, abstraction, objets de savoir, autre.

3.1.2. Choix des enseignants.

Les personnes interrogées sont des enseignants avec lesquels nous avons travaillé, en classe ou hors de la classe, pour cette thèse ou à d'autres occasions. Nous avons observé des séquences dans les classes de 3 des instituteurs et de 2 des professeurs de collège. Il y a parmi eux 3 hommes et 5 femmes. Nous n'avons pas retenu la variable sexe et nous parlons ici de tous au masculin alors que dans les extraits de séquences de classe nous parlons de tous au féminin, ce qui aide à préserver leur anonymat.

Les professeurs de collège étaient, au moment de l'interview, certifiés pour deux d'entre eux, PEGC en cours de licence pour les deux autres ; par ailleurs deux d'entre eux étaient animateurs IREM (1 PEGC, 1 certifié). La plupart des interviews ont été enregistrées, certaines ne l'ont été que partiellement, une ne l'a pas été du tout. On peut trouver en annexe la transcription presque intégrale des réponses des enseignants, du moins dans le cas où elles ont été enregistrées. Les professeurs A et B ont été interrogés en juin 1989, l'entretien a été enregistré pour le professeur B mais ne l'a pas été pour le professeur A (raisons techniques). Les professeurs C et D ont été interrogés une première fois en 1988 sur le questionnaire d'A. Robert (questionnaire 1 en annexe, dont la première version avait aussi servi de guide à la discussion dans le stage d'octobre 1987), cette première interview n'a pas été enregistrée, ils ont été interrogés une deuxième fois en mars ou avril 1990 sur les questions qui n'avaient pas été totalement abordées la première fois (questions 1, 3, 6, 9, 13, 15, 17, 18 du questionnaire 2). Les réponses ont été classées dans la numérotation du questionnaire 2, avec un caractère différent pour chaque entretien.

Pour les instituteurs, trois d'entre eux enseignaient dans la même école au moment des observations de 83 à 85, je les connaissais également en tant que parent d'élève : l'instituteur A est celui du CM2A, il a quitté cette école depuis octobre 1984, l'instituteur B est celui du CM2B qui enseigne toujours dans la même école. Ils ont été interrogés en juin 89. L'instituteur C est celui de la classe des élèves de CE1 interrogés en avril 88 sur la résolution de problèmes, l'entretien avec cet instituteur a eu lieu en mai 90, c'est le plus jeune (13 ans d'enseignement). L'instituteur D est celui de la classe où avaient eu lieu les séquences sur les aires décrites dans la première partie de cette thèse, en 82-83 ; c'est un maître formateur de l'école normale, qui encadre donc des normaliens en stage ; l'entretien a eu lieu en juin 90.

Quatre de ces enseignants sont donc ceux des classes que nous avons observées pour cette thèse. Nous essayerons d'analyser certains des choix didactiques qu'ils ont faits dans les séquences à la lumière de leurs déclarations sur l'enseignement et les difficultés des élèves.

3.2. Méthodologie d'analyse et description

Nous avons classé les déclarations des enseignants en plusieurs catégories. Nous avons d'abord retenu les trois grands pôles classiques en didactique : ce qui se réfère à l'élève et à sa famille, ce qui se réfère à l'institution scolaire et à l'enseignant, ce qui se réfère aux mathématiques. A l'intérieur de chaque pôle, nous avons pratiqué d'autres subdivisions. Du côté de l'élève, on peut distinguer d'abord ce qui relève de la famille de ce qui relève de l'élève lui-même, qualités de l'élève, ses connaissances ou capacités cognitives, dont certaines sont assez générales et d'autres reliées au contenu, travail de l'élève sur le plan qualitatif ou sur le plan quantitatif, en classe ou à la maison, relations entre élèves enfin. Du côté de l'école, on peut distinguer ce qui est à un niveau institutionnel, ce qui a trait aux objectifs, à des principes pédagogiques, généraux ou concernant plus spécifiquement l'enseignement des mathématiques, ce qui relève des pratiques pédagogiques en classe –à l'intérieur desquelles nous prévoyons une rubrique particulière pour ce qui concerne le travail en groupes– ou pour guider le travail à la maison, et enfin ce qui concerne l'évaluation. Il y a aussi ce qui concerne les relations entre professeur et élèves. Pour chacune des déclarations, on peut en outre repérer si elle se situe plutôt dans le registre cognitif ou affectif ou social. Ces déclarations peuvent servir à expliquer l'apprentissage de l'élève, la réussite ou l'échec. Elles peuvent intervenir de façon positive : par exemple "pour apprendre, l'élève doit être motivé" ou négative "les élèves échouent parce qu'ils ne sont pas motivés". Si nous avons adopté un code pour une déclaration positive, par exemple E1, nous avons adopté le code E'1 pour la même déclaration donnée de façon négative.

Nous avons regroupé les déclarations des enseignants dans 14 tableaux suivant le découpage effectué. Nous avons noté par un signe + la présence d'une déclaration positive dans les réponses d'un professeur et par un signe - la présence de la déclaration négative correspondante. Nous indiquons par n le fait qu'un enseignant refuse une suggestion et par o le fait qu'il l'approuve. Les signes - traduisent quelque chose que les enseignants regrettent qu'il ne se produise pas : par exemple "on ne laisse pas assez de temps aux élèves", "les professeurs de seconde ne s'adaptent pas assez à leurs élèves" ou qui provoque l'échec "ils ne s'intéressent pas". Les signes + entre parenthèses indiquent quelque chose que les enseignants aimeraient faire sans toujours y parvenir ou une déclaration peu affirmée (dans ce cas on peut avoir un (-)).

Il est clair que la méthodologie de l'entretien assez ouvert, tel que nous l'avons pratiqué, fait que l'absence d'un type de déclaration chez un des professeurs signifie seulement que ce n'est pas ces arguments qui lui viennent spontanément en premier ou que la question ne lui a pas été posée. Il pourrait être d'accord avec de telles déclarations et les reprendre à son compte sur sollicitation, par exemple en répondant à un questionnaire écrit. Nous reviendrons plus loin sur la portée et les limites de notre méthodologie.

Les formulations du tableau sont des reformulations de notre part permettant certains regroupements. Les conceptions données ici ne sont pas toujours énoncées directement mais peuvent apparaître à propos d'une réponse à une autre question.
Dans les tableaux, les professeurs A, B, C, D sont désignés respectivement par les lettres A, B, C, D et les instituteurs A, B, C, D par les lettres A', B', C', D'.

TABLEAU 1. Convictions exprimées côté savoir

	Les maths c'est	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
N1	ens. de connaissances, objets de savoir	+	+		+	+		+	+
N2	un langage	+	+		+	+			
N3	le raisonnement, la déduction, de la logique	+	+	+				+	
N4	science autoritaire, fermée, coupée du réel								+
N5	grand champ de possibles dans les problèmes								+
N6	des outils pour résoudre des problèmes	+	+	+	+	+	+	+	
N7	des outils de calcul				+	+		+	
N8	un jeu désintéressé				+				
N9	un outil de modélisation du réel	n				+	+		
N10	un outil pour d'autres disciplines		+						
N11	une science exacte						+		
N12	de l'abstraction, résolution de pb. théoriques						+		
	Faire des maths, c'est								
N20	trouver des solutions de problèmes		+	+		+	+		
N21	comprendre, analyser une situation, poser des questions			+		+	+		
N22	développer des stratégies de résolution					+			
N23	appliquer des théorèmes, des règles	+			+				
N24	faire des calculs		+						

L'aspect résolution de problèmes est retenu explicitement par tous les enseignants sauf l'instituteur D qui ne s'exprime que de façon négative sur les mathématiques, il l'aurait sans doute retenu si on lui avait posé la question explicitement. Un autre aspect, relié à celui-là, apparait chez les instituteurs, c'est la modélisation du réel qu'on avait déjà repéré nettement chez les élèves instituteurs. On peut rapprocher cela de la liaison avec les autres discipines faite par le professeur B. Cela fait référence aux problèmes "concrets" que l'on traite principalement à l'école primaire mais sa signification didactique n'est pas très claire : il se peut que ce soit surtout la reconnaissance et l'application de modèles. Ainsi, à propos de la mémoire, l'instituteur B déclare *"ça joue évidemment un rôle important en maths. Par la mémoire, on peut faire référence à une situation analysée antérieurement, et par modélisation, trouver des* *solutions. Il y a des enfants qui, notamment dans les situations de recherche, peuvent se rappeler que tel type de problème, on l'avait résolu de telle et telle manière, la modélisation."* Evidemment, le fait de déclarer cela ne signifie pas que cet enseignant réduise la modélisation à la reconnaissance de modèles mais cela montre qu'il inclut cet aspect quand il en parle.

Par ailleurs, l'aspect "ensemble d'objets de savoir" est retenu par la plupart des enseignants mais l'aspect langage l'est surtout par les professeurs de collège.

TABLEAU 2. Convictions exprimées côté école et enseignants : objectifs

	objectifs généraux	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
O01	socialisation				+	+			+
O02	donner des méthodes de travail		+			+	+	+	+
O03	former la personnalité						+		
O04	que l'élève soit bien, s'épanouisse à l'école								+
O05	faire acquérir indépendance, autonomie		+					+	+
O06	apprendre à écouter les autres			+					
	objectifs de l'enseignement des maths								
O1	faire aimer les maths, montrer leur intérêt	+	+					+	
O2	faire assimiler le contenu des programmes		+	+	+	+	+	+	+
O3	acquérir les calculs sur les nombres	+				+	+	+	+
O4	structurer les connaissances des élèves	+							
O5	donner des acquis solides (techniques)	+	+			+		+	+
O6	apprendre à utiliser les acquis, les outils	+	+		+			+	-
O7	faire acquérir le langage mathématique	+		+					
O8	donner le goût de la vérité scientifique			+					
O9	donner le goût de la recherche, du raisonnement	-		+					
O10	apprendre à mettre en place des stratégies					+	+	+	
O11	apprendre à raisonner, à réfléchir	+		+				+	+
O12	apprendre à modéliser					+	+		
O13	faire comprendre	+		+				+	
O14	apprendre à se servir du livre, du cours		+					+	
O15	apprendre à rechercher de l'information		+						

Les - indiquent des objectifs dont les enseignants regrettent qu'ils ne soient pas suffisamment atteints.

Les objectifs généraux sont surtout mentionnés chez les instituteurs mais il ne faut en tirer aucune conclusion puisqu'on leur posait directement la question des objectifs généraux de l'école primaire alors que cette question n'était pas posée aux professeurs de collège. Pour eux les objectifs généraux ne pouvaient se manifester qu'à travers ce qu'ils exprimaient pour l'enseignement des mathématiques. Par exemple, donner des méthodes de travail figure explicitement dans les objectifs de tous les instituteurs alors que les professeurs de collège donnent plus souvent des objectifs relatifs aux mathématiques comme apprendre à raisonner ou même des pratiques plus concrètes comme apprendre à lire un texte de maths ou rechercher le théorème à utiliser.

En ce qui concerne les objectifs de contenu, les instituteurs privilégient les aspects numériques, le côté calcul. La géométrie leur semble moins importante, en tout cas, ils ne lui donnent pas la priorité comme l'expliquent les deux instituteurs à qui on a posé explicitement la question. Un professeur de collège semble aussi donner la priorité aux calculs dans **R** au niveau des acquis mais c'est parce qu'il inclut la géométrie dans l'apprentissage du raisonnement hypothético-déductif.

L'apprentissage du raisonnement est cité explicitement par deux professeurs et deux instituteurs – ces derniers parlent plutôt d'ailleurs d'apprendre à réfléchir. Les deux autres instituteurs pensent à la mise en place de stratégies, ce qui n'est pas tout à fait la même chose mais contient sans doute quand même l'idée de raisonnement. Les deux autres professeurs de collège parlent d'apprendre à utiliser les acquis, objectif d'ailleurs cité par un de ceux qui mettent l'accent sur le raisonnement. Ce terme d'utilisation des acquis semble plutôt faire référence à un enseignement des mathématiques comme un apprentissage de contenus et de situations d'utilisation de ces contenus. D'ailleurs deux de ces enseignants (A et D) font allusion à la recherche de la règle ou du théorème à utiliser. Nous avions déjà rencontré cette idée à propos de "modélisation".

Les principes pédagogiques généraux (voir tableau 3) concernent surtout des attitudes de disponibilité à l'égard des élèves ou d'encouragement à la communication entre élèves. Ils sont assez peu exprimés par les instituteurs, peut-être parce que cette partie est considérée comme évidente pour eux alors que ce qui concerne plus spécialement les mathématiques leur semble mériter plus de discours. Le professeur A ne s'exprime presque pas non plus dans ce domaine, et seulement pour dire des choses qu'on ne peut pas faire : on n'a pas assez de temps pour mettre les élèves en valeur ou les effectifs font qu'on ne peut pas contrôler tout ce que font les élèves.

TABLEAU 3. Convictions exprimées côté enseignants : principes généraux.

	Principes pédagogiques généraux	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
Po	avoir des connaissances en psychologie								+
P1	s'adapter à ses élèves		+	–	+ -	+			
P2	mettre ses élèves en valeur	–	+						
P3	faire réussir ses élèves, ne pas les mettre en échec		- +	+	- +				
P4	faire régner une atmosphère de confiance		+						
P5	laisser du temps aux élèves		–	+	- +			+	
P51	ne pas faire le programme de l'année suivante				+				
P6	laisser un rôle à l'élève				+				
P7	faire des choses qui plaisent aux élèves		+ -	+					
P8	différencier son enseignement			+				(+)	
P9	intervenir individuellement auprès des élèves							+	+
P10	soutenir, "materner" les élèves		+	+				+	
P11	aider les élèves à s'adapter les uns aux autres				+				
P12	contrôler ce que font les élèves	–			+				
P13	avoir une demande réaliste pour l'attention des élèves				+	+			

TABLEAU 4. Convictions exprimées côté enseignants : Principes pédagogiques relatifs aux mathématiques

	Principes pédagogiques relatifs aux maths	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
Ro	Avoir une bonne formation en mathématiques						+		+
R1	Intéresser ses élèves, montrer l'intérêt des maths, donner de la vie aux notions	+	+ +	- +	+ +			+	
R01	permettre aux élèves d'être actifs		+						
R2	valoriser, confronter différentes méthodes			+		+			+
R3	donner des situations de recherche		+	+		+	+	+ +	
R4	donner des vraies situations concrètes, des manipulations, faire jouer les élèves					+ +	+	+ +	
R5	ne pas croire trop vite que ce que dit l'élève est faux			+					
R6	laisser aux enfants le droit de se tromper					+			
R7	analyser les erreurs des élèves, les prendre en compte de façon positive					+			
R8	reconnaître que certaines choses sont difficiles				+				
R9	bien cerner les difficultés pour débloquer vite		++	+				+	
R10	donner des situations au "bon" niveau			+					
R11	relier les exercices au cours	+		+	+				
R12	faire réinvestir les notions en situation						+		
R13	faire expliciter par les élèves ce qu'ils ont trouvé							+	
R14	Ne pas privilégier la technique sur le fond				+				
R15	ne pas trop formaliser			+					
R16	ne pas avoir trop d'exigence sur la forme quand le fond n'est pas suffisant				+				
R17	faire une systématisation (techniques)					+	+	+	+
R18	travail plus répétitif pour les élèves faibles		+						

Nous avons inclus dans ce tableau la formation en mathématiques mentionnée par deux instituteurs comme condition d'un bon enseignement des mathématiques, plutôt d'ailleurs sous forme d'un manque par l'instituteur D. Les professeurs de collège n'en parlent pas, sans doute parce que cela leur parait un préalable évident.

Pour les professeurs de collège, on trouve l'unanimité sur la nécessité d'intéresser les élèves, de rendre l'enseignement vivant alors que pour les instituteurs il s'agit plutôt de donner des situations de recherche et de partir de situations vraiment concrètes (l'instituteur D ne s'exprime pas sur ce sujet parce que la question ne lui a pas été posée de la même façon : on ne lui a pas demandé les conditions d'un bon enseignement des mathématiques mais seulement s'il faisait des différences suivant les élèves). Ce n'est pas la même chose, on peut donner des situations de recherche pour rendre l'enseignement plus attractif mais ça peut être pour d'autres raisons, par exemple pour donner l'occasion à l'élève de construire ses connaissances comme le dit l'instituteur A. Le professeur C parle aussi d'activité intérieure qui est la seule importante et l'instituteur C pense que les élèves retiennent ce qu'ils ont vécu. Cependant il n'est pas sûr que la différence soit très grande entre ce que veulent dire les instituteurs et les professeurs de collège. Remarquons seulement que le modèle constructiviste a diffusé depuis longtemps dans le milieu des professeurs d'école normale et que les instituteurs bénéficient plus régulièrement de stages de formation continue ; c'est le cas pour les instituteurs interrogés. De plus, ils ont tous, d'une manière ou d'une autre, eu un contact direct avec la recherche : avec des équipes INRP, avec moi, ou même les deux.

Une autre particularité des instituteurs est qu'ils se retrouvent tous sur la systématisation qui n'est pas mentionnée par les professeurs de collège pour qui c'est sans doute une évidence. Le fait de le signaler pour les instituteurs est une conséquence de l'accent mis par ailleurs sur les manipulations et les phases de recherche. Inversement la modération des exigences sur la formulation n'est signalée que par des professeurs de collège.

Notons (voir tableau 5 ci-dessous) que l'enseignement de méthodes de résolution de problèmes est souvent rejeté par les enseignants à qui on pose la question (elle n'a pas été posée au professeur A ni aux instituteurs C et D). C'est sans doute parce qu'il est compris comme une algorithmisation, un relevé et un enseignement de problèmes type. C'est d'ailleurs ce que dit le professeur B "jusqu'au brevet, on a quand même des types de problèmes donc on peut le faire". L'instituteur A, quant à lui, s'en méfie "est-ce bien utile ... j'aurais tendance à dire que ce qui est important, c'est que l'enfant soit capable de mettre en place des stratégies de types différents ... si on donne un cadre trop strict, on va limiter les possibilités de stratégies et, à échéance, on peut peut-être ne pas lui permettre d'aller au bout de certains problèmes alors qu'il en serait capable si on lui donne l'habitude de monter lui-même ses propres stratégies."

TABLEAU 5. Convictions exprimées côté enseignants : Pratiques pédagogiques

	Pratiques pédagogiques	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
w1	Faire chercher des exercices en classe			+	+				
w2	mettre des exercices comme partie intégrante du cours, pas ou peu de cours magistral			+				+	
w3	donner à la fois des exercices répétitifs et d'autres			+		+			
w4	faire refaire les exercices après correction	+							
w5	faire construire des énoncés de problèmes							+	
w6	reprendre les notions régulièrement, répéter		+		+				
w7	Faire participer les élèves au cours (questions-réponses)			+					
w8	exercer la mémoire des élèves	+			+	+	(+)	+	+
w9	Faire travailler les élèves en groupes (≥ 2)			+	+	+		+	
w10	apprendre aux élèves à lire un texte de maths, travailler l'énoncé			+	+	+			
w11	apprendre aux élèves à se servir du cours écrit comme référence							+	
w12	aider les élèves à faire l'inventaire des outils						+		
w13	enseigner des méthodes de résolution de pb. décortiquer un pb, remonter de la conclusion		(+)	+	n	n	n		
w14	donner des méthodes de rédaction				+				
w15	aider l'élève à décripter le contrat				+				
w16	laisser les élèves aller au bout de leur idée			+					

Ce qui est entre parenthèses indique ici une pratique peu affirmée. Le n indique que l'enseignant pense qu'il n'est pas possible d'enseigner des méthodes de résolution de problème.

La question qui se pose est de savoir ce qu'on entend par méthode de résolution de problème. Le but est-il de trouver la solution ou d'apprendre à résoudre c'est-à-dire quelque chose d'assez général qui pourra se réutiliser dans la résolution d'un autre problème ? Ce qui est le plus proposé à ce sujet, c'est le travail sur l'énoncé. Le professeur C ajoute l'analyse d'une résolution en remontant depuis la conclusion, ce qui est souvent la manière de trouver, même si ce n'est pas celle de rédiger. L'instituteur B parle de faire l'inventaire des outils mais c'est apparemment lui qui le fait. Il ne dit pas comment transférer aux élèves cet acquis méthodologique.

Il est remarquable aussi que c'est un instituteur, et celui qui enseigne aux élèves les plus jeunes, qui vise à apprendre à ses élèves à se servir du cours écrit comme référence. Il est vrai qu'il ne peut pas supposer que ses élèves sachent le faire tout seuls. Les plus grands écrivent eux-mêmes leurs cours sur le cahier au lieu de coller des résumés polycopiés. Est-ce suffisant pour qu'ils s'y retrouvent ? Un professeur de collège donne cependant dans ses objectifs le fait d'apprendre à se servir de son livre.

Les enseignants pensent tous (voir tableau 6) que le travail en groupes apprend aux élèves à communiquer, l'instituteur des plus petits le voit comme un moyen de développer l'autonomie. La confrontation de différentes méthodes qui peut débloquer certains élèves est souvent évoquée aussi. Certains y voient un moyen d'améliorer la communication entre élèves puisque ce que dit l'enseignant est reformulé par d'autres élèves et que des élèves qui n'osent pas s'adresser directement à l'enseignant peuvent utiliser un intermédiaire. Le professeur C y voit un moyen pour les élèves qui n'ont pas d'idée d'observer ceux qui aboutissent et notamment d'apprendre qu'on peut réussir en commençant par se tromper.

TABLEAU 6. Convictions exprimées côté enseignants : travail en groupes.

	Intérêt du travail en groupes	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
H1	apprendre aux élèves à collaborer				+				+
H2	apprendre aux élèves à communiquer	+	+	+	+	+	+		+
H3	apprendre aux élèves à synthétiser, structurer								+
H4	développer l'autonomie des élèves							+	
H5	améliorer la communication prof - élèves				+	+			
H6	confronter différentes méthodes, déblocage...		+		+	+			+
H61	voir quelqu'un qui trouve tâtonner, se tromper			+					
H7	permet au prof de mieux voir ce que sait faire l'élève				+				
H8	les élèves aiment ça					+			
H9	peut améliorer les résultats	+		+	+				
H10	peut améliorer le comportement, socialisation	+		+	+		+		
H11	peut améliorer l'apprentissage	n	+	+	+		n	+	
	Réserves								
H12	demande trop de temps	+					+		
H13	les élèves ne travaillent pas tous	+					+		
H14	difficile à gérer		+				+		
H15	si les élèves ne sont pas trop nombreux		+						
H16	si les élèves sont disciplinés		+						
H17	si les élèves sont autonomes						+		
	organisation								
H20	après une compréhension de la consigne seul			+					
H21	situation déjà bien prévue et organisée				+				+
H22	mobilité des équipes assurée par une règle				+				
	quels types de situations en groupe ?								
S1	jeu avec un enjeu	+							
S2	partage du travail (trop long)	+	+						+
S3	recherche à la maison, enquête	+							+
S4	recherche en classe		+	+	+			+	+
S5	situation de communication						+		
S6	presque toutes activités (sauf calcul mental)					+			

Ce sont les enseignants qui pensent que ça n'a pas vraiment d'effet bénéfique sur l'apprentissage qui ont le plus de mal à l'utiliser et qui invoquent le manque de temps et le fait que les élèves ne travaillent pas tous. Il est surtout utilisé pour des situations de recherche en classe ou pour un partage du travail. Certains enseignants signalent qu'une situation de travail en groupe doit être plus préparée qu'une autre.

TABLEAU 7. Convictions exprimées côté enseignants : travail à la maison

	Rôle du travail à la maison	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
M01	Entretenir des relations avec les parents		+			+	+		
M02	entraînement pour le collège						+		+
M03	réinvestissement						+		
M04	entraînement au travail individuel						+		+
M05	surcharge la journée de travail des élèves						+		
M06	exercer la mémoire	+				+			
M07	permet à l'élève de prendre son temps	+		+	+				
M08	permet de donner des bonnes notes				+				
M09	fixer les apprentissages répétitifs				+				
	Quel travail à la maison ?	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
M0	exercices déjà faits en classe	+				+			
M1	Travail à terminer	+	+		+				
M11	Leçons					+		(+)	+
M12	Copie					+			
M2	exercices d'application directe	+		+	+	+		+	+
M3	devoirs type annales (pour les 4ème- 3ème)			+	+				
M4	Travail long mais facile (ex. dessin soigné)		+		+				
M5	Recherche de documentation	+							
M6	exercices de recherche type jeu math				+				
M7	travail préparatoire à la classe	+				+			
M8	travail de recherche, plus difficile, devoir	+	+		+				
M9	travail extra scolaire						+		
M10	préparer les contrôles de bilan	+							
M11	problèmes, exercices facultatifs			+				+	
	devoirs à rendre notés (oui, non)	o	n	n/o	o	n	n	n	n

Ce qui est en parenthèses dans le tableau 7 correspond à un travail donné peu souvent.

Les instituteurs n'attendent pas beaucoup du travail à la maison sauf de faire plaisir aux parents et de leur donner les moyens de savoir ce qui se fait en classe. En CM2, ils y ajoutent la nécessité de préparer les élèves à ce qui les attend au collège. Sinon, ce sont des leçons ou des applications très immédiates et très courtes pour fixer la leçon du jour. L'instituteur B donne une grande liste d'objectifs supposés du travail à la maison mais c'est pour dire que cela surcharge inutilement la journée de travail des élèves et qu'il est plus profitable pour eux de faire un travail intellectuel non scolaire.

Les professeurs de collège l'utilisent aussi pour fixer les connaissances introduites dans le cours et aussi pour faire des choses qu'on n'a pas le temps de faire en classe. Certains l'utilisent aussi comme moyen d'évaluer les élèves sans leur imposer un temps limité ou pour exiger davantage de soins. Deux professeurs refusent les devoirs notés à la maison pour les petites classes, le professeur C explique que c'est pour que les parents ne les fassent pas. Il prélère relever et corriger les cahiers de temps en temps : les parents ne font pas les devoirs sur cahier.

TABLEAU 8. Convictions exprimées côté école et enseignants : évaluation

		A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
	L'évaluation chiffrée a un rôle positif / négatif dans l'apprentissage		+ -	+ -		+ -	-	+ -	-
	Evaluation : comment évaluer ?								
V_1	évaluer régulièrement les élèves, souvent		+ -					+	
V_2	évaluer à différents moments de l'apprentiss. donner plusieurs chances	(+)	+			+		+	
V_3	évaluation écrite inaccessible pour certains			+					
V_4	faire une partie de l'évaluation sans contrainte de temps	(+)							
V_5	diversifier les interrogations (contenu, niveau)		+						
V_6	exigences indépendantes du niveau de la classe, pas de sur-exigence pour les bons élèves				+ +				
V_{61}	une partie plus difficile pour les bons élèves		+						
V_7	faire une autoévaluation en cours d'apprentis. évaluation formative + normative					+ +		(+)	+
V_8	se donner l'occasion de mettre des bonnes notes pour donner confiance (ex tr. maison)				+				
V_9	les faire travailler hors note			+			+		
V_{10}	se donner les moyens d'isoler les éléments qu'on évalue							+	
V_{11}	faire une partie de l'évaluation "en positif"			+					+
V_{12}	faire le barème avec les enfants								+
V_{13}	donner exercices déjà vus, et représentatifs				+				
	quoi évaluer ?								
V_{20}	calcul, mécanismes, connaissances- objet, techniques, application directe	+	+	+		+	+	+	+
V_{21}	le raisonnement	+		+	+				
V_{22}	la rédaction			+	+				
V_{23}	le soin, la présentation	+							
V_{24}	le réinvestissement dans un contexte différent			+			(+)		
V_{25}	capacité à trouver, résoudre des problèmes			(+)				n	
V_{26}	les capacités, ce qui est en devenir								+

Les parenthèses dans le tableau ci-dessus indiquent ce que les enseignants pensent qu'ils devraient faire mais ne peuvent réaliser

Les enseignants considèrent en général que l'évaluation a à la fois des aspects positifs et négatifs sauf les instituteurs B et D qui la voient surtout négative. Pour compenser les aspects négatifs, ils pensent qu'il faut donner plusieurs chances aux élèves, surtout le professeur B qui insiste sur la diversification des interrogations, ou faire une évaluation formative en cours d'apprentissage avant l'évaluation normative. Certains s'efforcent aussi de faire travailler les élèves "hors note".

Nous trouvons là l'espèce d'opposition entre réussite et apprentissage que nous avions déjà observée dans les discussions informelles au cours des stages : l'objectif des enseignants est que les élèves apprennent, mais ils mesurent cet apprentissage à leurs performances, à leur réussite. Cette réussite est aussi ce qu'attendent les élèves et leurs parents, ce qui la rend d'autant plus nécessaire pour les professeurs, d'où le glissement qui semble parfois se produire au niveau des objectifs : on vise plus la réussite des élèves que l'apprentissage lui-même. Cela paraît surtout le cas au collège, ce qui s'explique parce que l'évaluation n'a pas autant de poids à l'école primaire qu'au collège. Notons que le fait de relever cette opposition ne veut pas dire que nous considérons l'apprentissage et la réussite comme indépendants : une trop grande absence de réussite peut certainement gêner l'apprentissage, et la réciproque est évidemment vraie !

Par ailleurs, on trouve des réactions différentes face à l'hétérogénéité : certains veulent garder dans les contrôles une partie plus difficile pour les bons élèves pour qu'ils aient à chercher, d'autres pensent au contraire qu'il ne faut pas de sur-exigence pour les bonnes classes pour éviter le risque de créer de nouveaux élèves en difficulté. Ces deux points de vue traduisent peut-être des priorités différentes des enseignants en matière d'évaluation : niveau des contrôles indépendant de la classe pour les uns, échelle de notes indépendante de la classe pour les autres.

Tous les enseignants pensent qu'il faut évaluer les contenus, c'est-à-dire le plus souvent les techniques et mécanismes par des applications directes du cours, éventuellement en donnant des exercices déjà traités. Les professeurs de collège évaluent aussi le raisonnement et la rédaction mais seul un professeur évalue le réinvestissement dans un contexte différent et un instituteur souligne la difficulté de le faire.

TABLEAU 9. Convictions exprimées côté école : institution

	Institution	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
I0	il y a un engrenage de l'échec				+				
I1	réduire les effectifs	+ -	+		+	(+)	+	+	
I2	faire des groupes de niveau	+		o-n	o-n		o-n		
I3	prendre les élèves en groupe restreint, soutien	+		+					
I4	laisser le temps	+ -		-	+ +		+ -		
I41	assouplir la gestion du temps et des effectifs				+ +				
I5	ajouter 1 an au primaire , même programme						+		
I6	Assouplir l'évaluation	+							
I7	assouplir l'organisation des niveaux d'enseig.	+					+		+
I8	faire une vraie liaison CM2-6ème						+		
I9	diminuer le nombre d'enseignants par classe au collège				o-n		+		
I10	donner plus de moyens matériels					+	+		
I11	mettre des bons profs aux élèves faibles						+		
I12	ne pas faire de classe "dépotoir"						+		
I13	coordonner les exigences des disciplines				+				
I14	organiser une aide au travail à la maison, des études	+	+		+				
I15	faire un bon emploi du temps (horaires)				+				
I16	développer la documentation pédagogique							+	
	organiser des classes de niveau faible		o	n	o		n		

Le remède le plus souvent envisagé est la réduction des effectifs. Au collège, les enseignants pensent aussi qu'il faut laisser le temps aux élèves (c'est également le cas d'un instituteur qui voudrait allonger la scolarité primaire) et organiser une aide pour le travail à la maison. Ils sont partagés au sujet des groupes de niveau, leur trouvent des avantages mais aussi des aspects négatifs suivant l'organisation qui en est faite. Au sujet des classes de niveau faible, on a aussi des avis divers et nuancés suivant les cas.

L'instituteur B, qui enseigne dans une école où la majorité des élèves ont du retard scolaire, fait une longue liste de suggestions. Remarquons aussi que le professeur A propose d'assouplir l'évaluation, ce qui nous paraît rejoindre les réflexions que nous faisions précédemment à propos de la logique de la réussite opposée à celle de l'apprentissage.

Ce sont les instituteurs qui, dans l'ensemble, attachent le plus d'importance à la cohésion entre l'école et la famille (voir tableau 10 ci-dessous) et les enseignants qui enseignent dans les milieux défavorisés qui considèrent les problèmes familiaux comme principale cause d'échec scolaire. Notons que ce n'est cependant le cas de l'instituteur C qui enseigne à de très jeunes élèves.

TABLEAU 10. Conviction exprimées côté famille

	côté élève : famille	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
F0	problèmes familiaux, principale cause d'échec	+	+				+		
F1	collaboration, cohésion école - famille		++			+		+	+
F2	que la famille s'intéresse à l'école	+				+	+	+	
F3	valorisation du travail culturel						+	+	
F4	suivi du travail scolaire			o-n			+		
F5	avoir une organisation du travail à la maison par la famille	+							

Presque tous les enseignants mentionnent la motivation et la mémoire parmi les qualités attendues de l'élève (tableau 11 ci-dessous), pour les professeurs de collège, il y a aussi l'envie de réussir. Un instituteur et un professeur donnent beaucoup d'importance à la communication entre élèves et aux qualités qui la favorisent. Les dons ne sont cités que sous la forme : "un élève doué réussira toujours" (codée par un +) ou "les difficultés de certains élèves viennent de leur incapacité à abstraire" (codée par un -).

TABLEAU 11. Conviction exprimées côté élèves : qualités de l'élève

	qualités de l'élève	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
E0	avoir une vision valorisante de l'école						+		
E1	avoir envie de comprendre, aimer les maths être intéressé, motivé, curieux	-	+ -	+ -	+ -		+ +	+	+ -
E01	trouver du plaisir à raisonner, à trouver			+					
E2	avoir la volonté, l'envie de réussir		- +	+	+				
E3	envie d'apprendre, de progresser, sens de l'effort			+	+		+	+	+
E4	avoir une certaine indépendance, autonomie		+				-	+	
E5	avoir confiance en soi, ne pas avoir peur de l'échec	+		-				+	
E5	être doué, capable d'abstraire	-		+	+		-		
E7	avoir des idées, de l'imagination, trouver			+	+	+			
E8	aimer la répétition s'ils sont faibles			+					
E9	capacité de se concentrer, de réfléchir	+				+		+	
E10	avoir de la mémoire	+	+		+	+	+ -	+	+
E11	capacité d'écouter les autres, de communiquer			+		+			

TABLEAU 12. Convictions exprimées côté élèves : connaissances attendues (et encore visées)

	connaissances	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
C0	avoir une bonne latéralisation (pour les petits)							-	
C1	comprendre le langage en français	+				+		+	-
C2	savoir se concentrer	+							
C3	comprendre les consignes, s'approprier l'énoncé	- -		+		+			-
C4	avoir un bon rapport avec l'écrit			-					
C5	avoir une démarche logique, raisonner			+				-	-
C6	donner du sens à ce qu'il fait, comprendre			+	+				
C7	avoir de solides acquis de base		- +			+			
C8	aisance avec les nombres, ordre de grandeur moyens de contrôle			+ -	+				
C9	perception en géométrie, images mentales			+	+				
C10	manipulation des instruments			+					
C11	avoir des méthodes de travail						-		
C12	capacité d'analyse, de synthèse						-		

TABLEAU 13. Conviction exprimées côté élèves : travail, attitude des élèves

	Attitude en classe	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
T0	être calme		+		+				
T1	écouter, être attentif, être disponible		- +	+	++	+	+	+ -	+
T2	se concentrer, réfléchir	+				+		+	
T21	faire le raisonnement en même temps		+						
T3	chercher à comprendre les consignes, la problématique	-		+-			+		
T4	se poser des questions, chercher, comprendre		+	+		+	+	+ +	
T5	s'intéresser, jouer le jeu, prendre part	++	-	-	+		+		+
T6	poser des questions	+	+	+					
T7	participer en classe, être actif, communiquer	++	++	+		+	+		(+)
T8	écouter les autres, coopérer avec eux			+ +				+	+
T9	comprendre le cheminement d'un autre, utiliser les idées des autres			+ +					
T10	observer les élèves qui réussissent			+					
	Travail personnel								
T11	ne pas se décourager, avoir confiance	+ +		-				+	
T12	fournir un travail régulier, faire des efforts	+-	-+	-	+		+		+
T13	assimiler, retenir, réinvestir			- +	+	+			
T14	apprendre le cours, les exemples typiques	+	+	+	+				
T15	tirer en quelques mots l'essentiel de la leçon				+				
T16	vérifier, contrôler				+				
T17	refaire les exercices faits en classe	+	+	+					
T18	faire des exercices nouveaux à la maison			+					
T19	préparer les contrôles, les simuler ...	+							
T20	jouer à des jeux de société					+			

Dans le tableau 12, on voit que ce sont surtout certains enseignants de collège qui s'expriment au niveau des connaissances, soit mathématiques soit générales, qu'ils attendent des élèves ou dont l'absence explique les difficultés de ces derniers. Pour les instituteurs, les attentes concernent plutôt la compréhension de la langue naturelle. Autant que des connaissances attendues, ce sont souvent des connaissances que les enseignants s'attachent à faire acquérir à leurs élèves.

Tous les enseignants s'expriment au sujet du travail et de l'attitude des élèves en classe, ils citent presque tous l'attention et la participation, parfois à plusieurs reprises (tableau 13). Un professeur insiste beaucoup aussi sur ce que les élèves peuvent apprendre de leurs pairs. En revanche, les instituteurs donnent peu d'indications sur leurs attentes au sujet du travail personnel des élèves. Quand ils le font, c'est de façon très générale alors que les professeurs précisent de façon assez concrète la façon dont ils attendent que les élèves travaillent. Il est vrai qu'à l'école primaire on donne peu de travail à la maison en mathématiques. Un instituteur recommande aux élèves de jouer avec des jeux de société pour préparer le travail scolaire en général, les mathématiques en particulier.

TABLEAU 14 : Relations entre élèves, professeurs, contrat didactique (clauses générales)

	Relations entre élèves, professeurs ...	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
G1	avoir de bonnes relations avec le prof			+	+		+		
G2	comprendre ce qui est important pour le professeur	+							
G3	bénéficier d'une bonne ambiance en classe, d'une atmosphère de confiance		+		+				+
G4	être à l'aise, se plaire en classe		+	+	+				
G5	comprendre les règles du jeu (contrat)				+				
G6	accepter les règles du jeu		++		+				

Ce sont surtout les professeurs de collège qui s'expriment à ce sujet, les instituteurs considérant peut-être comme évident l'importance, pour l'apprentissage des élèves, d'avoir des bonnes relations avec l'enseignant et une bonne ambiance en classe.

3.3. Les grandes lignes de chaque témoignage.

Nous allons dans ce paragraphe essayer de dégager les grandes lignes des déclarations de chacun des enseignants –au risque de caricaturer– en les organisant suivant le plan suivant : objectifs, contraintes, responsabilités principales dans la réussite ou l'échec des élèves, éléments d'opposition, modèle de l'apprentissage sous-jacent. Pour cela, nous rapprocherons les différentes réponses d'un même professeur (ce qui est déclaré au niveau des objectifs avec ce qui est déclaré au niveau des principes pédagogiques, des pratiques pédagogiques, des qualités et du travail de l'élève etc...).

Par ailleurs, les déclarations et explications des professeurs se situent dans différents registres : nous avons retenu les suivants : cognitif et épistémologique, social, affectif. Nous indiquerons celui auquel chacun d'eux fait prioritairement appel.

Nous avons aussi repéré un certain nombre de dimensions ou axes sur lesquels les enseignants se situent différemment :

- la dimension savoir - élèves, entre la préoccupation de l'avancée du savoir et celle de s'adapter aux élèves.
- la dimension institution - professeur dans sa classe, en ce qui concerne le partage de pouvoir et de responsabilité dans l'apprentissage ou la réussite des élèves.
- la dimension apprentissage - réussite, suivant que l'enseignant fait plus référence à l'un ou à l'autre dans ses préoccupations concernant les élèves.

Vu la longueur des transcriptions des entretiens, nous avons choisi de les mettre entièrement en annexe de ce chapitre. Jusqu'à présent, nous avions inséré dans le texte des extraits significatifs des documents. Ici, nous avons seulement mis en italiques, dans le texte des entretiens fournis en annexe, les phrases que nous avons plus spécialement retenues, pour remplir les tableaux ci-dessus et pour dégager les grandes lignes dont nous parlons maintenant. Cela rend les paragraphes qui suivent un peu plus denses et nous prions le lecteur de se reporter au texte des entretiens pour des exemples. Remarquons, une fois encore, qu'en faisant ce travail, nous gommons toutes les nuances et donnons une idée très schématique des déclarations de ces enseignants : il est évident que les deux pôles de chaque axe sont en fait présents dans chaque témoignage et que si nous situons un enseignant d'un côté et non dans une position médiane, c'est que ce pôle nous parait dominant par rapport à l'autre.

Le professeur A

Ses objectifs déclarés sont de faire comprendre, donner le sens du raisonnement hypothético-déductif, structurer les connaissances des élèves, faire acquérir le langage mathématique, donner des acquis solides et apprendre à utiliser ces acquis. Au niveau des principes pédagogiques, ce professeur ne fait presque aucune déclaration, sauf sur le plan des principes généraux concernant les mathématiques (montrer l'intérêt des mathématiques et "cultiver les applications"). Les déclarations sont au contraire nombreuses et précises sur ce qui concerne le travail de l'élève en classe ou à la maison et sur l'évaluation et l'organisation institutionnelle (temps, effectifs, organisation des classes, de soutien extrascolaire).

Les contraintes exprimées sont extérieures au professeur et sont soit du côté de l'institution (temps, effectifs, évaluation qui semble pour une large part imposée et extérieure au professeur et qui contribue à produire l'échec), soit du côté de l'élève et de sa famille (travail de l'élève qui n'existe pas toujours, soutien – parfois absent – de la famille qui devrait aussi aider l'élève à organiser son travail).

Il semble pour ce professeur y avoir une certaine opposition entre ses deux missions essentielles : faire comprendre les élèves et leur donner des acquis solides. Toutes les déclarations au sujet de faire comprendre sont au niveau des objectifs ou des principes généraux alors que ce qui concerne la pratique du professeur comme des élèves est plutôt du côté des acquis solides qui s'obtiennent par un travail régulier, la répétition des exercices faits en classe. Le travail en groupes se situe du côté des motivations, du développement de l'intérêt mais n'intervient pas dans l'apprentissage des élèves.

Sur l'axe savoir - élèves, ce professeur se situe plutôt du côté du savoir, ses déclarations concernent souvent des connaissances ou le travail concret de l'élève. Il s'exprime surtout dans le registre cognitif ; le social est présent aussi par la grande importance accordée à la famille ; les références à l'institution occupent également une très grande place. Il fait référence à la réussite des élèves plus qu'à l'apprentissage : l'élève doit prévoir ce que va demander le professeur, simuler les contrôles.

On peut schématiser le modèle d'apprentissage sous-jacent de la façon suivante :
Le professeur a des connaissances à transmettre à l'élève, celui-ci doit les acquérir. Pour cela, le professeur doit intéresser ses élèves, ceux-ci doivent participer et la famille doit s'intéresser et soutenir les efforts de l'élève et de l'enseignant. L'élève apprend par reproduction d'un modèle : il apprend, retient et reconnaît des situations déjà rencontrées. Sa participation consiste à s'intéresser à ce que dit le professeur, à essayer de comprendre ce qu'on veut lui transmettre et à poser des questions si quelque chose n'est pas clair. Le reste, les situations de recherche par exemple, c'est un "plus" qui intervient au niveau des motivations, pour montrer l'intérêt des mathématiques.

Le professeur B

Les objectifs de ce professeur sont de faire assimiler les contenus des programmes en donnant aux élèves des acquis solides en même temps qu'une certaine autonomie, et si possible de leur faire en plus aimer les mathématiques.

Au niveau des principes généraux, son principal souci est de faire en sorte que les élèves se trouvent bien en classe, de faire des choses qui leur plaisent, condition pour obtenir d'eux suffisamment d'investissement et de travail : le professeur doit s'adapter à ses élèves et les mettre en valeur. En ce qui concerne plus spécifiquement les mathématiques, il faut intéresser les élèves avec des situations motivantes et cerner l'endroit où l'élève bute pour le débloquer le plus possible.

Il y a des contraintes extérieures : du côté de l'institution les programmes et le fait que l'enseignement soit obligatoire, du côté de l'élève des contraintes familiales – pour ce professeur, ce sont celles qui pèsent le plus pour expliquer les cas d'échec important–, et aussi l'intérêt et le travail des élèves ; mais il y a aussi des contraintes intérieures pour le professeur : son "tempérament" qui lui rend plus ou moins faciles certaines formes de travail. Les effectifs et le temps apparaissent assez peu, sauf quand il s'agit du travail en groupes, modalité à laquelle il reconnaît des avantages pour le travail des élèves mais qu'il trouve personnellement difficile à pratiquer : les contraintes y apparaissent plus fortement.

Ce professeur est très préoccupé de la réussite des élèves. C'est assez net au niveau de l'évaluation : il faut diversifier les contrôles, donner assez de questions faciles, y compris du "par cœur" pour avoir une réussite suffisante des élèves faibles. La diversité des situations à proposer aux élèves apparaît importante plutôt pour avoir une meilleure réussite que pour favoriser l'apprentissage. La réussite apparaît comme une condition nécessaire de l'apprentissage.

Sur l'axe savoir-élèves, on peut penser que ce professeur est beaucoup plus du côté des élèves. Ses choix sont faits prioritairement en relation avec les réactions des élèves. Le professeur doit être très attentif à la fois à la réussite et aux difficultés de ses élèves pour l'aider dès que l'élève bute.

Pour ce professeur, les registres sociaux et affectifs sont très importants, ce sont toujours eux qui sont cités les premiers et spontanément, aussi bien pour expliquer les difficultés des élèves que les attentes et les conditions de la réussite. Le professeur donne beaucoup d'importance aux relations avec la famille, au plaisir que ses élèves et lui-même éprouvent en faisant des mathématiques et à l'ambiance dans la classe. Les registres institutionnel, cognitif et épistémologique interviennent surtout sur sollicitation et les réponses aux questions portant explicitement sur ces domaines font le plus souvent intervenir aussi les niveaux affectif ou social. Plus qu'à l'institution, c'est au professeur dans sa classe que cet enseignant se réfère le plus souvent dans ses déclarations.

On a une opposition entre les différents objectifs : pour plaire aux élèves, il faut du jeu, du nouveau, pour leur donner des acquis solides, il faut du travail répétitif qui leur plaît moins. On peut aussi trouver une certaine contradiction à propos du franchissement des difficultés, qui s'exprime à propos du travail à la maison et de l'intervention éventuelle de la famille : d'une part il faut que la famille ne se substitue pas à l'élève, que ce dernier franchisse la difficulté, d'autre part le professeur qui a donné à la maison un travail plus difficile parce que les élèves ont le temps de chercher, prépare ce travail en classe pour que l'élève n'ait pas la vraie difficulté.

Le modèle qui semble se dégager paraît différencié suivant les élèves. Pour apprendre, il faut surmonter un certain nombre de difficultés. Les très bons élèves peuvent affronter seuls quelques difficultés (pour obtenir des points entre 16 et 20 dans les contrôles par exemple), pour les autres, il faut toujours la médiation de l'adulte qui va préparer le terrain et aider les élèves. L'idéal est d'aimer les mathématiques et de prendre du plaisir à en faire. Si on n'est pas très doué, on peut apprendre à force de volonté et de travail en reproduisant ce qui a été enseigné (calquer la démonstration d'un théorème par exemple). Dans cette optique, l'existence de méthodes de résolution de problèmes est assimilée à la possibilité de faire un inventaire de problèmes type. Ce modèle est renforcé par l'expérience de ce professeur en tant qu'apprenant.

Le professeur C

Sur le plan des objectifs, ce professeur veut faire acquérir les contenus des programmes mais en donnant surtout aux élèves le goût du raisonnement et de la vérité scientifique, du sens critique.

Sur le plan des principes pédagogiques, il cherche surtout à valoriser les idées des élèves, la confrontation de différentes méthodes et l'écoute et la reprise par les élèves d'idées d'autres élèves, ce qui l'amène à utiliser régulièrement le travail en groupes dans des conditions qui permettent une implication de chacun des élèves. En plus de l'acquisition des connaissances, il évalue le réinvestissement dans des activités nouvelles et la capacité des élèves à trouver quelque chose de nouveau. La véritable activité des élèves, celle qui est importante pour cet enseignant, est l'activité intérieure plus que ses manifestations à l'extérieur : elle peut aussi bien exister dans un enseignement traditionnel. Il faut apprendre aux élèves à travailler pour la gloire et pas seulement pour la note, et même gratuitement, pour leur propre plaisir.

Les contraintes exprimées sont plutôt d'ordre psychologique en ce qui concerne les élèves : on est obligé de tenir compte du fait que les élèves de cet âge ne peuvent écouter quelque chose d'extérieur à eux que si on les a d'abord laissés aller au bout de leur idée. On doit les aider à dépasser ce stade et leur apprendre à écouter les autres. Les autres contraintes semblent bien intégrées et ne pas être ressenties comme telles : les nouveaux programmes paraissent même en lever une et ce professeur peut maintenant procéder comme il le faisait déjà avant, mais légitimement cette fois. Le travail des élèves ne semble pas poser de problème et apparaît comme une conséquence des exigences du professeur.

Ce professeur se réfère très peu à l'institution mais surtout à l'enseignant dans sa classe, d'autant que celui-ci apparaît assez peu contraint sur le plan institutionnel, les règles fixées semblant plutôt avoir été choisies par l'enseignant lui-même (groupes de niveau, évaluation). On trouve plutôt des oppositions entre des impératifs d'ordre didactique. C'est pourquoi, sur l'axe savoir - élèves, je situerais plutôt ce professeur entre les deux pôles. Sur cet axe apparaissent en effet un certain nombre de contradictions bien connues en didactique, notamment à propos de l'avancée du temps didactique : le professeur a envie, et c'est son devoir, de faire avancer le temps didactique, mais il doit aussi laisser aux élèves le temps de se sécuriser et d'éprouver du plaisir. Une contradiction apparaît aussi à ce niveau entre ce qui résulte de la pratique, de l'expérience, et "ce qui se dit à l'IREM" auquel ce professeur, qui anime des stages sur l'articulation entre le cours et l'activité des élèves dans les nouveaux programmes de collège, adhère par ailleurs. C'est une manière de relever une double contrainte didactique : la dévolution du sens et la mémorisation des acquis, "ce qui se dit à l'IREM" étant plutôt assimilé à la dévolution du sens.

Sur l'axe apprentissage - réussite, ce professeur se situe plutôt du côté de l'apprentissage qui apparaît comme une condition de la réussite. La réussite n'est pas toujours au rendez-vous parce que les élèves n'arrivent pas à faire la preuve de leurs connaissances. Là encore on trouve une opposition d'ordre didactique.

Il utilise souvent plusieurs registres pour une même explication, mais c'est le cognitif qui domine assez nettement, bien qu'il intervienne très souvent lié à l'affectif ou au social _ par social, il faut d'ailleurs ici plutôt entendre les relations avec les autres élèves que celles avec la famille qui apparaissent d'ailleurs très peu (seulement au moment des devoirs à la maison que la famille fait parfois à la place des élèves).

Le modèle qui semble se dégager est plutôt celui d'un apprentissage par l'activité des élèves et le sens qu'ils donnent à ce qu'ils font, la confrontation de plusieurs points de vue, avec une forte composante sociale : les élèves apprennent beaucoup en écoutant les autres et en essayant de suivre leur démarche. Mais il y a des différences suivant les élèves : pour certains ce schéma ne fonctionne pas et ils ont besoin d'apprendre de façon répétitive. Le professeur doit donc différencier son enseignement en essayant de se conformer le plus possible au premier schéma d'apprentissage mais en permettant la répétition pour ceux qui en ont besoin.

Le professeur D

Au niveau des objectifs, ce professeur s'exprime surtout sur le plan social : reconnaître des règles sociales, apprendre les élèves à vivre ensemble, les autres objectifs sont très peu explicités : que les élèves retiennent des connaissances et soient capables de les mobiliser pour résoudre des problèmes.

On a au contraire beaucoup de déclarations au niveau des principes pédagogiques. Il faut faire réussir les élèves et pour cela les aider à décrypter le contrat didactique, reconnaître que certaines choses sont difficiles et ne s'apprennent pas en une fois, et avoir des exigences mesurées, les mêmes pour tous les élèves de façon à ne pas créer l'échec pour des élèves moyens qui se trouvent dans des bonnes classes. Le professeur doit donner du sens à ce qu'il enseigne, motiver les élèves mais aussi privilégier le fond plutôt que la forme ou la technique. Il doit aussi soigneusement contrôler son action sur les élèves (par exemple comment écouter se retraduit comment savoir si les élèves ont écouté).

Les déclarations font souvent intervenir les registres affectif ou social (au niveau de la classe). Le registre cognitif apparaît aussi mais sur des choses assez générales comme exercer la capacité de synthèse (redonner le contenu de la leçon en quelques mots) ou voir les mathématiques comme un jeu gratuit.

Les contraintes n'apparaissent pas trop fortes. Elles sont du côté des élèves (motivations surtout) et de l'institution, particulièrement l'organisation du temps et des effectifs.

Ce professeur relève un antagonisme qui se manifeste dans le partage du temps de l'élève entre les divers enseignants :

- d'une part horizontalement, entre les enseignants des différentes disciplines qui n'arrivent pas à se coordonner pour l'organisation du travail de l'élève. Ce professeur envie de ce point de vue la situation des instituteurs.
- d'autre part verticalement, dans l'avancée à long terme du temps didactique, avancée partagée entre plusieurs professeurs. On peut déceler l'expression d'une certaine rivalité et la crainte du jugement des collègues, qui font que le professeur du niveau inférieur a toujours envie d'avancer ce qui va être difficile l'année suivante, pour que ses élèves réussissent (et donc que lui soit reconnu comme ayant réussi à préparer ses élèves). Ce désir du professeur l'amène à certaines contradictions dans la gestion du temps.

Sur les axes que nous avons dégagés, on peut situer de professeur plutôt du côté élèves sur l'axe savoir - élèves, plutôt du côté réussite sur l'axe réussite - apprentissage, la réussite apparaissant comme nécessaire à l'apprentissage et dans une position médiane sur l'axe institution - professeur dans sa classe : le professeur est assez libre dans sa classe, mais un certain nombre de décisions qu'il aimerait pouvoir prendre lui échappent.

Le modèle d'apprentissage qui semble se dégager nous paraît fondé du côté de l'élève sur la volonté de réussir, l'entrée dans un bon contrat didactique, un bon rapport aux mathématiques (notamment accepter un jeu désintéressé) et "l'engrangement" de connaissances mobilisables, ce qui repose sur une bonne capacité de synthèse et l'entraînement. Cela peut se faire sous condition de bonnes relations sociales avec le professeur et éventuellement les autres élèves. Le professeur de son côté doit être attentif à l'élève, contrôler le fait qu'il suit bien et aussi respecter son rythme, avoir des exigences fermes mais raisonnables, privilégier le fond sur la technique et la forme. L'élève apprend surtout par la médiation de l'enseignant.

L'instituteur A

Les objectifs généraux qu'il déclare sont l'acquisition des connaissances de base, la socialisation et l'acquisition de méthodes de travail. Ses objectifs de contenu sont décrits de façon précise en ce qui concerne les nombres (numération, techniques opératoires, calcul mental, ordre, approximations). La résolution de problèmes en tant que mise en place de stratégies de recherche y tient une place importante. Les connaissances elles-mêmes apparaissent à importance égale avec les méthodes et le raisonnement "on ne peut raisonner que si on a des connaissances".

Le registre dominant est le registre cognitif, auquel il faut ajouter les interactions sociales dans la classe. Le registre affectif apparaît également, notamment au niveau de la cohésion des points de vue, du "réseau de confiance" entre famille, école, élève, "le triangle doit fonctionner". Ce maître semble se situer de façon relativement équilibrée sur l'axe savoir - élèves. La responsabilité de la réussite ou de l'échec de l'élève semble assez nettement du côté de l'école et notamment des pratiques du maître dans sa classe : c'est au maître de s'adapter à l'écoute des élèves, on ne propose pas suffisamment de situations concrètes, on n'analyse pas assez les erreurs des élèves. Et même le maître, par des pratiques adaptées et si on lui en donne les moyens, peut aider à pallier des carences familiales, notamment en ce qui concerne le jeu et le langage.

Les contraintes ne semblent pas très fortes, ce sont surtout les effectifs et les moyens matériels, mais les arguments portent plus sur les pratiques du maître dans sa classe que sur le côté institutionnel qui n'est considéré que pour rendre possibles les pratiques envisagées. Du côté des élèves, les problèmes viennent de la non-maîtrise du français, et du manque de concentration. Le maître doit mettre en place des stratégies pour remédier à ces lacunes, d'où l'importance donnée au jeu et au travail en groupe, qui permet de développer la communication, un des points essentiels que ce maître essaie de valoriser, avec l'imagination.

Le modèle qui semble se dégager est celui d'une construction des connaissances par l'action des élèves et des interactions sociales entre élèves et entre élèves et maître, la communication entre élèves permettant de médiatiser celle du maître et de l'élève. Une grande place est faite aussi à la mémorisation, qui doit être favorisée par les pratiques précédentes ; l'élève mémorise les résultats et aussi des éléments de stratégies qui pourront être remises en service à d'autres occasions.

Il se dégage une nette impression de cohérence des propos de cet enseigant, y compris au niveau de l'évaluation qu'il s'agit de faire contribuer à la formation, en même temps qu'à la responsabilisation des élèves.

L'origine sociale des élèves apparaît comme un faible élément de différenciation, notamment en regard de leur passé scolaire, en ce qui concerne leur image des mathématiques. Le modèle d'apprentissage qui sert de référence à cet enseignant est le même pour tous les élèves, quelles que soient leur origine sociale et leur réussite à l'école. Il reconnaît que les élèves en profitent inégalement, mais, pour lui, c'est celui qui convient le mieux à tous.

L'instituteur B

Les objectifs de ce maître se définissent surtout au niveau du développement de capacités générales d'analyse, de synthèse et de rigueur. L'acquisition des apprentissages de base est le premier objectif de l'école primaire, mais l'accent est plutôt mis sur les capacités méthodologiques et le développement de la personnalité que sur les connaissances elles-mêmes.

Le registre social a une place prépondérante, notamment l'image plus ou moins valorisante de l'école dans la famille. L'origine sociale des élèves semble avoir une importance déterminante dans leur attitude et donc dans leur réussite à l'école. Ce qui manque aux élèves en difficulté, ce sont justement les capacités que ce maître se donne pour objectif de développer chez ses élèves. Le registre affectif est très important aussi, notamment la relation entre maître et élève favorisée à l'école primaire par l'existence d'un maître unique. Mais l'appel à l'un ou l'autre de ces deux registres se fait en mettant plutôt la responsabilité du côté de l'élève ou de sa famille.

La première contrainte, qui est ressentie très fortement, est celle du temps. D'ailleurs la solution proposée par ce maître pour améliorer les résultats des élèves est l'allongement de la scolarité primaire.

Dans les objectifs du maître et le travail qu'il propose aux élèves, il semble y avoir une certaine opposition, voire contradiction, soulignée par le maître lui-même entre d'une part les activités de recherche nécessaires à la compréhension et au réinvestissement à bon escient dans d'autres situations, et d'autre part la systématisation indispensable pour la mémorisation et donc aussi le réinvestissement. La contradiction vient pour ce maître du manque de temps qui amène obligatoirement à négliger un des aspects : dans son cas, c'est souvent la systématisation, et le réemploi qui, avec ces enfants demanderaient beaucoup de temps, et c'est d'ailleurs cohérent avec les objectifs prioritaires déclarés.

Le modèle d'apprentissage en référence n'est pas clairement explicité, les élèves apprennent dans des situations qui les motivent et où ils ont à faire une recherche, ils apprennent à analyser les situations pour leur appliquer des méthodes de résolution déjà élaborées par eux ou par d'autres. On peut aussi penser à un bain culturel, et l'adhésion aux valeurs culturelles de l'école paraît une condition préalable et déterminante de l'apprentissage.

Les solutions proposées le sont plutôt du côté institutionnel que de celui du maître dans sa classe. C'est plus difficile de situer ce maître sur les autres axes.

L'instituteur C.

Les objectifs déclarés au niveau général concernent les apprentissages de base et l'autonomie. Cela se concrétise aussi en mathématiques par les techniques opératoires et la résolution de problèmes, et pour cela la structuration des outils à la disposition des enfants (pour qu'ils soient capables de les "sortir du tiroir" au bon moment). L'objectif prioritaire de cet enseignant est le raisonnement, faire comprendre, même pour les techniques opératoires.

L'apprentissage semble fondé sur l'action (le cours est facile puisqu'on l'a vécu ensemble) et les interactions sociales entre élèves (place très importante pour le travail en groupes), le tout renforcé par un entraînement suffisant (nombreux exercices, travail à la maison).

Les contraintes sont le temps, les effectifs et les parents d'élèves qui semblent avoir un poids assez important. Du côté de l'élève, il y a surtout le problème de la lecture. Les responsabilités de l'apprentissage ou de l'échec semblent donc relativement équilibrées entre la famille et l'école, vue plutôt du côté de l'enseignant dans sa classe que du côté de l'institution. Celle-ci devrait cependant réduire les effectifs pour permettre une meilleure individualisation de l'apprentissage.

Le registre privilégié semble le registre cognitif. Le soutien de l'élève par la famille paraît important aussi bien sur le plan cognitif que sur le plan affectif. Le registre proprement social apparaît très peu.

Deux types d'opposition semblent se manifester dans le discours de cet instituteur. Le premier se rapporte à l'autonomie, on veut développer l'autonomie des élèves mais ils ne l'ont pas encore donc il faut les aider quand même, cela apparaît en particulier à propos de la tentative de mise en pratique d'autoévaluation. Cette contradiction est pour l'enseignant due principalement au trop jeune âge de ses élèves (rappelons qu'ils ont de 7 à 8 ans). L'autonomie apparaît très fortement au niveau des objectifs mais on voit moins nettement par la suite ce qui va permettre de la développer (à part peut-être le travail en groupe), notamment parce que ce qui permettrait de le faire ne peut être objet d'évaluation, et que le système d'évaluation chiffrée semble plutôt y être un frein. Le second sujet d'opposition concerne l'apprentissage des mécanismes et la résolution de problèmes. L'apprentissage de connaissances mécaniques semble contradictoire avec leur usage intelligent. Une inquiétude de cet enseignant concerne le possible blocage des élèves dans la résolution de problèmes par la maîtrise des techniques opératoires, ce qui amènerait chez les plus grands des comportements qu'on n'observe pas chez les petits.

Sur l'axe savoir - élèves, je situerais plutôt cet instituteur du côté du savoir, vu l'importance du registre cognitif, le développement de l'autonomie des élèves est lui-même considéré dans cette perspective. Il est aussi plus préoccupé de l'apprentissage des élèves que de leur réussite (qui en est dissociée), ce qui s'explique peut-être aussi par le niveau d'enseignement et l'âge des élèves.

L'instituteur D

Les objectifs visés par cet enseignant sont des outils, des méthodes de travail, de l'autonomie, la socialisation et les contenus étant des objectifs intermédiaires par lesquels il faut passer pour atteindre ceux-là.

Le registre nettement dominant est le registre affectif, d'ailleurs les difficultés des élèves sont essentiellement imputées à des blocages psychologiques. L'origine sociale des élèves ne paraît pas avoir d'incidence sur leur réussite en mathématiques, sauf par l'intermédiaire du français et notamment de la lecture. La réussite ou l'échec sont donc principalement imputables à l'élève, à sa nature ou au moins à son vécu antérieur. L'attente vis à vis de la famille se situe aussi principalement sur le plan affectif. Les parents, l'élève et le maître sont liés par un "contrat tripartite où chacun a son rôle à jouer mais ne doit pas empiéter sur celui des autres." Notamment les parents doivent soutenir l'élève mais ne doivent pas intervenir dans le travail scolaire et les devoirs doivent être faits par l'élève seul.

Une certaine contradiction apparaît au niveau de la vision des mathématiques elles-mêmes : elles sont jugées fermées, autoritaires... quand il s'agit des techniques, et en même temps trop ouvertes, avec un champ de possibles effrayant quand il s'agit de la résolution de problèmes.

Il est difficile d'esquisser le modèle d'apprentissage auquel se réfère cet enseignant puisque les questions correspondantes n'ont pas été posées. Cependant, à travers le discours apparaît l'importance des interactions sociales à l'occasion par exemple des travaux de groupes, mais subordonnées à une appropriation individuelle. Il semble que l'apprentissage se fait par une appropriation individuelle après construction collective. Cependant les relations avec le maître et surtout avec la discipline (être motivé, s'intéresser, ressentir le besoin) sont déterminantes pour l'apprentissage qui devient pour cette raison impossible pour certains élèves dans le courant du collège (à partir de la 4ème environ).

Cet enseignant se situe plutôt du côté de l'apprentissage que de la réussite, qui est peu valorisée en elle-même : l'important, c'est que l'élève fasse des efforts et progresse, même si la réussite n'est pas encore très nette. Cependant, en même temps, ce maître se situe de façon assez centrale sur l'axe savoir - élève : il est important que l'élève s'épanouisse, mais il est aussi important qu'il ait au moins un certain nombre de techniques, à n'importe quel prix, pour faciliter le passage dans le secondaire où c'est l'axe du savoir qui est vu comme très privilégié. Le passage dans le secondaire est d'ailleurs considéré par ce maître comme une rupture importante.

3.4. Des points communs, des différences.

Nous avons retenu sur chaque dimension ou axe 3 positions possibles et relevé la position de chaque enseignant sur chaque axe. A celles déjà signalées, nous en ajoutons 3 qui prennent plutôt en compte ce que nous avons appelé les registres utilisés :

- la dimension famille - école dans la responsabilité de la réussite (sur le plan social)
- la dimension professeur - autres élèves suivant l'importance accordée aux interactions entre élèves dans l'acquisition du savoir.
- la dimension cognitif - affectif suivant le registre dominant dans les déclarations.

Nous codons par une ou deux lettres la position de chaque enseignant sur chacun de ces axes :
- (s, se, e) pour l'axe savoir - élèves, suivant que l'enseignant se trouve plutôt du côté du savoir, dans une position médiane ou du côté des élèves.
- (i, ip, p) sur l'axe institution - professeur dans sa classe, suivant que l'enseignant place les responsabilités plutôt du côté de l'institution, de façon équilibrée ou du côté du professeur.
- (a, ar, r) sur l'axe apprentissage - réussite, suivant que l'enseignant fait plus référence à l'un ou à l'autre dans ses préoccupations concernant les élèves.
- (f, fec, ec) sur l'axe famille - école dans la responsabilité de la réussite (déterminants sociaux)
- (P, Pé, é) sur l'axe professeur - autres élèves suivant l'importance accordée aux interactions entre élèves dans l'acquisition du savoir.
- (c, caf, af) sur l'axe cognitif - affectif suivant ce qui domine dans les déclarations de l'enseignant.

Nous n'avons pas codé l'axe famille - école sur le plan affectif dans la mesure où tous les enseignants accordent une grande importance au soutien de la famille, les nuances dans la nature de ce soutien se retrouveront à travers la position sur l'axe cognitif affectif et le poids des déterminants sociaux.

Nous avons aussi retenu sur un même axe qu'il ne faut pas voir orienté ni même ordonné, les dimensions plaisir, effort, imagination, communication suivant ce qui est mis en avant et valorisé dans la pratique des mathématiques ou même du travail scolaire ; pour l'instituteur D, la position est différente suivant qu'on considère le travail scolaire en général où ce qui est mis en avant est plutôt le plaisir, l'épanouissement, et le domaine des mathématiques qui est beaucoup plus lié à l'effort, nous avons dans ce cas retenu ce qui concerne les mathématiques. Nous avons rassemblé ces dimensions sans les opposer et avons ici un codage plus complexe : l pour idées, intérêt, imagination, j pour plaisir, être à l'aise en classe, t pour effort, progrès, g pour communication entre élèves, échanges. Nous indiquons deux lettres si deux de ces dimensions apparaissent. Cela donne donc beaucoup de codes possibles sur cet axe. La présence de deux dimensions sur le dernier axe peut correspondre à une position équilibrée et à des points de vue qui se complètent : on trouve à peu près autant d'arguments se référant à un pôle qu'à l'autre. Elle peut aussi signifier une position de conflit : on se retrouve sur cet axe avec des objectifs ressentis comme contradictoires, dans ce cas nous avons souligné les codes correspondants.

Nous obtenons les codages suivants :

Professeur A	(s, i, r, f, P, c, l)	Instituteur A	(se, p, a, ec, é, c, lg)
Professeur B	(e, p, r, f, P, af, jt)	Instituteur B	(e, i, a, f, P, af, t)
Professeur C	(se, p, a, ec, é, c, lg)	Instituteur C	(s, p, a, fec, Pé, c, l)
Professeur D	(e, ip, r, fec, Pé, af, j)	Instituteur D	(se, p, a, ec, Pé, af, t).

Ce qui frappe en premier lieu, c'est la grande diversité des profils obtenus. C'est assez normal puisqu'on a retenu 7 dimensions pour situer les enseignants (ce qui, avec 3 valeurs pour les 6 premières et a priori 10 pour le dernier axe, donne 10×3^6 valeurs possibles !) d'autant plus que les dimensions retenues sont justement celles qui permettaient de différencier les sujets.

Tous les enseignants mettent dans leurs objectifs l'acquisition des programmes, de méthodes de travail, du raisonnement, reconnaissent l'importance de l'intérêt que la famille porte à l'école ou de la compréhension par les élèves de ce qu'on attend d'eux. Ils pensent tous que les élèves apprennent mieux s'ils s'intéressent à ce qu'ils font et s'il y a une ambiance de travail dans la classe mais les diversités sont grandes dans ce qu'ils considèrent comme vraiment prioritaire aussi bien au niveau des objectifs que des moyens de les atteindre.

On trouve cependant deux enseignants qui ont exactement le même profil avec les variables retenues, le professeur C et l'instituteur A. Ils se distinguent cependant par l'importance plus grande que l'instituteur A accorde à la cohésion entre école et famille et à la maîtrise du français. Ceci peut peut-être s'expliquer d'un côté par la différence des niveaux d'enseignement, de l'autre par le fait que cet instituteur a enseigné pendant de nombreux années à des élèves issus de milieu populaire avant de s'adresser à des populations plus favorisées ou plus mélangées, ce qui ne semble pas le cas du professeur C.

On peut remarquer aussi qu'il y a deux axes sur lesquels nous avons situé tous les enseignants dans une position extrême :
- l'axe affectif - cognitif : 2 instituteurs et 2 professeurs de collège se réfèrent prioritairement à la dimension cognitive, et autant de chaque catégorie à la dimension affective.
- l'axe réussite - apprentissage : tous les instituteurs (même si ce n'est pas aussi net pour tous, en particulier pour l'instituteur B) et un professeur de collège sont plus préoccupés de l'apprentissage des élèves et n'accordent qu'une valeur très relative aux notes alors que les autres professeurs de collège se placent plutôt sur le plan de la réussite et traduisent souvent une question sur l'apprentissage en termes de "comment avoir une bonne note".

Nous allons essayer de voir maintenant d'une part si, pour les sujets interrogés, il existe une liaison entre certaines dimensions et si cette liaison pourrait s'expliquer de façon théorique, d'autre part si des différences constatées peuvent être reliées à d'autres variables (niveau d'enseignement, formation initiale, contact avec la recherche, recrutement social des élèves).

Registre cognitif, centration sur le savoir

Les enseignants qui s'expriment prioritairement dans le registre cognitif ont dans leurs premiers soucis de faire progresser le savoir même si c'est parfois à égalité avec l'adaptation aux élèves. Ils valorisent également tous chez leurs élèves le fait d'avoir des idées, de montrer de l'intérêt pour ce qu'on leur enseigne. D'ailleurs, dans les deux cas où c'est le savoir qui est mis en avant, c'est le fait d'avoir des idées et de réfléchir qui est le plus valorisé. Dans les deux cas où l'enseignant se situe de façon assez équilibrée entre les pôles élèves et savoir et où il s'exprime surtout dans le registre cognitif, ce qui est valorisé, c'est à la fois le fait d'avoir des idées et la communication entre élèves. En fait, le dernier axe se décompose en deux parties, l'une se réfère au registre cognitif et l'autre au registre affectif : les enseignants qui s'expriment principalement dans le registre affectif se situent sur l'axe plaisir - effort, alors que ceux qui s'expriment dans le registre cognitif privilégient la dimension "imagination" auxquels ils joignent parfois aussi la communication entre élèves, ce qui indique alors qu'ils se placent dans une position médiane sur l'axe savoir-élèves.

Pour repérer d'autres liaisons éventuelles, on peut regarder les couples formés par deux des axes retenus et voir ceux qui séparent le plus les enseignants et ceux qui les séparent le moins. Comme on a retenu 7 axes, cela fait 21 couples possibles avec à chaque fois au maximum 7 couples représentés puisque les enseignants C et A' sont toujours placés de la même manière.

Nous avons trois couples qui séparent peu les enseignants et donnent 4 catégories.

- les axes savoir- élèves et cognitif -affectif :

s, c : A, C'

se, c : C, A'

se, af : D'

e, af : B, D, B'

- les axes famille - école et interactions avec le professeur- interactions entre élèves :

f, P : A, B, B'

fec, Pé : D, C'

ec, Pé : D'

ec, é : C, A'.

- les axes réussite - apprentissage et cognitif - affectif :

r, c: A

r, af : B, D

a, c : C, A', C'

a, af : B', D'

Il semble donc y avoir une liaison entre la dimension "savoir" et le registre cognitif (du type c $\Rightarrow$ s), entre la dimension "élèves" et le registre affectif (af $\Rightarrow$ e), entre les dimensions "responsabilité de la famille" et "interactions privilégiées avec l'enseignant" (f $\Rightarrow$ P), enfin entre les dimensions "responsabilité de l'école" et "interactions entre élèves" (é $\Rightarrow$ ec). Le dernier couple de dimensions qui donne 4 valeurs seulement ne correspond pas à une liaison entre dimensions : il correspond simplement au fait que les enseignants se séparant de façon tranchée sur ces deux axes, il n'y avait que 4 valeurs possibles et elles sont toutes représentées. La seule remarque que l'on peut faire c'est que, sur notre population, le registre cognitif est un peu plus souvent associé au pôle apprentissage qu'au pôle réussite.

Le couple qui sépare les enseignants au maximum et correspond donc à des dimensions plus indépendantes est surtout :

* savoir - élèves d'une part, institution - professeur dans sa classe d'autre part :

s,i : A ;   s, p : C' ;   se, p : C, A' ;   se, ip : D' ;   e, p : B ;   e, ip : D ;   e, i : B'

D'autres couples donnent aussi 7 valeurs mais ils font tous intervenir l'axe plus complexe sur lequel nous avons regroupé plusieurs dimensions sur lesquelles les enseignants se classaient partiellement : nous avions vu que le registre cognitif correspondait aux dimensions I (imagination) et g (interactions entre élèves), et que le registre affectif correspondait aux dimensions j (plaisir) et t (effort). Il s'oppose à

* institution - professeur dans sa classe :

i, I : A ;   i, t : B' ;   ip, j : D ;   ip, t : D' ;   p, I : C' ;   p, Ig : C, A' ;   p, jt : B

* famille - école :
f, I : A ; f, jt : B ; f, t : B' ; fec, I : C' ; fec, j : D ; ec, Ig : CA' ; ec, t : D'
* interactions avec le professeur - interactions entre élèves :
P, I : A ; P, jt : B ; P, t : B' ; Pé, I : C' ; Pé, j : D ; Pé, t : D' ; é, Ig : C, A'.

Dans les deux dernières lignes on retrouve la liaison relative entre les pôles "famille" et "interactions avec le professeur" d'une part, "école" et "interactions entre élèves" d'autre part. En comparant la première aux autres, on voit une certaine liaison entre les pôles "institution" et "famille" d'une part, "professeur dans sa classe" et "école" d'autre part : seul le professeur B est vraiment en contradiction avec cette liaision : les triplets opposés (f, P, i) d'une part et (ec, é, p) d'autre part regroupent respectivement A et B' d'une part, C et A' d'autre part ; trois enseignants se placent de façon intermédiaire sur au moins une des dimensions, ce qui ne contredit pas une liaison possible ; seul B se situe de façon tranchée et contraire à une liaison entre le couple (f,P) et i : il a sur ces trois axes un code (f, P, p).

Comparaison école - collège.

Ce qui sépare le plus les instituteurs et les professeurs de collège est leur place sur l'axe réussite - apprentissage, les instituteurs se plaçant tous du côté de l'apprentissage et 3 professeurs sur 4 du côté de la réussite. Ceci s'explique par les différences de position par rapport à l'évaluation. Les instituteurs parlent d'une évaluation formative qui permet à l'élève de se situer dans une progression et se méfient beaucoup de l'évaluation chiffrée même s'ils reconnaissent qu'elle est nécessaire, les enseignants de collège la trouvent incontournable et elle pèse manifestement beaucoup sur leur enseignement : c'est déjà la principale information qui était ressortie des discussions dans le stage. La moindre importance accordée à l'évaluation chiffrée par les instituteurs tient peut-être au fait de leurs relations différentes avec les élèves qu'ils voient toute la journée et dans toutes les matières, ce qui leur donne de nombreuses occasions d'évaluation informelle qui leur paraît en fait plus fiable.

Milieu social des élèves

Il semble que les enseignants qui ont dans leur classe une majorité d'élèves de milieu défavorisé (professeurs A et B, et dans une moindre mesure D, instituteurs B et C) accordent tous une grande importance au milieu familial dans la réussite et l'apprentissage des élèves même si l'instituteur D met une plus grande part que les autres du côté de l'école. Remarquons cependant que l'instituteur A qui a eu le même type d'élèves pendant de nombreuses années ne semble pas réagir de la même façon. Il est vrai qu'au moment des entretiens il a quitté l'école où ça se produisait depuis plus de 5 ans.

Formation initiale des professeurs de collège et expériences professionnelles

Il semble se manifester, chez les professeurs de collège une légère différence suivant qu'ils sont certifiés ou PEGC : les certifiés (A et C) s'expriment principalement dans le registre cognitif et accordent une importance assez grande au pôle savoir (code s ou se), les PEGC (B et D) s'expriment principalement dans le registre affectif et accordent leur priorité aux élèves.

Les animateurs IREM (C et D) semblent accorder plus d'importance aux interactions entre élèves et plus de responsabilités à l'école dans la réussite ou l'échec des élèves, les autres professeurs faisant plus confiance aux interactions avec le professeur et donnant beaucoup de poids au milieu familial. Il faut cependant nuancer cette remarque par le fait que les non animateurs IREM sont aussi les enseignants qui s'adressent à un public plus défavorisé. On ne peut donc séparer ces variables.

Les instituteurs A et D qui sont tous deux maîtres formateurs, depuis longtemps pour D, récemment pour A, se retrouvent sur les 4 premières dimensions : dans une position équilibrée sur l'axe savoir-élève, ils se centrent plus sur l'apprentissage que sur la réussite et en donnent la responsabilité principalement à l'école et au professeur dans sa classe. En revanche, ils s'opposent totalement dans leurs rapports aux mathématiques, même s'ils se disent tous les deux plutôt littéraires : l'un s'exprime dans le registre cognitif, privilégie le jeu et l'imagination, l'autre dans le registre affectif et valorise l'effort. On voit nettement apparaître là des différences personnelles à l'intérieur d'un discours cohérent dominant chez les formateurs actuels de l'école primaire.

3.5. Confrontation avec l'observation en classe.

Nous avons présenté dans le chapitre 3 (3A et 3B) des analyses d'extraits de séquences de classe. C'est aussi à travers les discussions sur les séances à proposer aux élèves et le décalage entre ce que nous pensions prévu et le déroulement effectif des séances, que nous avons pu appréhender certaines des conceptions des enseignants concernés sur l'enseignement des mathématiques et surtout la manière dont ils ressentaient les contraintes auxquelles ils étaient soumis. Ces contraintes sont souvent ressenties comme antagonistes et on retrouve la plupart du temps ces éléments de contradiction exprimés au cours des interviews. On y trouve aussi un certain nombre de confirmations des analyses que nous avions faites des choix des professeurs pour la gestion de la classe. Il est vrai que certaines des questions ont été approfondies à cause justement de ces observations antérieures, et que les enseignants trouvaient peut-être là l'occasion d'expliquer leurs choix.

Par exemple, les observations nous ont montré que le professeur A était soucieux de saisir toutes les occasions de faire s'entraîner les élèves et qu'il prenait soin de garder un grand contrôle sur ce qui se passait dans la classe (voir l'analyse des séances 1, 3, 4), c'est aussi ce qui ressort assez nettement de ses déclarations en même temps que le désir de faire comprendre et de faire aimer les mathématiques. C'est dans cette deuxième direction que s'exerce la pression de la noosphère, représentée notamment par le didacticien présent dans la classe : pour que les élèves puissent comprendre et aimer les mathématiques, il faut qu'ils exercent eux-mêmes une certaine activité. Le professeur a donc besoin d'une participation visible de la part des élèves.

L'instituteur B nous donne un exemple de choix un peu opposé : lui aussi souligne dans ses déclarations la contradiction qu'il ressent, à cause de la contrainte du temps, entre deux objectifs prioritaires : celui de faire comprendre qui lui semble passer par la mise en situation de recherche des élèves et celui de la "systématisation", c'est-à-dire l'entraînement, nécessaire à la mémorisation des connaissances par les élèves. Mais ce qui ressort des observations que nous avions faites, et qui est d'ailleurs conforme à ses déclarations, c'est qu'il favorise autant que possible l'expression des élèves, au détriment parfois de l'institutionnalisation et de l'entraînement.

A travers ces exemples, nous voyons que les contraintes que perçoivent les enseignants ne les amènent pas aux mêmes choix dans leurs pratiques effectives en classe. Ils sont relativement conscients des tendances générales qu'ils manifestent dans ces choix (même si on peut sans doute trouver des distorsions en regardant avec une échelle plus fine, par exemple ce qui s'est passé au cours d'une séance précise) et peuvent les expliquer. Ces explications sont sans doute le reflet de rationalisations de phénomènes qui engagent beaucoup plus profondé-ment la personnalité. Nous ne sommes pas compétente pour utiliser ce niveau d'analyse, il nous semble que la manière dont nous avons abordé le problème nous permet d'une part de trouver des régularités qui nous donnent une certaine appréhension des contraintes auxquelles sont soumis les enseignants, là où ils sont placés dans le système d'enseignement, d'autre part des diversités qu'il nous paraît intéressant de connaître et de prendre en compte, par exemple si on s'intéresse à la formation des enseignants.

4. Conclusion

4.1. Un rapport institutionnel à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, au collège, des variations dans les rapports personnels

A travers les discours des enseignants sur leur pratique, leurs objectifs, les difficultés qu'ils rencontrent, on voit se dégager certaines régularités suivant la position institutionnelle qu'ils occupent, même si c'est la diversité des points de vue et des pratiques qui frappe au premier abord. Ce sont ces régularités qui devraient nous permettre de parler, en reprenant la terminologie de Chevallard, d'un rapport institutionnel à l'enseignement des mathématiques pour les professeurs de collège, ou pour les instituteurs.

Nous avons surtout travaillé à partir d'études de cas, même si des discussions ou des réponses à des questionnaires ont pu nous apporter des informations complémentaires sur les populations concernées. Les tendances que nous donnons ici ne sont donc que des pistes que nous pourrions compléter par l'étude des programmes, des commentaires et des manuels des niveaux concernés

Nous avons déjà amorcé dans le paragraphe 2.3. une description des points d'accord des professeurs de collège sur leurs pratiques, points que nous avons mis en relation avec certaines contraintes, notamment sur ce qui est reconnu comme un bon fonctionnement pour une classe, aussi bien pour la marche interne de la classe, l'ambiance que pour le regard extérieur qui se porte surtout sur les résultats. Même s'il apparaît de grandes diversités sur les axes que nous avons retenus, on retrouve chez les professeurs interrogés ce double souci de la bonne marche de la classe, même si les choix faits pour y parvenir sont différents.

Nous n'avons pas de témoignages collectifs d'instituteurs comme c'était le cas pour les professeurs de collège lors d'un stage, il est donc plus difficile de dégager des éléments communs dans les déclarations des instituteurs. Cependant, en reprenant chacun des tableaux du paragraphe 3.2., on voit transparaître des différences entre professeurs de collège et instituteurs.

Nous avons déjà dit que, sur les axes que nous avions retenus, la plus grande différence apparaissait sur l'axe réussite-apprentissage, les professeurs de collège semblant pour la plupart plus soucieux de la réussite de leurs élèves, c'est-à-dire des notes qu'ils obtiennent que de l'apprentissage lui-même, ou au moins semblant identifier réussite et apprentissage, alors que ce n'est pas le cas pour les instituteurs interrogés. Les rapports que les uns et les autres entretiennent avec l'évaluation nous semblent assez différents : elle paraît moins contraignante à l'école primaire qu'au collège, peut-être parce qu'elle a moins de conséquences pour les élèves puisque les instituteurs font plus confiance à l'évaluation informelle qu'aux notes.

Il apparaît d'autres différences qui passent à l'intérieur des axes que nous avons retenus et ne se voient donc pas dans les profils définis précédemment :

- sur ce que sont les mathématiques, l'aspect modélisation du réel, utilisation pour résoudre des problèmes concrets apparaît surtout chez les instituteurs, même si les professeurs mentionnent parfois l'utilisation dans les autres disciplines, alors que l'aspect langage est surtout retenu par les professeurs de collège. De même les professeurs insistent sur l'apprentissage du raisonnement alors que les instituteurs parlent plutôt de recherche de stratégies. D'ailleurs la géométrie est souvent négligée à l'école élémentaire alors que c'est le lieu privilégié de l'apprentissage du raisonnement au collège.
- les situations de recherche sont plus volontiers utilisées à l'école primaire alors que l'entraînement est rarement négligé au collège. Les contraintes de fonctionnement différentes, au niveau de l'emploi du temps en particulier, peuvent contribuer à expliquer cette différence, mais la formation dans les écoles normales, notamment l'existence de stages de formation continue de longue durée est sans doute aussi une variable importante.
- les exigences de formulation sont différentes également et se traduisent par une absence dans les discours des instituteurs : seuls les professeurs de collège éprouvent le besoin de préciser qu'il ne faut pas avoir des exigences de formulation prématurée. Cette remarque est à relier à la moindre importance accordée par les instituteurs à l'aspect langage des mathématiques, du moins pour leur pratique professionnelle.
- le rôle assigné au travail à la maison est aussi assez différent à l'école élémentaire où l'essentiel de l'apprentissage se fait en classe et au collège où une part non négligeable du travail personnel de l'élève a lieu à l'extérieur de l'école.

Des variations importantes apparaissent, par exemple dans le souci de contrôler tout ce que font les élèves, présent surtout chez les professeurs de collège mais de façon très variable, ou au sujet de la pratique et de l'intérêt du travail en petits groupes.

Certaines variations sont peut-être liées à des positions institutionnelles différentes : professeur certifié ou non, enseignement dans une classe "faible" ou une classe "forte", dans une école à recrutement populaire ou plus mélangé... Nous avons étudié trop peu de cas pour hasarder des hypothèses dans ces directions même si certaines différences peuvent coïncider avec ces variables pour les enseignants que nous avons interrogés. D'autres variables, liées à des déterminants éthiques et culturels interviennent sans doute de façon au moins aussi fondamentale. Nous sommes consciente de leur importance mais n'avons pas les moyens de les prendre en compte. Des travaux comme ceux de C. Laville qui s'intéressent à l'économie psychique des enseignants et aux contraintes intérieures auxquels ils sont assujettis permettent de donner un éclairage complémentaire à l'étude que nous avons tentée ici.

4.2. Portée et limites d'un travail de ce type

Nous venons déjà d'évoquer des limites importantes du travail que nous avons entrepris : nous nous limitons à un niveau de représentations, sinon conscientes, au moins préconscientes et partiellement explicitables alors que des niveaux plus profonds peuvent être plus déterminants pour expliquer les pratiques réelles des enseignants. De plus, au niveau même où nous nous sommes placée, il convient d'essayer de préciser la portée didactique d'un travail comme celui-ci.

Que peut-on inférer sur les pratiques réelles ?

Nous avons vu que, pour les enseignants que nous avons à la fois observés en classe et interrogés, il y a une assez bonne concordance, du moins au niveau assez général où nous nous sommes placée ici. Cependant, nous avons pu constater lors des observations le décalage qu'il pouvait y avoir entre ce que nous pensions prévu pour une séance et le déroulement effectif de cette séance. Cela nous amène à considérer avec beaucoup de prudence les déclarations générales des enseignants, par exemple sur la place laissée à la recherche des élèves dans leur enseignement : quel type d'exercices ? quelle est leur intervention pendant cette recherche ? beaucoup de questions sur lesquelles les déclarations des enseignants ne permettent pas de se faire une idée précise si on n'a pas d'autre moyen d'information comme l'observation directe de la classe ou le travail en commun sur des situations à proposer aux élèves —encore faut-il dans ce dernier cas que l'enseignant se sente suffisamment assuré pour défendre sa position d'enseignant ayant réellement à mettre en œuvre la situation élaborée. Dans notre étude de cas, nous n'avons interrogé que des enseignants pour qui nous disposions d'au moins une de ces sources d'information. La question de l'utilisation que l'on peut faire de réponses à des questionnaires à ce sujet, se pose : par quels recoupements peut-on avoir des informations sur les pratiques réelles ?

Quelles conséquences cela peut-il avoir sur l'apprentissage des élèves, sur leur rapport aux mathématiques ?

Si même nous supposons que nous pouvons avoir des informations fiables sur les pratiques réelles des enseignants, il reste à savoir quel effet ont ces pratiques sur l'apprentissage des élèves. Les élèves ont une certaine adaptabilité et peuvent apprendre avec des enseignants de styles très différents. Cependant, ce qui est en jeu, ce n'est pas seulement l'apprentissage des élèves mais aussi leur rapport aux mathématiques. Nous avons par exemple pu voir à travers les témoignages des élèves instituteurs comment leur propre rapport aux mathématiques est le reflet de leur histoire scolaire. Le travail d'A. Robert et E. Bautier-Castaing montre combien les représentations des élèves sur les mathématiques semblent labiles et dépendantes de celles de l'enseignant qu'ils ont actuellement. Ces questions restent largement ouvertes même si les recherches à ce sujet se développent.

Que peuvent apporter les grilles d'analyse que nous avons élaborées ?

Nous avons entrepris ce travail pour comprendre et dépersonnaliser les difficultés que nous avions rencontrées au cours de l'expérimentation. Nous envisagions qu'il puisse être un point de départ à l'élaboration d'un questionnaire écrit qui pourrait permettre d'enquêter sur une population plus large, par exemple tous les instituteurs de cours moyen et tous les professeurs de 6ème et de 5ème d'une circonscription scolaire. Nous avions le projet de le faire dans la circonscription où se trouvaient à l'époque de l'expérimentation les 4 instituteurs et un des professeurs de collège, et qui comporte des établissements scolaires de recrutements divers. Il nous semble que les grilles d'analyse que nous avons construites pourraient nous donner une base de départ pour élaborer un questionnaire qui ne pourrait aborder que des points assez limités, visant par exemple à éclaircir la rupture de contrat dans l'enseignement des mathématiques entre l'école et le collège et les différences suivant le milieu d'origine des élèves.

Vues les réserves méthodologiques déjà faites sur l'interprétation des discours, il paraît important d'aborder les questions à partir de situations ou d'exercices précis.

A cause de l'importance que les professeurs et les élèves lui attachent, et de l'influence qu'elle a sur l'enseignement lui-même, l'évaluation paraît un assez bon moyen d'aborder les représentations des professeurs, aussi bien pour les étudier que pour agir sur les pratiques d'enseignement.

Utilisation pour la formation des maîtres

Les recherches concernant les représentations des enseignants nous paraissent surtout utilisables pour l'information des formateurs, en les incitant à relativiser la transparence de leur discours : les enseignants ne sont pas prêts à entrer dans n'importe quelle problématique, ils ne peuvent pas mettre en œuvre n'importe quelle méthode pédagogique, même s'ils ont de la bonne volonté, et si cela paraît bien fondé au formateur. Il y a donc lieu de tenir compte de cet aspect dans les formations.

Mais il nous semble aussi que nous ne saurions être trop prudent dans l'utilisation de cette notion de représentations métacognitives dans les formations. Il faut par exemple mettre en garde contre l'interprétation qui risque de se produire en termes de bonnes et mauvaises représentations mais parler plutôt d'enrichir ou de complexifier les représentations. Il paraît pour le moins prématuré de vouloir agir sur les représentations des enseignants avant d'avoir de meilleures connaissances sur leur effet sur l'apprentissage des élèves. Il faudrait de plus distinguer ce qui concerne le rapport au mathématiques de pratiques pédagogiques plus générales : même si les deux aspects ne sont pas indépendants, les pratiques pédagogiques font appel à bien d'autres éléments conctitutifs de la personnalité. Dé plus, même si on pense principalement au rapport aux mathématiques, un discours risque de n'avoir aucun impact et la modification des représentations des enseignants se fait lentement; à travers les expériences qu'il mènent eux-mêmes, éventuellement en participant à une recherche.

CHAPITRE 7

BILAN DE L'EXPERIENCE ET QUESTIONS SUR LE CADRE THEORIQUE

Dans ce chapitre, nous tirons le bilan de nos observations. Ce bilan portera d'abord sur les contenus abordés : aires, rationnels et décimaux, proportionnalité. Nous essayerons ensuite d'interpréter les difficultés des élèves à l'aide du cadre théorique développé dans les chapitres précédents (1 et 4) avant de formuler quelques questions de didactique qui pourraient déboucher sur une nouvelle problématique et de revenir sur l'aspect méthodologique.

Pour cela, nous nous appuyons non seulement sur les observations qui ont fait l'objet du chapitre 3 mais sur un travail avec des élèves de 6ème en difficulté qui a été commencé plus récemment, en collaboration avec D. Butlen,[1] travail que nous avons déjà utilisé dans le chapitre 5, et qui se poursuit actuellement avec J. Robinet.

1. Au sujet des contenus

En ce qui concerne les contenus, nous n'avons pas vraiment repéré de difficulté spécifique au public étudié : on retrouve celles qui étaient déjà identifiées mais elles sont plus persistantes et réapparaissent régulièrement alors même qu'elles semblaient surmontées. Certaines, comme l'amalgame entre aire et périmètre, touchent tous les élèves plus ou moins durablement, dans des situations plus ou moins complexes, et pourraient se rattacher à de véritables obstacles épistémologiques, dont on peut se demander s'il existe des traces dans l'histoire. D'autres difficultés, par exemple concernant la proportionnalité, semblent insurmontables pour certains élèves alors que des élèves du même âge les franchissent assez facilement ou même les ont franchies plus tôt. Revenons sur les notions d'obstacles, conceptions, représentations avant de faire le point pour chacun des contenus abordés.

1.1. Conceptions, obstacles, représentations.

Le terme "conception" est employé dans les travaux de didactique —et cette thèse ne fait pas exception— en référence à deux points de vue nettement différents bien qu'assez étroitement reliés :

- un aspect lié au contenu et aux situations, aux problèmes qui le mettent en scène : par exemple, M. Artigue et J. Robinet (1982) examinent différentes conceptions du cercle associées à des définitions différentes ; ces définitions sont équivalentes mais correspondent à des points de vue différents : elles mettent en relief une propriété plutôt qu'une autre ; suivant le problème, c'est l'une ou l'autre qui va être mieux adaptée, plus pertinente. C'est principalement dans ce sens aussi que G. Brousseau emploie le mot "conception" dans son intervention[2] au colloque international "obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif" quand il parle d'une quinzaine de conceptions différentes à propos de la division, ou encore de la commensuration et du fractionnement comme différentes conceptions des rationnels. Cet aspect est surtout utilisé dans l'analyse des situations didactiques, notamment dans l'analyse a priori d'une ingénierie didactique.
- l'autre aspect se situe plutôt du côté des élèves et s'intéresse aux conceptions —justes ou fausses— qu'un élève est susceptible de mettre en œuvre dans une situation donnée, pour résoudre un problème. Il est utilisé dans l'analyse des erreurs des élèves. Ces conceptions erronées des élèves ont en général une parenté avec des conceptions justes mais dans un autre domaine de validité par exemple. C'est plutôt en référence à cet aspect, qui est d'ailleurs à rapprocher du concept de théorème en acte que G. Vergnaud parle de conceptions dans le même colloque[3].

Nous avons nous-même, dans ce sens, parfois utilisé le terme "représentations" en parlant par exemple des représentations que les élèves se faisaient des fractions et des nombres décimaux (M.J. Perrin-Glorian, 1986). Mais ce mot a déjà de multiples significations sur lesquelles nous reviendrons par ailleurs : des représentations figurées à la représentation du problème, sans parler des représentations métacognitives. C'est pourquoi nous disons maintenant plutôt "conceptions". Les conceptions des élèves peuvent être rattachées à des représentations imagées ou symboliques, à des images mentales.

---

[1] voir rapport de recherche pour 1988-1989 Perrin-Glorian, Butlen, Lagrange, 1989.
[2] "Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques" Brousseau (1989)
[3] "Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques" Vergnaud (1989)

Les deux aspects dont nous avons parlé sont étroitement reliés parce que les conceptions que les élèves mettent en œuvre dépendent des problèmes qu'ils traitent et des situations où ils sont placés. Il y a cependant une différence importante : les conceptions différentes rattachées à un même concept mathématique dans l'analyse du savoir sont correctes même si le fait d'en privilégier une peut empêcher d'en voir une autre qui serait plus adaptée pour résoudre le problème à traiter, alors que chez les élèves peuvent coexister des conceptions erronées, voire contradictoires sans que l'élève soit conscient de la contradiction ou en tous cas en tienne compte, parce qu'il les utilise dans des domaines étrangers, ou du moins qu'il ne fait pas interférer, ce qui fait que ces conceptions ne sont pas activées simultanément.

On peut rendre compte de ces deux aspects en termes de rapport au savoir tel que le définit Chevallard (1989) : pour chaque institution considérée, le rapport institutionnel à un objet de savoir donné comprend un certain nombre de conceptions qui sont adaptées à certaines classes de problèmes que les sujets de l'institution sont supposés pouvoir traiter, alors que le rapport personnel d'un individu au même objet de savoir se rapporte plutôt aux conceptions côté individu. Nous reviendrons sur cette modélisation dans le paragraphe 4.

Du côté de l'individu, une question importante nous paraît celle des relations éventuelles entre les diverses conceptions qu'il peut manifester, qu'on pourrait modéliser en une sorte de réseau connexe ou non. Les situations d'apprentissage peuvent créer, modifier ou détruire certaines conceptions ou certaines relations entre conceptions. Du point de vue méthodologique, on rencontre une difficulté puisque l'analyse en termes de conceptions se fait à partir d'une interprétation des actions, décisions, déclarations des sujets concernés. En reprenant la terminologie de Chevallard, on peut dire qu'on n'accède qu'à la composante publique du rapport personnel d'un individu à un objet de savoir.

Quand on parle d'obstacle épistémologique, on voit aussi d'une certaine manière se manifester les deux entrées, savoir et individu, de façon très imbriquées. D'une part l'obstacle se trouve du côté du savoir, par exemple tel qu'il a été développé à une époque : des points de vue attachés à des situations d'emploi d'un concept font obstacle à la prise en compte d'autres points de vue comme l'utilisation des nombres pour traiter des quantités a pu faire obstacle au produit de nombres négatifs. C'est en ce sens qu'on le rencontre le plus souvent dans l'histoire. C'est un peu aussi ce qui se passe avec l'obstacle didactique : c'est alors le savoir tel qu'il a été enseigné qui fait obstacle à l'émergence de connaissances nouvelles. D'autre part, il se trouve du côté de l'élève qui étend à des domaines non valides des propriétés valables sur un domaine plus restreint et plus familier : c'est en ce sens qu'on peut dire que les nombres entiers peuvent faire obstacle à la mise en place de conceptions correctes sur les décimaux. Ce deuxième point de vue est aussi présent dans l'histoire puisque la construction et l'utilisation du savoir passe par des hommes. Dès l'introduction de cette notion en didactique des mathématiques, G. Brousseau[4] distingue trois origines aux obstacles : ontogénétique, didactique et épistémologique. Les deux derniers ont un versant savoir et un versant individu. Ce n'est pas le cas des premiers, dont nous n'avons pas parlé jusqu'ici, puisqu'il s'agit des obstacles liés aux limitations des capacités cognitives des élèves engagés dans le processus d'enseignement. La différence entre les obstacles d'origine didactique et ceux d'origine épistémologique est que les premiers peuvent être évités par des choix didactiques différents alors que les seconds sont constitutifs de la connaissance. Remarquons cependant que cette distinction n'est pas vraiment exclusive, un obstacle épistémologique pouvant être renforcé par des choix didactiques.

1.2. Sur les aires planes

Dans la première partie, nous avons vu que deux objectifs se manifestaient dans l'enseignement des aires et plus généralement des mesures, de façon très inégale suivant les époques, avec une rupture très marquée au début des années 70 :

- d'une part, il s'agit de répondre à un besoin de la société de dispenser des connaissances élémentaires, notamment concernant le système métrique, utiles pour la vie quotidienne aussi bien que professionnelle de tout adulte.
- d'autre part, il s'agit d'enseigner des notions mathématiques qui ont une place dans l'édifice des savoirs, qu'on sera amené à reprendre et à généraliser plus tard, il s'agit en quelque sorte de mettre des jalons pour la suite de l'enseignement des mathématiques.

De ce dernier point de vue, nous pensons qu'il y a deux grands concepts en jeu dans cet enseignement : celui d'aire et celui de mesure. L'utilisation presque exclusive des quadrillages dans la période dite des mathématiques modernes nous semble donner aux élèves une réponse au problème de la mesure sans le poser, et sans construire l'invariant qu'il s'agit de mesurer. A cause de la nécessité de traiter ces deux aspects, il nous paraît difficile de trouver

[4] Brousseau G., 1976, *La problématique de l'enseignement des mathématiques*, XXVIIIème rencontre de la CIEAEM, Louvain la Neuve, cité in Artigue M., 1991, Epistémologie et didactique.

une "situation fondamentale" au sens où l'entend Brousseau[5] pour traiter des aires planes à l'école élémentaire. Il nous semble en effet nécessaire de considérer une phase d'apprentissage de la notion d'aire sans recourir à la mesure, et les situations didactiques utilisables dans cette phase ne pourront pas être engendrées par le même problème que celui qui mènerait à la mesure. Par exemple, les situations de pavage, aussi variées soient-elles vont toujours faire intervenir la forme des pavés et des surfaces. Le seul moyen d'y échapper serait de recourir à une autre grandeur, par exemple les capacités ou la masse, pour lesquelles on a une mesure unidimensionnelle directe. On ne peut donc trouver un problème qui aborde tous les aspects de la notion d'aire, sauf peut-être celui de surfaces à peindre. Il est clair que nous ne parlons ici que d'aire plane, les aires dans l'espace nécessitant à notre avis une autre conceptualisation.

Au cours de l'expérimentation et dans l'évaluation qui en a été faite, nous avons vu que des liaisons abusives entre l'aire et le périmètre d'une surface constituent une source d'erreurs récurrentes qui se manifestent sous des formes diverses : procédures périmétriques pour répondre à des problèmes d'aire, utilisation de "théorèmes en acte" du genre "à périmètre égal, aire égale" (ou réciproquement), "si l'aire augmente, le périmètre augmente" (ou réciproquement). Ces erreurs sont persistantes et on peut les rencontrer aussi chez des adultes. Nous ignorons si cette difficulté est visible dans l'histoire. Il est probable qu'il faudrait remonter loin dans l'antiquité pour en trouver des exemples. Peut-être peut-on voir d'ailleurs dans l'histoire de Didon qui entoure un terrain avec des lanières découpées dans une peau de bœuf quelque chose qui a à voir avec la différenciation de l'aire et du périmètre.

Nous avons également pu observer des différences entre les élèves, certains se référant prioritairement au cadre géométrique, et lui faisant confiance en dernier ressort, d'autres assimilant les aires aux nombres et allant jusqu'à remettre en question le résultat d'un découpage et recollement pour justifier une procédure de calcul. Les élèves manifestent ainsi des conceptions qui peuvent donner lieu à des déclarations contradictoires, certaines liées au cadre géométrique, parfois attachées à la forme de la surface, d'autres au cadre numérique, conduisant à l'extension de formules à des domaines où elles ne sont plus valides.

Dans l'expérimentation que nous avons faite, nous avons choisi de travailler sur la notion d'aire sans mesure, sur papier blanc, avant d'aborder le problème de la mesure. Nous avons pour cela distingué 3 pôles en jeu : les surfaces (cadre géométrique), les aires (en tant que grandeur), les mesures (cadre numérique) et construit des situations d'apprentissage s'appuyant sur des jeux entre ces trois cadres. L'aire comme grandeur était pour nous un moyen d'établir un relais entre les cadres géométrique et numérique.

A l'issue de ce processus, les élèves manifestent certaines compétences pour traiter de problèmes d'aire, notamment à l'aide du pavage avec des éléments de formes variées. Dans ce domaine, ils ont des performances nettement meilleures que celles qu'a observées J. Rogalski (1983). Bien que nous n'ayons pas les moyens de le vérifier, il est probable, au vu des manuels de cette époque, que dans l'enseignement habituel, le pavage avec autre chose que des carrés soit assez rare, ce qui peut contribuer à expliquer la différence. Cependant, les élèves observés utilisent aussi certaines procédures non pertinentes de déformation des surfaces pour comparer des aires. Ce point de vue n'avait pas été pris en compte dans l'apprentissage et il nous semble maintenant nécessaire de lui faire une place, d'autant plus qu'il contribue à justifier certaines formules de calcul erronées qu'utilisent fréquemment les élèves — ou même les adultes.

1.3. Sur les rationnels et décimaux

Une grande partie de nos observations porte sur l'enseignement des fractions et des décimaux. Nous avons d'une part cherché à diagnostiquer les difficultés sur les contenus et à relever des conceptions erronées à travers les productions des élèves de plusieurs classes du CM2 à la 4ème. D'autre part, nous avons repris avec des classes de CM et de 6ème composées majoritairement d'élèves en difficulté à l'école, des situations didactiques élaborées avec R. Douady, et qui avaient déjà été expérimentées. Nous avons complété les observations de ces classes par des comparaisons avec des classes de 6ème de recrutement comparable.

Nous avons choisi d'introduire d'abord les fractions dans des situations de mesure (longueurs puis aires) où les élèves seraient amenés à faire des fractionnements de l'unité. La fraction $\frac{1}{n}$ prend le sens "il en faut n pour faire 1", $\frac{p}{n}$ s'obtenant à partir de l'addition répétée. On donne du sens au produit par la mesure des aires de rectangles. Ce choix s'appuie sur un jeu de cadres géométrique-numérique. L'aspect opérateur est abordé ensuite à travers des situations de proportionnalité.

Nous avons vérifié, ce qui confirme beaucoup d'autres travaux, que les connaissances sur les entiers fonctionnent comme un obstacle à l'apprentissage des décimaux[6], notamment dans le cas de la comparaison où les

[5] voir par exemple "Fondements et méthodes de la didactique" RDM 7.2. (1987)
[6] cf Brousseau, RDM 4.2 (1983).

élèves traitent les décimaux comme des couples d'entiers, en utilisant diverses règles erronées pour le rangement de décimaux, surtout s'ils ont une longue liste à ordonner, ou pour l'intercalation de décimaux ou fractions entre des décimaux ou fractions. Ce traitement des nombres décimaux ou fractionnaires comme des couples d'entiers se produit aussi pour les opérations, plus particulièrement pour la somme de deux fractions. Les travaux de G. Brousseau et de R. Douady ont montré que certains processus d'apprentissage permettaient de diminuer de façon significative l'effet de cet obstacle qui se révèle essentiellement de nature didactique. Dans les classes où ont eu lieu nos observations, le travail sur les fractions et décimaux n'a pas pu se dérouler sur un temps assez long ni être suffisamment approfondi pour que les performances des élèves soient améliorées de façon vraiment probante. Dans certaines classes de CM2, on observe cependant des résultats sur l'ordre bien meilleurs que dans des classes de 6ème de recrutement analogue.

Il semble que pour certains élèves, les nouvelles écritures introduites sous forme de fraction ou de nombre à virgule ne prennent pas statut de nombres mais qu'ils essaient de leur donner du sens comme des codages d'actions qui ont à voir avec les partages ou des descriptions liées à l'existence de deux tailles d'objets : des grands et des petits.

L'exercice qui est le plus mal réussi dans toutes les classes jusqu'à la 4ème incluse (où la majorité des élèves échouent encore) est le placement de nombres non entiers sur une graduation dont l'unité ne mesure pas 1 cm. D'ailleurs les réponses de professeurs à un questionnaire à ce sujet montrent que cette question est peu traitée dans l'enseignement, particulièrement dans le cas d'une classe faible. De plus les réponses des professeurs sont très divergentes sur ce point, certains y accordant d'autant plus d'importance que la classe est faible et d'autres se limitant aux entiers dans ce cas.

1.4. Sur la proportionnalité

La proportionnalité nous a paru un des domaines sur lesquels les différences étaient les plus grandes en classe de 6ème en même temps qu'un des points clé dans le passage du discret au continu, notamment pour la construction du sens de la multiplication des nombres non entiers.

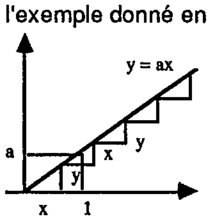
Les situations de proportionnalité sont variées et de difficultés très différentes suivant les choix qu'on fait de certaines variables. Parmi ces variables, on trouve notamment

- la nature de la relation de proportionnalité (convention sociale comme pour les prix, conséquence d'une définition mathématique comme le périmètre d'un disque en fonction du rayon ou celui d'un carré en fonction du côté, modélisation d'un phénomène physique comme allongement d'un ressort, construction d'un concept qui n'a pas forcément de réalité physique comme vitesse moyenne ...)
- la nature des grandeurs en jeu, notamment a-t-on la même au départ et à l'arrivée ?
- la nature (et/ou la taille) des nombres en jeu,
- le type de problème posé : recherche de l'image, de l'antécédent, du coefficient, quatrième proportionnelle ou fonction ... proportionnalité donnée par le coefficient, par un couple ...

Au niveau qui nous intéresse, les élèves sont dans des situations très diverses relativement au concept de proportionnalité, certains le maîtrisent assez bien, au moins dans des situations standard, d'autres en sont encore au niveau de maîtrise qu'on attend à la fin du cours élémentaire : addition répétée de grandeurs discrètes. Un des objectifs prioritaires en CM2 et en 6ème est d'amener les élèves à passer d'un modèle additif à un modèle multiplicatif utilisable dans le cas de grandeurs continues.

La procédure de type scalaire[7] ou isomorphisme est utilisée par les élèves avec des additions, ou des multiplications ou divisions par des entiers qui peuvent être pensées comme des additions répétées. Elle ne fonctionne en général plus quand les rapports ne sont pas entiers : le passage par le modèle fonction est nécessaire pour étendre la relation aux nombres non entiers. Et ce passage ne va pas de soi (voir l'exemple donné en fin de chapitre 4).

Un moyen d'aider les élèves à opérer ce passage nous semble être l'utilisation de représentations graphiques où on peut matérialiser le facteur constant comme "la hauteur d'une marche" de longueur 1 dans "le petit escalier" qui illustre l'aspect isomorphisme (nous reprenons les expressions utilisées par les élèves). La recherche de l'équation (ou de la formule de calcul) oblige à considérer l'aspect fonction. Le cas x= 1 permet de relier les deux points de vue (voir figure ci-contre).



[7] voir Vergnaud : L'enfant, la mathématique et la réalité.

Les représentations graphiques constituent aussi un cadre de travail qui permet de mettre en relation des propriétés numériques et des perceptions spatiales. De plus, la réalisation et l'utilisation de représentations graphiques ont en général été bien accueillies par les élèves en difficulté.

2. Un essai d'interprétation des difficultés observées du côté des élèves et du côté des enseignants

2.1. Rappel du constat

Nous avons au cours des chapitres précédents établi un certain nombre de constats et commencé à explorer quelques pistes d'explication du côté des élèves et du côté des enseignants. Nous allons maintenant reprendre les éléments les plus importants du constat avant de tenter une interprétation.

* Nous avons vu dans le chapitre 2 que les résultats de la première expérimentation sont positifs sur certains points : les élèves de CM2 des classes expérimentales ont sur des tests sur l'ordre des nombres décimaux, des résultats en moyenne nettement meilleurs que des élèves de 6ème d'une ZEP. Cependant au cours du déroulement de l'expérience, il est apparu un certain nombre de difficultés des élèves en particulier au niveau du réinvestissement : les phases de recherche ne se déroulent en apparence pas de façon très différente de ce que l'on avait pu voir dans d'autres classes, mais il semble que les connaissances établies, institutionnalisées ne soient plus disponibles au bout d'un certain temps, ou alors qu'elles aient perdu le sens qu'elles avaient pris dans l'apprentissage.

* Une des difficultés dans le réinvestissement se manifeste aussi dans la difficulté à découper un problème complexe, à structurer les données, à identifier un problème connu à l'ntérieur d'une situation complexe.

* De plus, le temps de travail effectif des élèves des classes faibles est souvent inférieur à celui d'autres classes : d'abord pendant les heures scolaires où beaucoup de temps d'horloge est utilisé pour régler des problèmes de discipline, d'organisation matérielle ; ensuite dans le travail à la maison que certains élèves ne font pas soit parce qu'ils n'ont pas envie de le faire et que personne à la maison ne l'exige d'eux, soit parce qu'ils ne savent pas le faire et que personne ne peut les aider, pas même le manuel qu'on ne leur apprend pas à utiliser. En outre, la plupart des élèves de milieu populaire ont rarement l'occasion d'apprendre hors de l'école des choses qu'ils pourront utiliser dans le travail scolaire.

* Le plan affectif intervient également fortement : les élèves qui rencontrent des difficultés à l'école ont en général besoin d'être sécurisés par rapport à la tâche, ils recherchent la confirmation de l'enseignant à chaque pas ... Ils ne se font pas confiance et ne font pas confiance aux autres. Par ailleurs, ils ont du mal à communiquer avec l'enseignant et aussi entre eux, ce qui rend par exemple difficile le travail en groupe.

* De leur côté, les enseignants déclarent souvent ne pas pouvoir traiter les mêmes questions dans toutes les classes. Ils ont tendance dans les classes faibles à insister davantage sur l'acquisition des algorithmes, et c'est aussi ce que souhaitent en général les élèves. De plus, un enseignement où on fait une grande place à la résolution de problèmes pour apprendre demande plus de temps, au moins en apparence : il peut se passer plusieurs séances sans avancée visible du cours, ce qui fait que les enseignants hésitent à l'entreprendre dans une classe faible où le temps leur paraît toujours manquer. De plus, cela accroit les difficultés de gestion de la classe, d'une part parce que l'enseignant doit tenir compte pour faire son cours de ce que les élèves ont fait pendant la résolution : c'est un mode d'enseignement plus coûteux en mémoire pour l'enseignant[8] , d'autre part sur le simple plan disciplinaire (respect des prises de parole au moment des bilans par exemple), même si une plus grande motivation des élèves peut parfois compenser cette difficulté : cela demande une grande vigilance de l'enseignant, au moins pendant un temps de mise en place de règles du jeu acceptées par les élèves.

Certaines de ces difficultés sont plus manifestes dans le cas d'un enseignement par mise en situation a-didactique[9] et adaptation à un milieu. Nous allons maintenant essayer de les interpréter en les mettant en relation, notamment en identifiant la conjugaison et le renforcement d'effets côté élèves et côté enseignants, et en nous référant à notre cadre théorique. Nous commencerons par les explications les plus proches du plan cognitif pour élargir à des niveaux qui engagent plus le développement de la personnalité tout entière, dans ses rapports avec le

[8] Nous pensons ici aux travaux de J. Centeno et G. Brousseau dont nous avons eu connaissance dans la phase finale de rédaction de cette thèse par un exposé au séminaire national de didactique des mathématiques et par un projet d'article.
[9] c'est-à-dire une situation privée de ses intentions didactiques : l'élève répond à des nécessités du problème ou du "milieu" et non parce qu'il repère les attentes du maître par des indices extérieurs ; voir ch. 1 § 2.1.3. et §3.5 de ce chapitre.

travail scolaire. Nous présentons ainsi linéairement des interprétations imbriquées qui se situent en réalité sur plusieurs niveaux, les unes contribuant à expliquer les autres, tant du côté des enseignants que des élèves.

2.2. Sur le plan des mathématiques

2.2.1. Du côté des élèves

Nous avons donc constaté —et c'est ce qui nous paraît le plus caractéristique et source de nouvelles difficultés— qu'il y avait souvent, chez les enfants en difficulté beaucoup plus massivement que chez les autres, *un divorce net entre les situations d'action visant à donner du sens aux notions enseignées et l'institutionnalisation qui est faite ensuite par le maître* : au cours de l'action, dans les premières situations qui tendent à aborder une notion nouvelle, pourvu que le problème permette réellement l'investissement des élèves, on ne voit pas beaucoup de différences dans les procédures que mettent en place les élèves de classes de niveaux différents. En revanche la différence s'accentue très vite dès qu'il s'agit de réutiliser les connaissances introduites à cette occasion. Par exemple, pour l'introduction des fractions, la situation "segment" (voir ch.3) amène toujours les élèves à subdiviser l'unité par pliages en deux successifs pour évaluer la partie qui dépasse un nombre entier de reports, mais dès qu'on passe à l'écriture formelle, il y a pour certains élèves un dérapage, ils passent à des modèles numériques erronés pour simplifier ou ajouter les fractions ; il semble que l'objet mathématique n'ait plus aucun rapport pour eux avec la situation (ou les situations) d'action, qui lui a donné sens et que ces élèves ne paraissent pas pouvoir utiliser comme référence. Ainsi, tout se passe comme si le savoir institutionnalisé par le maître et décontextualisé était situé dans un registre étanche par rapport aux connaissances utilisées dans la situation. Ainsi, même dans le cas où il est mémorisé, il ne peut fonctionner que dans le registre formel, par exemple numérique pour les fractions, sans que la situation d'introduction puisse servir de contrôle, et il ne peut être utilisé pour résoudre de nouveaux problèmes.

Absence de création de représentations mentales. Absence de projet implicite de réinvestissement des connaissances.

Une des principales explications que nous avançons est que les élèves qui ne rencontrent pas ce genre de difficulté ont un projet, même implicite, de décontextualisation dès le moment où ils travaillent sur la situation d'action. Ils savent qu'il y aura peut-être lieu de réutiliser plus tard l'expérience acquise dans l'activité présente. Cela leur facilite la création de représentations mentales, non seulement pour résoudre le problème posé actuellement mais pour pouvoir en rappeler et réutiliser des éléments dans d'autres occasions. Ceci leur permet de réinvestir partiellement une connaissance, même si elle n'est pas encore totalement identifiée. Pour d'autres enfants, ce "transfert" ne se fait pas parce qu'ils ne font que résoudre le problème posé, dans les termes où il est posé, sans avoir de projet de connaissance. Il n'y a pas création de représentations mentales qui ont déjà valeur symbolique et sur lesquelles on pourra travailler ensuite, à l'occasion d'autres situations. Ceci contribue à expliquer l'absence, chez ces élèves, de possibilité de réutiliser en les adaptant des outils forgés pour résoudre un problème. On peut penser d'ailleurs que le même phénomène se produit, pour davantage d'élèves peut-être, quand la connaissance est apportée par un cours magistral.

On peut penser que ces représentations mentales intermédiaires entre l'action et la formulation, permettraient de plus aux élèves, si elles existaient, de libérer de la place en mémoire immédiate puisqu'ils ne seraient pas obligés de se remémorer tous les détails de la situation pour retrouver le sens contextualisé d'une connaissance.

Absence d'ancrage dans les connaissances anciennes. Manque de fiabilité des connaissances anciennes

Cette absence de première décontextualisation, au cours même de l'action, fait qu'il n'y a pas, pour eux, de mises en relation, d'"accrochage" à l'ancien pour le renforcer ou le remettre en question. Les expériences semblent se juxtaposer sans qu'il y ait d'interaction entre l'ancien et le nouveau. Ainsi, chaque expérience est nouvelle, ou plus exactement, seul le contexte est reconnu : "on a plié des bandes de papier, on a découpé des rectangles"...

Tout ceci empêche la capitalisation et la mémorisation des connaissances et fait que ces élèves abordent les situations de réinvestissement comme des situations nouvelles : on recommence toujours.

L'absence de connaissances antérieures solides auxquelles se référer contribue à ce manque d'organisation et d'intégration des savoirs nouveaux : pour certains enfants, rien n'est sûr, tout peut toujours être remis en question puisqu'ils ont l'habitude de se tromper. On a ainsi la mise en place d'un processus cumulatif : les connaissances antérieures, non activées, n'ont pas l'occasion de se stabiliser, les connaissances nouvelles ne peuvent pas s'ancrer et ont à leur tour peu de chances d'être retenues, et l'élève ne pourra pas faire confiance à ce qu'il sait.

Absence d'identification de l'enjeu des situations didactiques

Une autre cause nous paraît être la non reconnaissance du véritable enjeu des situations proposées en classe et l'absence d'identification de l'objet du travail proposé par l'enseignant : par exemple, si celui-ci propose des découpages de rectangles pour travailler sur les fractions alors que, pour l'élève, il s'agit d'apprendre à partager les rectangles, il n'y a pas de lien entre cette activité et le pliage de bandes de papier et les fractions utilisées dans les deux contextes n'ont pas de rapport entre elles. Il s'agit seulement d'une écriture pour traduire une certaine situation physique, on ne construit pas quelque chose qui va avoir une existence propre, on n'a donc pas de souci de cohérence.

Cela a des conséquences au niveau didactique, par exemple l'usure rapide des situations "encore des triangles !". Les élèves qui identifient la situation à son contexte, se lassent avant qu'on puisse avoir une identification et une décontextualisation locale des savoirs en jeu suffisantes pour permettre leur réinvestissement ultérieur. Nous allons voir que cela participe à l'enclenchement d'un cercle vicieux renforcé ensuite par les choix des enseignants.

2.2.2. Du côté des enseignants.

Décontextualisation brutale

La décontextualisation des notions rencontrées par les élèves dans des problèmes est une des questions les plus délicates qui se posent en didactique des mathématiques. Nous y reviendrons un peu plus loin. Il arrive que l'enseignant se méprenne sur la signification réelle des connaissances en jeu pour les élèves et saute des étapes importantes pour que cette décontextualisation se fasse sans perte de sens excessive. Ce phénomène est à rapprocher de l'effet Jourdain identifié par G. Brousseau.

Nous en donnons ici un exemple : Dans une classe de 6ème, les élèves avaient travaillé sur les fractions à partir d'aires de rectangles. Nous travaillions avec des élèves volontaires hors de la classe à qui nous avons posé la question suivante : "Peux-tu fabriquer des quarts de forme différentes ?" Les élèves, interrogés individuellement, ont tous produit les dessins des figures 1 et 2 ainsi parfois que celui de la figure 3.

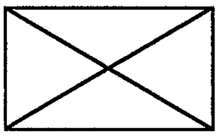


Fig. 1

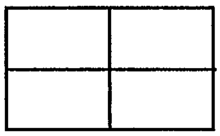


Fig.2

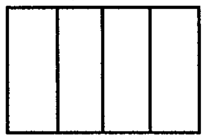


Fig.3

Les morceaux de la figure 1, n'étant pas superposables, la question de la validation se posait mais la plupart des élèves concernés ne pouvaient pas fournir d'argument. Nous leur avons donc demandé, en laissant apparemment tomber le problème des quarts, s'ils pouvaient fabriquer des huitièmes de formes différentes. Nous avons alors eu,entre autres, des productions des types suivants :

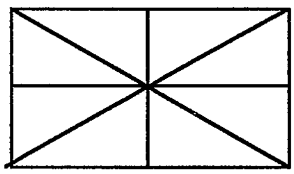


Fig.4

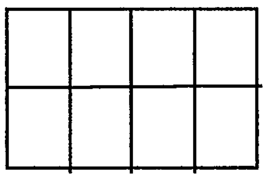


Fig.5

Les élèves pouvaient dire dans chaque cas que $2x\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ et conclure à l'égalité des différents quarts de la figure 1.

Mais nous leur avons alors demandé ce qu'on trouvait en accolant un huitième du premier type et un huitième du deuxième. Les élèves ne savaient plus, pensaient que ça ne devait pas faire $\frac{1}{4}$ mais que pour le savoir, il fallait paver. Ils n'ont pu conclure qu'après avoir réalisé des pavages du type de la figure 6. Pour eux la détermination d'une fraction était toujours liée à la possibilité de paver alors que pendant ce temps en classe, on était censé travailler au niveau des nombres. Cela semblait possible puisque des figures de formes différentes étaient codées par une même fraction et que les élèves de cette classe avaient aussi travaillé sur les fractions dans le contexte des longueurs. Mais nous avons réalisé qu'il s'agissait toujours d'une problématique de reports.

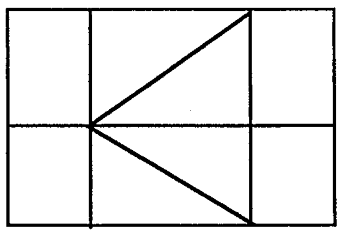


Fig 6

Remarquons qu'à propos de cet exemple, beaucoup de choses autres que la notion de fraction sont en jeu, notamment la construction de la mesure des aires : nous avons vu dans la première partie que l'existence d'une mesure indépendamment de la possibilité de paver n'est pas une chose facile à concevoir, même pour des élèves de niveau bien supérieur à ceux-là.

Au sujet de la décontextualisation, il nous faut donc distinguer différents niveaux :
- si le contexte est matériel, pouvoir prévoir ou conclure sans recourir au matériel, en imaginant seulement la manipulation qui est intériorisée.
- utiliser des arguments qui mettent en relation des connaissances qui ne se réfèrent plus forcément au contexte
- utiliser la connaissance dans un autre contexte.

Cette dernière étape serait aussi à hiérarchiser suivant que la problématique de réinvestissement est proche des problématiques déjà rencontrées ou qu'elle est très nouvelle : par exemple, pour les fractions, la problématique de la mesure des aires planes est relativement proche de celle de la mesure des longueurs de segments même si le passage de l'une à l'autre soulève des problèmes nouveaux et importants (non superposabilité des parties de même mesure) tandis que la problématique de la mesure est différente de celle des codages d'applications linéaires.

La trop grande rapidité de la décontextualisation peut s'expliquer par la difficulté pour les enseignants à connaître l'état des connaissances réelles des élèves, et aussi par la nécessité où ils se trouvent de faire avancer le temps didactique. En reprenant les distinctions que fait Claire Margolinas dans sa thèse, nous pouvons analyser ce fait en disant que les enseignants, responsables de la phase de conclusion, s'ils n'ont pas les moyens de faire une phase de validation, par exemple si la situation ne le permet pas, vont conclure par une phase d'évaluation (dans le sens qu'elle donne à ce mot) et les élèves vont passer directement de l'action à l'évaluation. De plus, il se peut qu'une phase de validation fonctionne de fait comme une phase d'évaluation pour certains élèves.

Simplification des situations et enclenchement d'un cercle vicieux

La difficulté de réinvestissement des élèves est particulièrement grande dans le cas de situations complexes où il y a à identifier un problème connu à l'intérieur d'une situation où interviennent d'autres éléments. Cela renforce l'idée qu'on facilite l'apprentissage en simplifiant le problème, en mettant des paliers intermédiaires. Cela entraîne aussi, chez les enseignants comme chez les élèves, le désir de recourir le plus possible à l'apprentissage de procédures de traitement stéréotypées, plus sécurisantes pour les uns comme pour les autres. En effet, dès qu'ils sortent de la routine, les élèves en difficulté quêtent l'approbation du maître à chaque pas. Ils réclament des algorithmes. Par ailleurs, du côté des enseignants, on fait moins confiance aux élèves, on a tendance à les aider davantage et on pense, par le renforcement des algorithmes, leur donner le moyen de réussir au moins quelque chose.

Il est vrai que les algorithmes eux-mêmes sont souvent insuffisamment mémorisés par ces élèves. Ceci amène une charge en mémoire insupportable lors de la résolution de problèmes, leur fait perdre le fil de la résolution et encourage donc l'enseignant à donner plus de place encore à l'apprentissage des leçons et des algorithmes.

En outre, avec les élèves en difficulté, les professeurs ont tendance à se concentrer sur le cadre numérique en négligeant des activités géométriques ou graphiques qui pourraient leur donner d'autres références. Le fonctionnement d'un jeu de cadres nécessite pour les élèves d'une part un minimum de connaissances solides dans chacun des cadres —même si ce minimum peut être très faible dans l'un des deux, d'autre part un apprentissage : la plupart des élèves ne le font pas spontanément, parce qu'un changement de point de vue est toujours difficile. A cause de ces difficultés, les enseignants pensent généralement que, pour les élèves faibles, il faut faire le moins de mélanges possible et leur donnent rarement des problèmes où plusieurs cadres ou plusieurs notions sont en jeu. Cela contribue à accroître le déficit de connaissances et à diminuer encore les sources de déséquilibre et donc les occasions d'apprentissage et de mises en relation.

On assiste ainsi à l'enclenchement d'un processus boule de neige : les élèves ne se représentent pas les actions, ne perçoivent pas les enjeux —> les élèves ne mémorisent pas —> le professeur se concentre sur l'apprentissage des résultats du cours et de savoir-faire algorithmisés —> les situations proposées aux élèves se résument à la répétition de problèmes d'exécution, du type de ce qu'il demandera lors du contrôle —> les élèves ne se représentent pas, ne mettent pas en relation —> ... et l'apprentissage se résume au renforcement d'algorithmes dont les conditions d'utilisation ne sont jamais maîtrisées.

2.3. Sur un plan cognitif plus général.

Problèmes de langage

Les problèmes de langage sont aussi bien sûr à l'origine de difficultés en mathématiques. Ils interviennent de plusieurs façons, au moins :

- *au niveau de la prise d'information* : la mauvaise maîtrise du français, expression et lecture, gêne la compréhension des énoncés de problèmes et la communication entre professeur et élèves ou entre élèves,
- *au niveau de la conceptualisation* : la mauvaise maîtrise du langage et l'absence d'habitude de se formuler à soi-même les questions et les procédures de résolution engagées pendant la recherche d'un problème contribuent sans doute à la difficulté de certains élèves à se créer les représentations mentales intermédiaires qui seraient des points d'appui de la conceptualisation (cf langage intérieur de Bruner)
- *au niveau des productions* : l'expression des élèves, écrite ou orale, est toujours allusive, liée au contexte, complétée par des gestes, avec peu d'articulation et de mots de liaison (voir les travaux en ZEP de l'équipe de E. Bautier-Castaing et B. Charlot), ce qui fait qu'ils ne peuvent produire des énoncés suffisants en eux-mêmes comme on le demande en mathématiques.

Les problèmes de langage s'ajoutent aux difficultés conceptuelles dans les situations complexes. Ainsi, ces élèves ne retiennent jamais toute l'information contenue dans un énoncé de mathématiques non redondant, notamment la plupart d'entre eux n'arrivent que très difficilement à prendre en compte plusieurs conditions simultanées. Une des difficultés dans la compréhension des énoncés tient aussi à la non reconnaissance de la portée de l'énoncé et de ses éléments, en particulier en ce qui concerne la généralité : quel énoncé est général, quel énoncé est contextualisé, quels sont les éléments de l'énoncé qui sont quantifiés universellement, quels sont ceux qui sont liés au contexte ?

Une autre difficulté tient à la capacité d'interprétation du niveau de discours de l'enseignant. Dans le déroulement de l'enseignement, en effet, le maître utilise plusieurs niveaux de discours qui sont souvent assez imbriqués et que l'élève doit réussir à décoder avec leur signification dans la situation. On peut distinguer au moins :
- un discours au niveau mathématique : énoncés de théorèmes, définitions, calculs...
- des indicateurs sur ce discours : on va démontrer...
- un discours au niveau épistémologique ou heuristique sur le contenu traité, ses relations avec d'autres parties déjà traitées ou à venir : explications, références à des connaissances anciennes, annonce d'un contexte d'utilisation future...
- un discours au niveau des méthodes utilisables dans un champ de problèmes, compte-tenu des connaissances des élèves, par exemple, en seconde : "pour résoudre une équation du second degré, vous regardez s'il y a une factorisation évidente ou vous mettez sous la forme canonique"
- un discours au niveau métacognitif proprement dit : "pour apprendre les tables de multiplication, il faut demander à quelqu'un de vous les faire réciter", "pour retenir le théorème, il faut le recopier"...
- des indications sur la négociation du contrat didactique et l'avancée du temps didactique : "c'est important", "attention", "ceci, il faudra le savoir parfaitement", "cela servira plus tard", "cela servira pour le contrôle" ...
- un discours pratique sur l'organisation du travail : "prenez une feuille, laissez une marge de 3 carreaux" ..., et plus généralement tout ce qui est nécessaire à la communication avec la classe "demain, on fera de la géométrie"...

Dans une même période de discours du maître, il y a souvent passage d'un type de discours à un autre. Les élèves doivent être capables de repérer ces changements de niveau pour tirer profit du discours non mathématique du maître, ce qu'on pourrait appeler le discours périmathématique, pour s'approprier plus facilement le discours mathématique du maître et éventuellement des autres élèves.

Remarquons que les élèves aussi peuvent utiliser en classe la plupart de ces différents niveaux de discours, mais en ce qui concerne le discours non mathématique, c'est alors le plus souvent sous forme d'interrogations : à quoi ça sert? est-ce qu'on aura cela pour le contrôle ?...

La logique du quotidien

Les élèves ont une certaine familiarité avec des situations de la vie quotidienne et avec des modes de raisonnement qui y sont courants et en général non conformes à ceux qu'on attend dans un cours de mathématiques. Il peut ainsi s'installer un véritable malentendu et une communication absurde entre le professeur et certains élèves.

Ainsi, un élève de 6ème avait à résoudre le problème suivant : "Des cahiers sont vendus 4,60 F à l'unité et par lots de 5 cahiers à 18 F. Un professeur a besoin de 114 cahiers pour les élèves de ses classes. Que doit-il acheter pour payer le moins cher possible ? Combien paiera-t-il ?". Avec une calculatrice, sans pouvoir formuler ce qu'il cherche à chaque étape, il fait la suite d'opérations suivantes : 114/5 = 22,8*18 = 410,4 et écrit 410,4 sur sa feuille. Je lui fais remarquer qu'on ne peut prendre que des lots entiers. Il fait alors 23*18 = 414. Je lui demande si on ne peut pas payer moins cher en prenant des cahiers à l'unité. Il me répond que 23*5 = 115 et que le professeur gardera le dernier cahier pour lui. Il refuse d'envisager toute autre solution.

Il est clair que dans la vie quotidienne, on a rarement recours à un raisonnement par nécessité logique. La rationalité scientifique a besoin d'être construite chez les élèves, comme le souligne Marc Legrand (1990), et ce d'autant plus qu'on leur demande souvent de raisonner de façon scientifique sur des situations issues du quotidien. Les élèves sont très inégalement confrontés à une autre logique dans leurs activités extrascolaires, suivant leur pratique de certains jeux, en particulier jeux pratiqués avec des adultes qui les amènent à apprendre à faire des raisonnements sous hypothèse ou à utiliser des catégories de classement (jeux de stratégie ou jeux de devinette dans un domaine à sérier).

Ceci ne veut pas dire que l'expérience des enfants dans la vie quotidienne ne peut pas être utilisée mais il faut alors bâtir, comme le font certains chercheurs italiens autour de P. Boero, des situations qui s'appuient sur la réalité familière et permettent de la dépasser en posant aux enfants de véritables problèmes théoriques.

Différences culturelles, différences individuelles.

L'absence de projet et de reconnaissance des enjeux réels de l'enseignement peut souvent être mise en relation avec des différences culturelles entre les élèves : l'enseignement tel qu'il se pratique en général suppose l'adhésion tacite à un bon nombre de présupposés culturels, qui ne sont pas réellement partagés par tous les élèves. Ainsi, suivant leur milieu familial, les élèves auront ou non l'habitude d'argumenter sur des questions de principe (voir par exemple Lautrey, 1980), ils trouveront ou non naturel d'entendre une question qu'on leur pose et la réponse qu'ils ont à faire comme destinée à prouver qu'ils savent et non seulement pour donner une information qui manque à l'interlocuteur. C'est d'ailleurs une explication généralement retenue pour expliquer la différence de réussite à l'école suivant le milieu social d'origine (écart à la norme scolaire). Ces différences peuvent sans doute parfois être compensées par l'adhésion au projet du maître reconnu par l'élève comme porteur d'une distinction particulière.

Une autre direction, orthogonale, est celle des différences individuelles, par exemple entre visuels et auditifs, dépendants du champ ou non.... Nous n'avons pas exploré cette direction. Nous avons seulement constaté pour certains élèves en difficulté assez générale, des différences notables entre les domaines géométrique et numérique. Ainsi, dans une même classe de 6ème d'élèves en difficulté, se trouvaient deux élèves opposés sur ce plan : l'un d'eux se débrouillait de façon remarquable en calcul mental, beaucoup mieux que la plupart des élèves de son âge mais ne savait pas écrire les nombres et avait des problèmes considérables en géométrie : par exemple, pour la symétrie orthogonale, même en utilisant le pliage, il ne gardait pas suffisamment le souvenir de ce pliage pour corriger une mauvaise prévision ; l'autre avait une très bonne vision géométrique, y compris en géométrie dans l'espace —il faisait du dessin technique à l'extérieur de l'école— mais ne parvenait pas à apprendre les tables de multiplication.

2.4. Sur un plan plus général

Plusieurs des explications que nous venons d'avancer sont à relier au plan plus général des représentations sociales, et même psychanalytiques des maîtres et des élèves, des attentes et des représentations sur l'école, à la présence ou à l'absence de projet général, et à ce que Y. Chevallard (1988) appelle le rapport à l'école, au "métier d'élève"... Nous abordons ce plan général par le biais des effets qu'il peut avoir au niveau didactique.

Représentation de soi de l'élève.

Beaucoup d'élèves en grande difficulté à l'école ont, à l'extérieur de l'école, des problèmes d'ordre affectif sur lesquels nous n'avons aucune prise. De plus, leur situation d'échec à l'école contribue à leur donner d'eux-mêmes une image dévalorisée. Cela peut avoir des répercussions sur toute la vie scolaire de ces élèves, notamment sur l'acceptation de certaines formes de travail. De toute façon, la représentation qu'ils se font de leur place par rapport aux autres élèves de la classe nous paraît une raison supplémentaire de la nécessité, dans un apprentissage qui s'appuie sur la résolution de problèmes, de dépersonnaliser les connaissances produites par d'autres élèves avant de les institutionnaliser.

Rapport de l'élève à l'école, à son métier d'élève.

Pour qu'un élève ait un projet (implicite) d'apprentissage face à une résolution de problème, il est nécessaire qu'il ait une conception de son travail compatible avec la naissance d'un tel projet : ce sera difficile s'il pense qu'un devoir est comme un travail matériel qui doit être fait pour n'être plus à faire et qu'ensuite on l'oublie pour passer à autre chose ou qu'un devoir est fait pour être jugé, témoin qu'on a ou qu'on n'a pas une connaissance qu'il faut alors acquérir en apprenant une leçon. Pour que l'on puisse faire dévolution à un élève d'un problème auquel il ne peut pas fournir de réponse immédiate, il faut qu'il accepte sa responsabilité dans la résolution de ce problème. Or il peut trouver illégitime qu'on lui propose un problème dont on ne lui a pas enseigné la réponse et refuser cette responsabilité. Il peut également considérer que c'est une perte de temps puisque le maître connaît la réponse et pourrait la lui enseigner.

De la même façon, même s'il accepte de rechercher individuellement un problème, un élève peut avoir du mal à accepter le travail en groupes pour plusieurs raisons. Il peut considérer que cela fait perdre du temps, à cela peuvent s'ajouter des raisons d'ordre affectif qui sont rarement explicitées : la difficulté de communication avec ses pairs, liée au manque de socialisation, ce qui fait que l'élève aura peur de ne pas pouvoir s'exprimer ou d'avoir le dessous, les décisions étant finalement prises avec des arguments d'autorité, la difficulté d'accepter un savoir venant d'un autre élève : il est normal de ne pas trouver ce que le professeur trouve puisqu'il sait, il est beaucoup plus dévalorisant de ne pas trouver ce qu'un autre élève a trouvé.

Son rapport à l'évaluation peut aussi contribuer à la mise en route d'un cercle vicieux. D'une part, l'élève réclame que tout ce qu'il fait soit évalué parce que toute peine mérite salaire et qu'il ne veut pas travailler pour rien. D'autre part, il sait que l'évaluation sert à le juger, il pense donc que l'important est d'avoir de bonnes notes pour éviter des désagréments à l'école comme à la maison. Mais il lui est difficile d'avoir de bonnes notes en jouant le jeu de la connaissance, jeu dont il n'a peut-être même pas perçu l'existence, il se met alors à la recherche d'indices qui pourraient l'aider à deviner aux moindres frais ce qu'attend le maître. Comme il arrive (assez souvent, somme toute) que le professeur l'aide dans cette entreprise, il peut jusqu'à un certain point produire des réponses justes sans mettre en jeu de connaissances. L'absence d'apprentissage ne se révèle alors que plus tard, à un moment où il peut être plus difficile de redonner à l'élève des occasions d'apprentissage.

Par ailleurs, si l'élève attend de l'école qu'elle le prépare à avoir un métier, il recherche dans ce qu'on lui propose l'utilité par rapport à son projet et ne la trouve pas en général : les détours des carrières scolaires lui sont souvent inconnus. De plus, les enfants en difficulté à l'école ont souvent un projet social très modeste qui ne demande que peu d'études, les savoirs scolaires leur semblent particulièrement déconnectés des savoirs pratiques qui leur paraissent utiles.

Rapport de l'enseignant à son métier d'enseignant

L'idée que l'enseignant se fait de son métier peut l'amener à vider l'enseignement de son contenu, en particulier dans le cas où il s'adresse à des élèves en difficulté : on retrouve là un mécanisme de production de glissement métacognitif (Brousseau, 1987b p. 43-44) : le professeur, de lui-même ou parce qu'il a trouvé ces explications dans des travaux de pédagogie ou de didactique, introduit des heuristiques, des contenus intermédiaires ou des problèmes qui doivent faciliter l'accès à une connaissance, et ce sont ces intermédiaires qui deviennent rapidement le véritable en jeu de l'enseignement.

Le fait de penser qu'il est de son devoir de contrôler tout ce que font les élèves, de peur qu'ils puissent produire une réponse juste par hasard ou garder une idée fausse dans la tête peut amener ce glissement : le professeur veut que l'élève puisse expliquer son résultat, il ne le croit pas capable de trouver une explication tout seul et lui fait donc apprendre tout ce qui intervient dans l'enseignement, même comme support heuristique. Par exemple, le professeur veut que l'élève puisse prévoir le nombre de chiffres au quotient d'une division, en encadrant ce quotient par des puissances de 10. Mais il veut aussi contrôler comment fait l'élève et cela devient une question supplémentaire qu'il faut justifier et qui est ajoutée à la technique de division au lieu d'être un simple moyen de contrôle de l'ordre de grandeur qui permet de rejeter des résultats grossièrement faux.

Pour une raison d'évaluation également —il faut évaluer tout ce qui a été fait et rien que ce qui a été fait— l'enseignant peut aussi être amené à surinstitutionnaliser des résultats ou des méthodes rencontrés dans des résolutions de problèmes et ensuite à évaluer les élèves autant sur le contexte que sur le contenu : par exemple, on partage des rectangles en parts égales pour travailler sur des fractions mais, comme l'enjeu n'est pas passé, on continue à insister sur l'égalité des parts et à multiplier les exemples dans le même contexte, sans même proposer de partages inégaux et on évalue les élèves sur ce partage, toujours dans le même contexte.

Représentations des enseignants sur les capacités des élèves.

Enfin chacun sait depuis Rosenthal et Jacobson (1968) que les représentations des enseignants sur les possibilités des élèves interviennent dans la réussite de ces élèves. Ces représentations se conjuguent avec celles qu'a l'enseignant sur la bonne manière d'apprendre, ce qu'est une formation mathématique, le contenu visé et s'actualisent dans le découpage des contenus, le choix des problèmes proposés aux élèves. En même temps, interviennent la souplesse ou la rigidité de ces représentations, la possibilité de s'adapter à celles des élèves, d'en tenir compte... L'enseignant choisit en fonction de ces représentations qui lui font estimer le coût par rapport à la rentabilité attendue, les méthodes qui lui paraissent convenir compte-tenu du contenu et du public.

Remarquons d'ailleurs que le même phénomène se produit en sens inverse et que l'élève se construit des représentations sur les qualités de l'enseignant, ne serait-ce que par la réputation que celui-ci a dans l'établissement, transmise par les élèves et par les parents...

3. Réflexions d'ordre didactique

L'analyse précédente nous conduit à revenir sur la présentation du cadre théorique que nous avons faite dans le premier chapitre et à formuler quelques questions qui nous paraissent mériter de faire l'objet de nouvelles recherches afin d'être mieux prises en compte dans la théorisation en didactique des mathématiques. Ces questions concernent le choix des problèmes dans les situations didactiques, et en particulier les moyens d'adapter le mieux possible ce choix non seulement à la connaissance mathématique visée mais aussi aux élèves, le rôle du maître qui nous semble jusqu'à présent peu élucidé, ainsi que la détermination de ses marges de manœuvre et enfin les relations entre différentes approches théoriques.

3.1. Choix des problèmes. Recherche de situations de référence.

Nous avons vu que les élèves en difficulté utilisent difficilement des situations qu'ils ont rencontrées, comme situations de référence pour traiter des questions nouvelles. Nous avons déjà dit que ce phénomène est dû à tout un faisceau de raisons et de causes imbriquées. Un des points qui concernent la didactique est l'élaboration de problèmes qui peuvent jouer ce rôle de référence. Un autre est la détermination de la complexité des situations proposées aux élèves suivant les différents moments de l'apprentissage.

Gestion de la complexité.

Nous avons dénoncé le cercle vicieux qui amène à simplifier les problèmes proposés aux élèves faibles jusqu'à les vider de leur sens. Cependant, il n'est pas raisonnable non plus de leur proposer des problèmes qu'ils ne peuvent pas démarrer. On doit prévoir un apprentissage de la résolution de problèmes complexes qui demande notamment la structuration des données, le découpage de problèmes plus simples. Cette question se pose aussi bien pour les situations de réinvestissement que pour les situations d'introduction d'une notion nouvelle.

Diverses stratégies ont été largement expérimentées auprès d'élèves de l'école primaire et du collège pour cet apprentissage, notamment :

- proposition d'une situation qui comporte un grand nombre de données de différentes natures, sans question et demande aux élèves de formuler eux-mêmes des questions auxquelles ils pourraient répondre à partir des données, ou recherche de données nécessaires, éventuellement manquantes, pour répondre à une question qu'ils ont envie de se poser. Par exemple, nous avons utilisé avec une classe de 6ème faible la situation "moquette"[10] qui a permis à tous les élèves de produire des questions et de s'engager dans des résolutions.
- proposition d'une situation complexe sur lesquelles on laisse les élèves chercher sans leur fournir la solution, puis proposition d'un problème plus simple qui aide à la solution du problème précédent. D. Butlen et M. Pézard ont obtenu des résultats encourageants par cette méthode avec des élèves de CE2 faibles pour des problèmes de produits cartésiens (menus avec des choix multiples)

Situations de référence.

L'intérêt des situations de référence est de permettre d'évoquer un contenu à partir d'un contexte avec le sens qu'il avait dans ce contexte au moment où on veut l'utiliser dans un autre. Nous n'employons pas ici le mot "situation" dans le sens de "situation didactique" mais plutôt dans le sens où l'on entend habituellement "situation-problème" parce que le seul terme de "problème" serait trop restreint. En fait, il nous semble que ce dont nous voulons parler correspond assez bien au niveau que G. Brousseau identifie sous ce nom dans sa hiérarchie des situations et sa description du milieu (1986b).

Mais nous donnons aussi à ce terme une autre signification qui se réfère au savoir en jeu. Actuellement, la plupart des enseignants et des manuels scolaires traitent des exemples avant le cours, mais tous les exemples, ne peuvent pas servir de situation de référence, notamment ceux qui sont trop simples et trop pauvres. D'une part, une situation de référence doit pour nous être assez caractéristique du savoir qu'elle met en jeu : celui-ci doit y prendre une signification qu'on retrouve dans beaucoup d'autres situations et en même temps donner plusieurs moyens d'accès,

[10] voir description en annexe

par exemple permettre une traduction dans plusieurs cadres. Elle doit pour cela avoir une complexité suffisante. D'autre part, et à cause même de cette complexité, elle doit demander aux élèves un travail et un investissement significatifs. Pour qu'elle puisse jouer son rôle, une telle situation doit donc plaire aux élèves et être facilement mémorisable. A propos de la proportionnalité, nous avons utilisé deux situations qui ont très bien joué ce rôle avec les élèves : ce sont "les courses" et "les taxis" (voir chapitres 3A et 3B). Elles ont l'avantage de faire interagir les cadres graphique et numérique. Celle des taxis se traduit aussi dans le cadre algébrique au niveau considéré (formule de calcul). Elles permettent donc des jeux de cadres et elles ont de plus un ancrage dans la réalité qui donne des moyens de contrôle externes. La situation des courses a l'avantage de permettre un engagement personnel des élèves extramathématique mais offre moins de possibilités de calcul.

De plus, elles ont une fonction bien différentes de simples exemples qui sont là pour aider à comprendre mais ne sont pas destinés à être retenus. Les situations de référence vont au contraire faire partie intégrante du cours —voire même en constituer l'essentiel pendant un certain temps— jusqu'à ce qu'une décontextualisation suffisante soit possible. Elles sont apparentées à ce que G. Brousseau appelle "situation fondamentale" mais ne répondent pas forcément aux mêmes exigences par rapport au savoir. Par exemple, nous ne demandons pas forcément l'existence d'une stratégie de base avec validation par un milieu extérieur à l'élève. Ainsi la situation de comparaison d'aires par pavage que nous avons utilisée (voir première partie) nous paraît une situation de référence pour la mesure des aires planes mais pas une situation fondamentale. La validation pourrait venir par le découpage et recollement qui, à ce moment de l'apprentissage, peut servir de milieu, mais nous enlevons ce moyen puisque nous voulons créer d'autres critères.

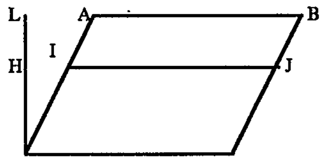
Si c'est une situation d'introduction d'un concept, cette première situation a un poids important dans la construction des conceptions des élèves. A propos des décimaux, Ratsimba Rajhon a montré dans sa thèse que les élèves recouraient prioritairement aux conceptions adéquates dans les premières situations qu'ils avaient rencontrées (commensuration en l'occurence) même si on leur proposait des situations où une autre conception (fractionnement) était plus adaptée. Cette importance des premières situations peut peut-être s'expliquer si on imagine que les conceptions ont une structure analogue à celles des représentations dans la théorie de la représentation sociale : elles contribueraient alors à créer le noyau central d'une conception et les situations rencontrées par la suite et reconnues comme ayant un rapport avec cette conception se placeraient de façon périphérique donnant lieu à des adaptations locales remettant le moins possible en question le noyau central. En revanche, d'autres situations qui mettent en jeu le même concept mathématique mais qui ne sont pas reconnues comme telles par les élèves pourraient être vécues comme des premières situations et créer un autre noyau central qui n'est pas en relation avec le précédent, ce qui peut amener la coexistence de conceptions contradictoires si on les prend dans leur globalité.

3.2. Jeux de cadres et changements de points de vue.

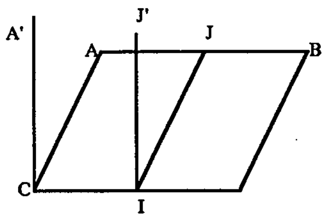
Que peut-on appeler jeux de cadres ?

Nous avons déjà expliqué dans le chapitre 1 ce que R. Douady entend par cadres et par jeux de cadres. Dans la première définition qu'elle donne (Douady, 1984), les cadres sont essentiellement des domaines mathématiques (géométrique, numérique...) ou d'autres disciplines ou des domaines de la réalité concrète ou encore des signifiants qui permettent de traduire des signifiés différents (représentations graphiques par exemple). Par la suite (Douady, 1987), la définition s'étend assez notablement puisqu'on peut avoir des cadres qui comportent les mêmes objets et diffèrent par les images mentales et la problématique développée. Ainsi dans le travail sur les aires (Douady et Perrin-Glorian, 1989), nous avons parlé de jeux de cadres entre le papier blanc et le papier quadrillé.

Cependant, cette différence de problématique demande à être précisée car, à trop l'ouvrir, on risque de vider la notion de jeu de cadres de son intérêt. Il nous semble en effet que n'importe quel changement de point de vue ne peut pas être considéré comme un jeu de cadres. Ainsi, dans le même travail sur les aires, la question se posait à propos de ce que nous avons appelé "dialectique statique-dynamique" qui nous paraît une mise en relation fondamentale pour la construction du concept d'aire entre deux points de vue mais qu'on ne peut pas vraiment assimiler à un changement de cadre. Il s'agit toujours de surfaces géométriques, de tracés sur papier blanc, on a les mêmes objets mais on n'a plus le même problème qui se traduirait de manière différente ou ferait appel à des outils de traitement différents. Même si on considère le problème suivant : "A partir d'un parallélogramme donné, construire un rectangle de même aire", la traduction du problème dans un cadre qu'on pourrait qualifier de dynamique ne peut pas faire avancer les élèves dans la résolution : s'ils envisagent de faire glisser les segments parallèles à un côté avec une translation variable (fig. 1) pour transformer le parallélogramme en rectangle, l'aire se conserve, s'ils envisagent de faire tourner tous les segments parallèles à un côté dans une rotation d'angle fixe mais de centre variable, l'aire ne se conserve pas.



translations de vecteurs IH, AL etc...
Figure 1



rotations de centres I, C ... et d'angle (CA, CA')
Figure 2

Le domaine des transformations géométriques intervient dans les conceptions des élèves à propos des aires. On est obligé d'en tenir compte dans l'apprentissage et il semble essentiel de donner aux élèves l'occasion de confronter ce point de vue avec celui du découpage et recollement. Mais on ne peut pas dire qu'on organise un jeu de cadres entre un point de vue statique et un point de vue dynamique. Ce qui nous paraît en jeu là, c'est le début de construction de concepts en relation avec la notion d'aire : ce sont d'un côté les notions de transformation géométrique, d'isométrie, de continuité, de l'autre l'additivité et la mesure. Du point de vue dynamique, il s'agit de voir quelles mesures vont conserver les transformations géométriques envisagées —notamment la conservation de certaines longueurs n'entraîne pas nécessairement la conservation de toutes les longueurs. Du point de vue statique, il s'agit de voir que le passage d'une figure à une autre par décomposition additive n'a rien à voir avec une transformation continue. Pour des élèves d'un autre niveau, dans le supérieur ou peut-être au lycée, on pourrait envisager des jeux de cadres entre le domaine des transformations géométriques et celui de la mesure en posant un problème qui fasse intervenir les deux domaines

Le jeu de cadres et la définition même des cadres en jeu nous paraissent ainsi indissociables de l'existence d'un problème qui permet ce jeu de cadres et des connaissances que les élèves sont susceptibles d'engager dans la résolution de ce problème. Par ailleurs, il faut aussi distinguer le jeu de cadres du changement de niveau dans la connaissance par création d'un concept unificateur. Ainsi quand les élèves passent du cadre numérique au cadre graphique ou au cadre algébrique pour traiter un problème de proportionnalité, la fonction n'est pas pour autant reconnue comme objet. Les relations entre l'objet fonction et l'ensemble de ses représentations (couples, graphique, formule...) nous paraît d'une autre nature que le changement de cadres.

A partir d'un problème, on peut définir des cadres potentiels de traduction de ce problème, liés à des caractéristiques du milieu où peut se situer tout ou partie de la résolution, qui conditionnent ou favorisent certains rapports aux objets en présence, la mobilisation d'outils différents... Par exemple, si le problème est de fabriquer une surface de même aire qu'une surface donnée, la donnée de papier blanc ou de papier quadrillé induit la mobilisation première d'outils différents même si on peut envisager un changement de cadre (quadriller le papier blanc ou faire abstraction du quadrillage). Les cadres relatifs au problème peuvent être définis par des caractéristiques matérielles comme ci-dessus ou mathémathiques comme le cadre de la géométrie pure opposé à celui de la géométrie analytique. La définition des cadres potentiels dépend aussi du niveau des élèves : il faut que la traduction du problème dans ces cadres ait du sens pour les élèves.

Dans le cas où on a pu définir plusieurs cadres potentiels pour un problème, il y a pour les élèves une possibilité de changement de cadre. Le jeu de cadres va consister à utiliser plusieurs changements de cadres (au moins un aller et retour) pour la résolution. Mais, comme nous l'avions déjà remarqué dans le chapitre 1, il se peut que le changement soit plus facile dans un sens que dans un autre, ou même que les élèves ne puissent faire d'eux-mêmes le premier changement que dans un sens : par exemple, si on leur demande de chercher un rectangle d'aire et périmètre donnés, ils peuvent passer dans le cadre numérique parce qu'il est potentiellement présent alors que si on leur demande de chercher deux nombres dont la somme et le produit sont donnés, ils n'ont aucune raison de penser aux rectangles. C'est donc la consigne que donne l'enseignant qui va permettre que les élèves s'engagent ou non dans un jeu de cadres pour résoudre (ou au moins le favoriser).

Un moyen de mettre en relation des conceptions différentes

Comme nous l'avions dit dès le premier chapitre, les jeux de cadres nous paraissent un moyen important pour mettre en relation des conceptions différentes, voire contradictoires. Ils peuvent donc être précieux pour aider à vaincre un obstacle épistémologique ou didactique. Par exemple, le recours à une graduation à une assez grande échelle et à la notion de milieu contredit l'idée qu'il n'y a rien entre 1,7 et 1,8. Mais, comme nous l'avons développé dans l'exemple précédent à propos des points de vue statique et dynamique, il nous semble que toute mise en relation de conceptions ou de points de vue différents ne peut pas être assimilée à un jeu de cadres.

Nous avons parlé dans le paragraphe précédent du jeu de cadres au sens où l'utilise R. Douady, comme moyen de faire avancer les connaissances des élèves dans un cadre à l'aide du déséquilibre entre les connaissances en jeu dans deux cadres pour traiter le même problème. Dans le cas où il s'agit de mettre en relation des conceptions différentes, on peut avoir un jeu de cadres un peu différent de celui qui a été schématisé dans le paragraphe précédent : la résolution se fait dans le cadre où le problème est posé mais un autre cadre de résolution potentiel sert de contrôle à différents moments de la résolution : par exemple, on résout un problème de système linéaire dans le cadre algébrique avec certains contrôles dans le cadre de la géométrie analytique en termes de droites ou de plans qui se coupent...

Changements de cadre et élèves en difficulté

Pour qu'un jeu de cadres soit possible, il faut qu'un minimum de connaissances soit disponible dans chacun des cadres. Ainsi on ne peut pas espérer faire un jeu de cadres entre le numérique et le graphique si on n'a pas travaillé en tant que telle la représentation graphique. Par exemple, dans la situation des taxis, sauf si les élèves ont une très grande familiarité avec le cadre graphique, celui-ci n'est disponible pour traiter des problèmes comme "quel taxi choisir pour parcourir les distances d_i en payant le moins cher possible ?" que si on a d'abord étudié les représentations graphiques qui correspondent à chaque tarif. A plus forte raison, dans l'exemple développé plus haut, il n'y a pas de jeu de cadres possible entre les transformations géométriques et la mesure parce que les élèves ne disposent de connaissances dans aucun des deux cadres. Il s'agit tout au plus de la mise en relation de différentes expériences sensibles.

De plus le changement de cadres nécessite un apprentissage, c'est quelque chose que la plupart des élèves ne font pas spontanément. Un problème qui nécessite un changement de cadres est plus difficile, plus complexe : s'il se résout facilement dans le cadre de départ, il n'est pas économique de le traduire dans un autre cadre.

Toutes ces raisons font que les enseignants vont plus difficilement utiliser des jeux de cadres dans des classes composées majoritairement d'élèves en difficulté :

- Avec les élèves en difficulté, par manque de temps, les enseignants ont tendance à se concentrer sur le cadre numérique considéré comme prioritaire, au moins à l'école élémentaire, en négligeant des activités géométriques ou graphiques qui pourraient donner d'autres références. Les cadres autres que numériques risquent donc d'être moins remplis et les changements de cadres impossibles ou inefficaces.
- Ils hésitent à donner des problèmes suffisamment complexes pour qu'un changement de cadre soit vraiment utile.
- De plus, une conviction qui semble assez répandue chez les enseignants est que si les élèves ont des difficultés, il faut faire le moins de mélanges possible[11]. Il est vrai que les connaissances de ces élèves sont souvent peu fiables et les dérapages et utilisations de propriétés hors de leur domaine de validité sont fréquentes. Cependant, en séparant les domaines, on risque de diminuer les sources de déséquilibre et donc aussi les occasions d'apprentissage et aussi les possibilités de contrôle des dérapages éventuels..

3.3. Le rôle du maître dans la théorie des situations didactiques

Le rôle du maître dans la théorie des situations

Dans la théorie des situations didactiques telle que la développe G. Brousseau (1987) et que nous schématisons ici, le rôle du maître dans les situations didactiques se situe essentiellement à trois niveaux : choix d'un problème et d'une situation a-didactique et détermination des variables didactiques de façon à mettre en jeu la connaissance visée, dévolution de cette situation à l'élève et institutionnalisation des connaissances. Nous revenons plus longuement sur ces points dans le paragraphe 3.5. La première phase n'est pas forcément entièrement à la charge de l'enseignant qui peut avoir recours à des travaux d'ingénierie didactique. Les types de situations a-didactiques auxquelles peuvent être confrontés les élèves pour permettre l'apprentissage des connaissances avant leur institutionnalisation sont des situations d'action, de formulation ou de validation. Les paradoxes du contrat didactique se rapportent au rôle de l'enseignant mais les conditions sur les actions de l'enseignant pour permettre la dévolution et l'institutionnalisation restent imprécisées.

Le rôle du maître au cours des bilans collectifs

Dans sa thèse, D. Grenier témoigne de sa difficulté à rendre compte de toutes ses observations dans ce cadre : d'une part elle constate (p. 316) que "le contrôle des situations - problèmes ne suffit pas à assurer un "bon"

[11] Nous l'avons vu par exemple à propos de graduation et nombres.

déroulement des phases collectives" ce qui laisse penser que le rôle du maître dans ces phases n'est pas suffisamment pris en compte par la théorie. Elle remarque que les phases collectives ne peuvent se réduire à de l'institutionnalisation et elle y identifie deux types de moments (p. 405) :

"L'un de ces moments correspond à une homogénéisation des savoirs mis en jeu par les élèves dans la situation - problème, nous l'avons nommé phase de bilan". Elle trouve essentiellement deux caractéristiques à cette phase :

- c'est *"un lieu de débat sur toutes les connaissances et procédures utilisées par les élèves dont celles qui dépassent le cadre des apprentissages fixés.*
- *elle permet une homogénéisation des connaissances mises en jeu dans les groupes (dépersonnalisation) qui deviennent des connaissances collectives sur lesquelles va s'appuyer la phase d'institutionnalisation."*

Le rôle du maître dans la dévolution et dans les phases de conclusion.

De son côté, C. Margolinas souligne la responsabilité du maître dans le processus de dévolution : "Le maître est alors non seulement responsable d'une simple discipline acceptable dans la classe, mais moins superficiellement de l'engagement persistant de l'élève dans une relation a-didactique avec le problème" (Margolinas, 1989, p.51) et aussi dans les phases de conclusion qu'il peut, s'il a choisi une situation qui le permet, conduire comme une phase de validation ou au contraire comme une phase d'évaluation.

Nouveaux développements de la théorie : la mémoire du système didactique.

Dans les développements récents de la théorie des situations, G. Brousseau et ses élèves commencent à modéliser le rôle de l'enseignant tout au long du déroulement de l'apprentissage en termes de "mémoire du système didactique". Ils étudient quels sont les faits didactiques que l'enseignant doit avoir en mémoire pour gérer son enseignement. Ces développements nous intéressent énormément, d'autant plus que c'est dans une direction proche que nous avons fait porter nos efforts de théorisation, comme nous allons l'expliquer dans le paragraphe suivant.

3.4. Un autre type de situation : les situations de "rappel"

Tout le monde s'accorde à reconnaître l'importance de la dépersonnalisation et de la décontextualisation dans le processus d'apprentissage d'une notion. S'il y a bien des temps forts pour cela au cours de l'enseignement, ils ne nous paraissent pas se limiter aux bilans de fin de séance ni aux phases de conclusion mais commencer dès la phase de dévolution. Nous allons y revenir dans un instant. Auparavant, nous voudrions identifier un type de situation qui nous paraît jouer un rôle important dans le processus de dépersonnalisation et décontextualisation des savoirs construits en classe, ce que nous appellerons pour le moment, et faute d'avoir trouvé un meilleur terme, des situations "de rappel". Il faut tout de suite dissiper un malentendu possible : il ne s'agit pas de révision ni de rappel par le maître de ce qui a été fait, il s'agit plutôt pour les élèves de se rappeler une ou plusieurs situations déjà traitées dans des séances précédentes sur un même thème, avec un peu de recul donc, de faire un retour sur ces séances, une anamnèse en quelque sorte, pour reprendre le terme que Y. Chevallard (1988) utilise pour les enseignants. Nous expliquerons plus loin pourquoi nous utilisons le terme "situation" et non "phase" pour les désigner.

Leur objectif

En essayant de dire collectivement ce qui s'est passé, quel problème on a traité, les élèves sont amenés à repenser le problème, les procédures de traitement envisagées dans la classe. Les élèves qui ne se sont pas construit de représentation mentale au cours de l'action trouvent là une nouvelle occasion et une raison de le faire puisqu'ils vont devoir parler de ce qui s'est passé et le décrire sans pouvoir agir à nouveau. Il se peut que pour certains élèves l'action soit à nouveau nécessaire mais elle est alors placée dans une nouvelle perspective : il faut agir non seulement pour trouver une solution mais aussi pour pouvoir en parler.

Nous faisons l'hypothèse qu'au cours de ces phases, il se produit d'une part une *dépersonnalisation* des solutions dans la mesure où elles sont reprises et exposées par d'autres élèves que ceux qui les ont trouvées, d'autre part une *pré-décontextualisation* : en reprenant à froid ce qui s'est passé, les élèves élaguent les détails pour identifier ce qui est important. A cette occasion, le sens caché, le rôle pour l'apprentissage de l'un ou l'autre des problèmes posés peut être révélé à l'un ou l'autre des élèves par un de ses pairs ou par le maître dans son discours même ou par le type de questions posées ; de plus, s'il y a une suite de problèmes sur un thème, chacun des problèmes traités est intégré dans un processus, il est intériorisé avec un sens nouveau. Au cours de ce type de situation, les formulations évoluent, on peut avoir des retours sur des débats de validation qui ont déjà eu lieu ou rencontrer la nécessité de nouveaux. On n'est pas à proprement parler dans une situation de formulation où il s'agit de produire un nouveau langage, ni dans une situation de validation, mais on retravaille les formulations et les arguments déjà produits, en même temps qu'on contribue à la *construction de représentations mentales* par les élèves par le retour réflexif sur l'action que ces situations supposent.

Le rôle du maître dans ces situations

Dans ce type de situation, le rôle du maître est très important. Le choix de donner la parole à un élève plutôt qu'à un autre donne à la situation une signification toute différente :

- s'il veut que la fonction d'homogénéisation et de dépersonnalisation soit remplie, il va donner la parole aux élèves qui n'ont pas trouvé de solution ou qui n'ont pas abouti pour vérifier qu'ils suivent et reprennent à leur compte les méthodes utilisées,
- s'il veut avancer dans la décontextualisation et la formulation, il va davantage donner la parole aux "leaders", quitte à faire reprendre les nouvelles formulations du problème par l'ensemble de la classe dans le courant de la séance ou ultérieurement.

On voit ainsi une évolution par rapport à la phase de bilan où ce sont plutôt les "leaders" qui exposent les méthodes de résolution qu'ils ont trouvées, les "suiveurs" se contentant d'écouter ou d'intervenir sur des points de détail qui sont dans le domaine de l'ancien.

Le choix des questions est lui aussi très important : suivant le cas, elles vont permettre à la fois d'ancrer le "nouveau" dans les connaissances anciennes et dans ce que les élèves ont réellement fait ou elles vont permettre de faire avancer la connaissance en s'écartant un peu du problème réellement traité, en proposant un début de généralisation ou de réinvestissement dans un contexte légèrement différent.

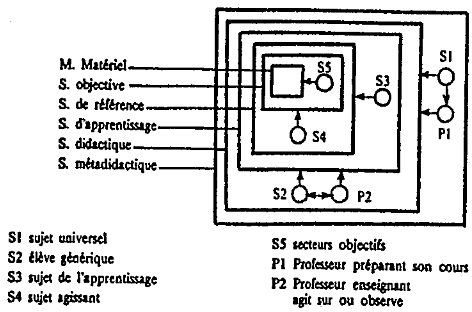
Origine de cette idée

Nous avions depuis longtemps repéré l'importance qu'avaient pour l'apprentissage des élèves de telles phases de rappel auxquelles la maîtresse donnait une grande place dans la classe où ont eu lieu (entre 1975 et 1979) les observations sur lesquelles s'est fondée la thèse de R. Douady (1984). Notre présence dans la classe deux fois par semaine seulement en constituait une motivation, mais il est manifeste que la maîtresse leur faisait jouer un tout autre rôle, fondamental dans sa conduite de la classe et que G. Brousseau a plus tard désigné par le terme d'institutionnalisation. M. Artigue a analysé ces phases avec la même enseignante à propos du travail sur le cercle (M. Artigue et J. Robinet, 1982) en montrant comment elle les utilisait pour faire l'articulation entre les problèmes qu'avaient résolus les élèves et l'institutionnalisation.

Nous avons par la suite constaté que ce n'était pas une pratique de tous les maîtres et nous avons pensé que ce travail que certains élèves étaient capables d'effectuer seuls pour eux-mêmes, s'ils en éprouvaient le besoin, manquait considérablement à d'autres élèves à qui on ne fournissait pas l'occasion de repenser par eux-mêmes les situations d'action qu'ils avaient rencontrées. Ce qui se jouait à ce moment là nous a paru suffisamment fondamental pour que nous l'étudions d'un peu plus près et de nature suffisamment différente de ce qui se joue dans et autour de la situation a-didactique pour que nous considérions ces phases comme des situations à part entière. Nous allons maintenant regarder si cette appellation est cohérente avec celle de Brousseau dans la théorie des situations.

Situations didactiques. Situations a-didactiques.

Dans la modélisation par systèmes emboîtés (voir schéma ci-contre extrait de Brousseau, 1990), le niveau de la situation didactique est celui où apparaît le professeur. Il contient une situation a-didactique dans laquelle le sujet élève est en position réflexive par rapport à une situation de référence dans laquelle il agit ou au moins pourrait agir.



L'auteur emploie là le terme "situation" pour chacun des niveaux et dans le même article définit la situation en se référant explicitement à la théorie des jeux, mais par la suite il semble qu'il n'utilise la modélisation en termes de jeu que pour des situations qui se placent au niveau a-didactique (action, formulation, validation). Il avait utilisé précédemment l'expression "situation d'institutionnalisation" qu'il ne reprend pas dans ses articles récents.

Dans la "situation de rappel" au contraire, si on retient le mot, nous sommes clairement au niveau didactique puisque l'élève réfléchit à l'action ou à une action possible non plus pour avoir un résultat mais pour apprendre. De plus, la réflexion peut porter sur plusieurs situations didactiques rencontrées auparavant dans lesquelles elle peut contribuer à restaurer l'aspect a-didactique qui n'avait pas forcément été perçu si la dévolution n'avait pas abouti.

C'est donc un moment du processus dévolution-institutionnalisation sur lequel nous reviendrons dans le paragraphe suivant.

En reprenant le schéma d'emboîtement de Brousseau, il nous faudrait complexifier le modèle pour pouvoir mettre plusieurs situations d'apprentissage à l'intérieur de la situation didactique de rappel :

Il nous semble qu'on pourrait y définir un jeu de l'élève et un jeu du maître non pas en référence à la résolution d'un problème mais en référence au sens et au statut des connaissances en jeu, et c'est dans cette mesure qu'on pourrait la désigner sous le nom de "situation" au sens de Brousseau. Pour le faire, la question se pose cependant de savoir si l'on peut, dans cette "situation", identifier le maître et l'élève à des sujets rationnels sans trop s'éloigner de la réalité. Il faudrait aussi pouvoir définir un milieu pour une situation de ce type. Dans l'état actuel de notre travail nous ne sommes pas capables de répondre plus précisément à ces questions[12]. Nous pouvons cependant dire que, dans les situations de rappel, on voit se dérouler en raccourci pour les élèves plusieurs des dialectiques identifiées par G. Brousseau, en particulier dialectique de la formulation et dialectique de la validation - voire même dialectique de l'action pour certains élèves. Pour le maître il y a également plusieurs enjeux : une prise d'information sur l'évolution des conceptions des élèves, c'est-à-dire une sorte de mise à jour de l'évaluation globale qu'il fait de ses élèves, une homogénéisation de la classe, un apport d'informations complémentaires et une institutionnalisation, au moins locale de certaines connaissances.

3.5. Le processus dévolution - institutionnalisation[13]

La dévolution

Revenons sur la dévolution du problème. Pour G. Brousseau (1987) "dans la didactique moderne, l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation a-didactique correcte, l'apprentissage est une adaptation à cette situation (p. 51)". La dévolution est pour lui un processus nécessaire à l'intérieur de la situation didactique parce que l'élève n'a pas immédiatement accès à la situation a-didactique: "La situation a-didactique finale de référence, celle qui caractérise le savoir, peut être étudiée de façon théorique mais dans la situation didactique, pour le maître comme pour l'élève, elle est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger : l'enseignant doit sans cesse aider l'élève à dépouiller dès que possible la situation de tous ses artifices didactiques pour lui laisser la connaissance personnelle et objective" (p. 50). Plus tard (Brousseau,1990), il donne une définition : "La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert". Comme l'analyse C. Margolinas (1989, p.20 à 24), la dévolution est ce qui permet de modéliser l'élève comme sujet mathématique de façon suffisamment pertinente : "La théorie des situations a-didactiques ne considère l'élève que dans la mesure où celui-ci rentre en interaction avec le milieu mathématique. Si l'élève entre dans ce jeu, il ne retient donc que *ce qui est mathématiquement pertinent dans la situation.* C'est donc uniquement l'élève comme *"sujet mathématique"* que Brousseau retient ici. Le sujet mathématique est l'image du sujet rationnel de la théorie des jeux." (p. 23) "Les situations a-didactiques, décrites par la théorie des situations, supposent donc que ce processus de dévolution d'une responsabilité et d'une causalité soit déjà achevé et que le sujet puisse être appréhendé comme un sujet mathématique sans réduction dramatique." (p. 24) Elle précise (p. 50) "Dans la dévolution, le maître se dessaisit de la partie de sa responsabilité *qui est spécifique du savoir à enseigner.* Cela veut dire en particulier qu'il ne se retire pas, ne devient pas spectateur de la situation (ou pas de façon nécessaire)".

La question que nous nous posons est la suivante : qu'est-ce qui permet à l'élève de converger vers la situation a-didactique, qu'est-ce qui fait qu'il met un savoir en jeu en tentant de résoudre le problème posé par le maître ? G. Brousseau propose lui-même une première réponse à cette question : "L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques" (p. 49). La dévolution est essentiellement ce qui concerne la deuxième partie de la phrase et il est vrai que c'est une condition pour que l'élève fonctionne de façon scientifique et non en réponse à des indices extérieurs à la situation, didactiques notamment.

Mais il nous semble que l'affirmation contenue dans la première partie de la phrase n'est pas évidente pour tous les élèves. Suivant leur origine culturelle ou leur expérience scolaire antérieure, certains élèves savent bien en effet

---

[12] Nous avons eu connaissance des travaux d'André Rouchier sur l'institutionnalisation après rédaction de ce chapitre. Sa problématique est proche de la nôtre mais nous n'avons pas eu le temps de tirer parti de ses travaux pour avancer.

[13] L'essentiel de ce paragraphe a été rédigé en 1989 alors que nous n'avions pas connaissance de la thèse de C. Margolinas. Nous avons constaté depuis une grande convergence de points de vue. Notre participation commune au groupe 8 du GR de didactique —dont faisaient également partie toute l'équipe de Marseille ainsi que C. Laville, P. Berdot, M.L. Schubauer-Leoni, G. Ricco— n'y est certainement pas étrangère. Après la lecture de cette thèse, en 1991, nous ajoutons quelques remarques et citations.

qu'il y a toujours un objectif d'apprentissage dans ce qu'on leur propose et on a l'habitude dans l'enseignement de faire comme si cette évidence était partagée. Or nos observations sur les élèves en difficulté nous laissent penser qu'elle ne l'est pas. La question didactique qui se pose alors est de savoir de quel projet il faut faire dévolution à l'élève avec le problème (ou avant pour permettre de faire dévolution du problème à l'élève), et comment faire dévolution de la prise en charge par l'élève de son propre apprentissage ? Cette question se pose dans la négociation du contrat didactique à plusieurs niveaux : au niveau général de ce que Chevallard (1988) appelle le "métacontrat", au niveau de tout un processus d'apprentissage sur un concept et au niveau de chacune des situations composant ce processus.

De plus, comme l'analyse des situations de rappel l'a montré, nous pensons que le processus de dévolution se poursuit au-delà de l'action[14] : pour certains élèves qui, au cours de l'action, ont fonctionné de façon non scientifique, par exemple en utilisant des indices didactiques ou en s'en remettant à des camarades, on peut avoir une dévolution après-coup par un retour réflexif sur l'action.

L'institutionnalisation

Ceci nous amène à considérer aussi l'institutionnalisation comme un processus qui se déroule tout au long de l'enseignement, un moteur de l'avancement du contrat didactique et non, ainsi que le laissent entendre beaucoup de travaux de didactique, comme une phase en fin de processus où le maître fait son cours. L'institutionnalisation des connaissances commence pour nous dès le tout début de la dévolution puisqu'il faut déjà que le maître donne à l'élève, s'il ne l'a pas, le projet d'acquérir ces connaissances. Evidemment, nous trouvons là un des paradoxes du contrat didactique que Brousseau a mis en évidence : le maître ne peut pas parler de la connaissance nouvelle[15] puisque c'est justement l'enjeu de l'apprentissage mais il peut dire qu'on va apprendre quelque chose de nouveau et éclairer les élèves sur les connaissances anciennes à mobiliser pour "accrocher" cette connaissance nouvelle. En fait le maître tend à l'institutionnalisation tout au long du processus mais il ne peut dévoiler entièrement son projet sous peine de le faire échouer : s'il veut que l'institutionnalisation puisse se faire pour les élèves dans de bonnes conditions avec du sens, il ne peut aller droit au but mais l'a toujours présent à l'esprit pour ménager dès le départ et tout au long du processus d'enseignement les conditions qui vont lui permettre de négocier le contrat didactique dans ce sens.

En voyant ainsi l'institutionnalisation, nous rendons une grande place au maître dans la situation didactique. Nous reviendrons sur ce point. Essayons auparavant d'expliciter certaines contraintes qui pèsent sur l'institutionnalisation, particulièrement visibles dans le cas d'élèves en difficulté où on se sent comme sur le fil d'un rasoir : si à la suite de la résolution d'un problème, aucune décontextualisation n'est amorcée par le maître, les élèves ne retiennent rien et ne peuvent parler que du contexte du problème et non de son enjeu, s'il y a décontextualisation par le maître, on assiste souvent à un dérapage formel qui amène les élèves à prendre les écritures mathématiques sans les créditer du sens qu'elles pouvaient avoir dans le problème traité. On voit que l'équilibre est difficile à trouver.

Nous pensons que, pour certains élèves au moins, l'institutionnalisation ne peut se faire que de façon très progressive avec de nombreux cycles contextualisation - décontextualisation, c'est pourquoi les situations de rappel nous paraissent très importantes.

Ceci nous amène à distinguer des étapes dans l'institutionnalisation :

- institutionnalisations locales dans un ou plusieurs contextes, au sens où R. Douady (1984) utilise cette expression
- réinvestissement d'un contexte dans un autre : institutionnalisation d'une liaison entre différents contextes,
- cours construit par le professeur au sens traditionnel, donnant un statut d'objet mathématique à certaines des notions rencontrées.

Ces étapes concernent aussi bien des concepts que des pratiques, méthodes et représentations qui leur sont attachées dans les situations rencontrées. De plus, elles ne correspondent pas entièrement à un ordre chronologique, le réinvestissement se plaçant tout au long, avec des degrés de décontextualisation différents : dès que les élèves ont rencontré une première situation sur la notion, ils peuvent réinvestir des pratiques en reconnaissant une analogie entre deux situations, jusqu'après le cours où ils pourront peut-être réinvestir le savoir en tant qu'objet mathématique.

Les situations que nous avons appelées "de rappel" sont des moments clé dans le processus d'institutionnalisation, au moment de l'institutionnalisation locale, qu'elles vont permettre d'adapter aux conceptions actuelles des élèves, mais aussi avant le cours proprement dit qu'elles vont permettre d'accrocher aux problèmes qui

[14] Nous adhérons à l'analyse de C. Margolinas *"la dévolution nous semble être un processus qui dure tout le temps de la situation a-didactique"* mais nous la poussons plus loin en faisant continuer le processus de dévolution au delà de la situation a-didactique par une possibilité de "dévolution après coup".

[15] Par "connaissance nouvelle", nous entendons ici aussi un approfondissement ou un nouvel emploi d'une connaissance ancienne

ont permis de donner du sens aux notions qu'on va exposer. Elles jouent un rôle essentiel dans la constitution de ce que G. Brousseau appelle "la mémoire de la classe".

Le rôle du maître est essentiel dans le processus d'institutionnalisation, quel que soit le style d'enseignement. Il est manifeste dans un enseignement traditionnel où il est de l'entière responsabilité du maître de faire un cours cohérent, de choisir des exercices qui vont permettre l'appropriation de ce cours par les élèves et d'accompagner cours et exercices d'un discours heuristique pour aider les élèves à faire la liaison entre le cours et les méthodes de résolution des exercices. L'élève quant à lui n'a qu'à faire son travail : apprendre le cours et résoudre les exercices qu'il doit savoir faire s'il a compris le cours.

Dans un enseignement considéré comme la dévolution à l'élève d'une situation a-didactique bien choisie à laquelle il devra s'adapter, le rôle du maître reste fondamental pour l'institutionnalisation, même s'il utilise une ingénierie didactique déjà élaborée par d'autres, avec des choix adaptés des variables didactiques. Pour l'institutionnalisation, le choix du moment, le choix du contenu et celui de la formulation lui reviennent finalement.

- Il doit choisir ce qui est à porter à la connaissance de tous et à retenir dans chaque séance et, pour cela, décider en même temps
    - quelles connaissances anciennes remobiliser pour ancrer les nouvelles ?
    - que reprendre dans les activités des élèves : jusqu'à quel degré de détail faut-il les laisser aller, ou faut-il les encourager à aller dans la description de leurs procédures?
    - jusqu'où aller dans la décontextualisation, dans la formalisation ? quel doit être le degré de généralité de son discours, quels termes employer ?
- Ces décisions vont dépendre de ce que les élèves ont réellement fait et de l'évaluation qu'en fait le professeur : est-ce que ce qu'il considère comme ancien est réellement acquis par suffisamment d'élèves, est-ce que l'appropriation des méthodes de résolution est suffisamment généralisée dans la classe... Il s'agit là d'une évaluation globale, intuitive des élèves, qui a des liens avec l'évaluation officielle réalisée par ailleurs mais qui ne s'y réduit pas (cf Perrenoud 1986). Cette lecture par le professeur du travail des élèves va faire intervenir les représentations de l'enseignant sur le savoir visé et aussi sur la manière d'apprendre et sur son rôle dans l'apprentissage des élèves.
- Les élèves ne sont pas tous au même niveau, ils sont inégalement prêts à suivre le maître dans une décontextualisation de ce qui a été vraiment traité. Il revient encore au maître de laisser ou non la possibilité de refaire ce chemin à d'autres moments pour ceux qui n'étaient pas encore prêts.

3.6. "Hypothèse constructiviste" et fonctionnement de l'élève comme "sujet mathématique". Quelques nuances.

La position épistémologique adoptée dans les travaux d'ingénierie didactique

Ainsi que nous l'avons indiqué dans le chapitre 1, les recherches en didactique des mathématiques en France, principalement les travaux d'ingénierie didactique, adoptent généralement un point de vue épistémologique qui accorde une grande importance à la résolution de problèmes, aussi bien dans la construction du savoir que comme critère du savoir. Or d'une part, cette position n'est pas toujours conforme aux conceptions sur l'enseignement et l'apprentissage des professeurs qui utilisent les résultats des recherches, ce qui pose des problèmes au niveau de la transmission des travaux d'ingénierie didactique, d'autre part, nous avons vu que les élèves ne sont pas toujours prêts non plus à engager leur responsabilité dans une résolution de problème. Il nous semble d'abord que cela demande pour les travaux d'ingénierie didactique, s'ils sont diffusés au-delà de la communauté des chercheurs, d'être capables de préciser les conditions de fonctionnement des connaissances dans les situations, du côté du maître comme du côté des élèves. Nous allons maintenant réinterroger cette hypothèse du point de vue de la recherche.

Fonctionnement de l'élève comme "sujet mathématique".[16]

L'objectif central de l'enseignement est bien celui du fonctionnement mathématique, non didactique, des connaissances de l'élève dans un avenir plus ou moins proche : en reprenant les termes de G. Brousseau, on peut dire que tout projet d'enseignement prévoit sa propre extinction. Dans tout enseignement, il est donc normalement prévu des moments où l'élève doit fonctionner comme "sujet mathématique" face à des situations a-didactiques : dans l'enseignement traditionnel, les problèmes ont un peu cette fonction. C'est notamment le cas de ceux de fin d'année, d'examen, dans la mesure où ils portent sur un domaine plus large et où ils ne sont pas choisis par le professeur de la classe. Cependant le découpage en questions se réfère évidemment à un fonctionnement de l'élève comme sujet

---

[16] Nous reprenons le terme utilisé par C. Margolinas dans sa thèse parce qu'il nous semble convenir pour ce que nous voulons dire ici.

didactique. Il faudrait en fait distinguer des degrés dans le "fonctionnement mathématique" de l'élève parce que, tant qu'il est à l'intérieur du système d'enseignement, l'élève n'a jamais un fonctionnement totalement scientifique, du moins sur les notions qui ont été enjeu d'enseignement dans un passé pas trop lointain. Le moment où on s'en rapproche le plus dans ce cas est peut-être celui où il doit utiliser les mathématiques dans une autre discipline ; mais, dans ce cas encore, le système est obligé de prévoir un enseignement de la traduction des problèmes de l'autre domaine en termes mathématiques. On n'arrive le plus souvent à un "fonctionnement mathématique" de l'élève que sur des notions suffisamment "naturalisées" (Chevallard, 1989) pour jouer le rôle de milieu.

De plus, il y a toujours un décalage entre le fonctionnement réel de l'élève et celui que prévoit ou permet la situation : l'élève peut lui-même fonctionner comme "sujet mathématique" même si la situation ne l'y oblige pas, par exemple en se posant des questions supplémentaires, en faisant des rapprochements qu'on ne lui demande pas. Inversement, il arrive que l'élève oblige l'enseignant à lui fournir des indices parfois mineurs en apparence mais déterminants en réalité et ainsi à dénaturer une situation qui était prévue au départ pour exiger de lui une grande part de fonctionnement comme sujet mathématique.

Disons qu'on peut admettre que, dans le système scolaire, l'élève a un fonctionnement comme "sujet mathématique" quand il cherche des réponses et des moyens de validation dans le problème qu'il traite et dans ses propres connaissances sans attendre ni provoquer des indications de la part d'un maître physiquement présent. Cela n'empêche pas cet élève de tirer parti d'indices didactiques présents dans le texte du problème lui-même. Il se peut d'ailleurs qu'en faisant cela, l'élève apprenne sur le contenu mathématique et non seulement sur le contrat didactique. Nous avons conscience d'apporter là une restriction importante : il se peut que les textes qu'on lui propose ne lui permettent jamais un fonctionnement qui s'approche vraiment du fonctionnement mathématique. Il faudrait donc définir les indications qu'on peut fournir dans un texte de problème en laissant aux élèves la possiblité d'un fonctionnement comme "sujet mathématique". Cette définition dépend évidemment des connaissances des élèves.

Sens et automatisation des connaissances.

Le fonctionnement comme sujet mathématique n'est pas incompatible avec un fonctionnement automatique dans certains cas. Certaines connaissances sont appelées à avoir un jour un fonctionnement automatique chez les sujets, quand ils arrivent à un niveau suffisant d'expertise. Il en est ainsi notamment des algorithmes, du calcul algébrique... Le sens et le fonctionnement automatique des connaissances ne s'opposent donc pas nécessairement : il est même indispensable d'avoir un fonctionnement automatique sur certaines choses pour libérer de la place en mémoire immédiate et travailler sur des choses nouvelles. Avoir un fonctionnement automatique ne veut pas dire, pour l'expert, ne pas avoir de moyen de contrôle alors que pour l'élève en difficulté, on constate souvent un fonctionnement automatique sans moyen de contrôle, en "automathe", comme dirait S. Baruk (1985).
Ce n'est que par un long travail qu'on va atteindre un fonctionnement automatique sans perdre de sens. Si on accélère trop, on a tous les dérapages bien connus. On ne peut donc pas l'atteindre au moment où la notion est objet d'enseignement.

Des connaissances anciennes bien intégrées, en particulier celle qui sont automatisées, peuvent servir de milieu pour la construction de connaissances nouvelles. C'est à ce type de milieu qu'on aura le plus souvent affaire quand on monte dans les niveaux d'enseignement, mais c'est toujours indispensable de le considérer, même pour les niveaux élémentaires, dès qu'on s'intéresse à autre chose qu'à des situations d'action..

L'automatisation de connaissances, en même temps que la familiarité acquise avec un certain nombre de situations, contribue sans doute aussi à la création d'une intuition mathématique qui permet une première approche, un balisage des problèmes et donne les moyens d'un contrôle relativement externe.

Du point de vue de la recherche en didactique, on s'est jusqu'à présent surtout intéressé à la construction des connaissances, en accord avec les hypothèses sous-jacentes sur l'apprentissage. Le passage à un fonctionnement qui se rapproche de l'expertise n'est en général pas pris en charge par l'institution d'enseignement, comme le souligne Chevallard[17]. Il nous semble que cette absence de prise en charge, cette absence de "travail de la technique", a peut-être une part de responsabilité dans la mise en échec de certains élèves : on leur enseigne et on leur fait répéter toujours les mêmes techniques performantes sans leur faire vraiment travailler leur technique.

Hypothèse constructiviste, situations a-didactiques et élèves en difficulté

L'hypothèse constructiviste s'oppose à celle d'un apprentissage par imprégnation ou par imitation. Certains apprentissages mathématiques peuvent-ils néanmoins se faire de cette façon ? Sans remettre en cause l'hypothèse constructiviste pour la plupart des concepts mathématiques, il nous semble que l'imitation ou la répétition peuvent permettre l'apprentissage, notamment au niveau de certaines techniques et aussi jouer le rôle de facteurs facilitateurs

[17] Sur la déconcertation cognitive, communication au colloque du COED, Marseille, mai 1990, à paraître

à un moment où l'élève n'est pas prêt à engager sa responsabilité ou que c'est vraiment trop coûteux en temps, et permettre par la suite d'entrer dans une relation a-didactique avec un milieu mathématique. D'une certaine manière, on peut se demander si l'imitation, d'un pair comme du professeur, ne peut pas aider à la dévolution d'un projet d'apprentissage. On n'a jusqu'à présent pas beaucoup étudié les effets d'un enseignement par ostension, notamment la différenciation de ces effets suivant la nature des objets d'enseignement en jeu. Il serait intéressant d'étudier la possibilité d'utiliser une phase de ce type pour permettre d'initialiser la dévolution d'une situation a-didactique.

Comme le disait R. Douady dans sa thèse, la question qui se pose alors est celle de l'existence de seuils et de choix des concepts pour lesquels la confrontation à une situation a-didactique est indispensable pour que les élèves s'approprient le sens de ce concept. Ce sera sans doute le cas si l'on a repéré un obstacle. La détermination de ces obstacles est donc particulièrement importante. D'autres connaissances, en revanche, viennent s'inscrire en continuité avec des connaissances déjà acquises et peuvent sans doute être fournies comme des informations par le maître.

Par ailleurs, un autre élément intervient fortement dans l'apprentissage, particulièrement s'il s'agit de jeunes enfants, c'est l'aspect affectif, la confiance que l'on a dans quelqu'un que l'on aime bien. Il est fréquent de voir de jeunes enfants défendre avec conviction une position parce que "la maîtresse l'a dit" ou "papa l'a dit". Un choc émotionnel peut favoriser ou empêcher un apprentissage. Nous n'avons pas du tout abordé ces aspects, en particulier parce que nous n'avions pas de compétence pour le faire. Il est certain que dans le cas d'élèves en difficulté, ils peuvent intervenir de façon importante. Il n'est de toute façon pas dans notre propos de les traiter en tant que tels, mais ce qui nous intéresse, ce sont les manifestations qu'ils provoquent sur le plan didactique, par exemple au niveau de la dévolution. Pour obtenir de l'élève un fonctionnement comme sujet mathématique, il sera peut-être nécessaire d'envisager dans un premier temps un fonctionnement différent.

Pour que les élèves puissent travailler dans une situation a-didactique, en trouvant des moyens de validation dans le milieu et non auprès de l'enseignant, il faut que celui-ci puisse leur faire dévolution de cette situation, qu'il trouve le moyen de leur faire engager leur responsabilité dans la résolution, accepter de gérer eux-mêmes un type d'incertitude différent de celui qui est ordinairement l'apanage de leur place d'élève. C'est toute la question de la négociation du contrat didactique.

3.7. Négociation du contrat didactique. Des précisions.

Les marges de manœuvre du maître.

Pour conduire son enseignement, le professeur est soumis à un certain nombre de contraintes institutionnelles ou individuelles. Il dispose également de marges de manœuvre qui lui permettent de faire des choix. Certains de ces choix sont conscients et réfléchis, mais beaucoup restent inconscients parce qu'évidents pour le professeur, conséquences de ses représentations métacognitives, ils sont réglés par ce qu'on pourrait appeler, en reprenant le terme de Bourdieu (1972), "l'habitus professionnel". Les marges de manœuvre du professeur se situent à un niveau assez global d'une part et au niveau de la gestion à chaud de la classe d'autre part. Pour le niveau global, ce sont notamment :

- le choix des situations et de leur agencement,
- le choix de la gestion de la classe, de l'organisation du travail pour chaque situation,
- le type de discours utilisé ou non,
- l'évaluation qui est un moyen important de négociation du contrat didactique : les parties du cours soumises à évaluation sont en effet celles qui seront considérées comme importantes et à retenir par les élèves.

Même si les deux types de choix ne sont pas indépendants et qu'il s'établit une dialectique entre les deux, nous faisons l'hypothèse que la gestion à chaud relève davantage de l'habitus professionnel, qui gouverne sans doute aussi une partie des choix globaux et de la gestion prévue a priori. C'est surtout aux choix globaux et à la gestion a priori que nous nous intéressons dans la suite

Suivant les choix globaux qu'il fait, si l'on peut vraiment parler de choix, l'enseignant ne va pas avoir à gérer le même type d'incertitude.

Incertitude pour le maître, incertitude pour l'élève

Quel que soit le style d'enseignement, il y a une incertitude pour le maître mais elle ne se situe pas toujours au même endroit : R. Douady (1984 p. 21-26) observait qu'on assiste à un déplacement de l'incertitude suivant le type d'enseignement, avec aussi des modifications dans les moyens de contrôle de cette incertitude.

Quand la marge de manœuvre laissée aux élèves dans l'avancée du cours est faible (enseignement traditionnel cours-exercices), le professeur garde le contrôle sur le cours qui est de sa seule responsabilité et sur l'avancée du temps didactique mais il est incertain de ce que les élèves ont compris du cours et de ce qu'ils vont pouvoir appliquer, il a besoin de s'assurer que les élèves suivent.

Si la marge de manœuvre laissée aux élèves est grande, l'incertitude du professeur sur l'avancée du temps didactique, l'émergence des connaissances visées et la gestion de la classe, dont il reste cependant responsable, s'accroît :

- vont-ils faire quelque chose ? vont-ils faire ce qui est attendu ? ne font-ils pas s'écarter trop des objectifs visés ? comment réduire l'écart à la trajectoire prévue ?
- combien de temps cela prendra-t-il ?
- quelle information apporter, à quel moment ?

Pour réduire cette incertitude, la tentation est grande pour le professeur de dire aux élèves ce qu'il faut faire, ce qu'on attend. Il le fait parfois sans même s'en rendre compte, surtout dans le cas d'élèves en difficulté.

Il est alors fréquent que le professeur fasse de petites interventions, mineures en apparence, mais qui peuvent changer la nature du problème pour les élèves, pour réduire le temps, faire terminer la résolution dans la séance (voir Arsac,1989).

Cette incertitude est gérée en référence aux contraintes institutionnelles et aussi aux convictions, aux représentations du professeur sur la manière d'apprendre, notamment en ce qui concerne le *statut de l'erreur* et *la continuité des apprentissages :*

- arrivera-t-on à rééquilibrer les élèves qu'on a déséquilibrés ?
- que vont-ils dire, comment vont-ils s'exprimer, comment corriger ensuite les formulations des élèves si on leur a d'abord donné un statut ?
- comment corriger tout ce qu'ils ont fait ? peut-on laisser des erreurs ? ne va-t-on pas les encourager à reproduire ces erreurs ?

Des professeurs de collège avec qui nous avons travaillé, par exemple dans les stages de formation continue, font souvent cette objection pour refuser des situations où les élèves ne font pas tous la même chose en même temps : les phases de bilan deviennent trop longues et donc ingérables si chacun ou même chaque groupe doit rendre compte de tout ce qu'il a fait, et si on ne corrige pas tout au tableau, il peut rester des erreurs dans les productions des élèves, ce qu'ils ne peuvent accepter. Nous avons vu que cette objection est davantage soulevée par les professeurs de collège que par les maîtres de l'école élémentaire.

Elle porte aussi sur *l'évaluation :*

- qu'évaluer ? en particulier comment évaluer des savoirs d'une autre nature qui se construisent dans ces situations en même temps que les objets mathématiques —par exemple les savoirs méthodologiques ?

Nous avons vu dans le paragraphe sur le rôle du maître dans les situations de rappel que la gestion et le contrôle par le maître de ce type d'incertitude demande qu'il ait certaines informations sur le travail des élèves et l'état de leurs connaissances. Le professeur suit les élèves, mais sur un chemin qu'il se doit d'avoir bien balisé pour atteindre les objectifs prévus, ses questions portent sur le balisage de ce chemin. Et c'est un des objets de la didactique de lui fournir des outils pour le faire le mieux possible. On peut rapprocher cela des questions de reproductibilité interne ou externe soulevées par M. Artigue (1984). Comment caractériser une situation didactique pour que ce soient les conditions de production du savoir qui soient reproduites et non le déroulement d'une histoire déjà vécue ?

Pour l'élève aussi il y a un déplacement de l'incertitude suivant le type d'enseignement ou suivant le moment de l'enseignement. Dans l'enseignement traditionnel, la question est souvent de déterminer quelle partie du cours il faut appliquer pour traiter un exercice. Dans un enseignement considéré comme la dévolution à l'élève d'une bonne situation a-didactique, les méthodes à utiliser, leur validation sont à la charge de l'élève. Il ne sait pas à l'avance quel est l'objet d'apprentissage en jeu dans l'exercice, pourquoi on le traite.

Dans tous les cas, il reste en général une grande source d'incertitude pour l'élève, en particulier le jugement que le professeur va porter sur lui, les notes qu'il va lui mettre. Les entretiens, aussi bien avec les enseignants qu'avec les élèves nous ont confirmé le poids important de l'évaluation dans la négociation du contrat didactique et dans l'institutionnalisation. Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

Remarquons cependant que si l'incertitude est source d'angoisse pour le maître comme pour l'élève, en même temps, elle peut procurer aussi un certain plaisir : elle permet de maintenir l'intérêt, d'éviter l'ennui. Le désir de la réduire est, pour l'élève, un moteur de l'avancée du temps didactique. En effet, c'est la connaissance qui permet de réduire l'incertitude pour l'élève et elle diminue donc en principe pour lui avec les progrès de l'institutionnalisation.

Pour le maître, c'est plutôt l'évaluation, formelle ou informelle, qui lui permet de réduire son incertitude sur les connaissances des élèves et la détermination de ses marges de manœuvre qui lui permet de réduire son incertitude sur la gestion des séances[18].

Différences culturelles.

Nous avons déjà abordé à plusieurs reprises la question des diffférences culturelles, de façon assez générale, notamment en ce qui concerne le rapport au "métier d'élève", la compatibilité entre les attentes implicites de l'école et celles de la famille. Pour ce qui est de la négociation du contrat didactique, une certaine compatibilité entre les représentations du professeur et celles de l'élève paraît nécessaire, non seulement sur un plan général mais à propos du contenu lui-même. Or, elle n'est pas toujours donnée d'avance au niveau général et elle est toujours à construire au niveau du savoir. Et dans ce domaine, l'initiative est essentiellement du côté du professeur. Nous retrouvons là le problème de la dévolution.

Si l'élève n'est pas prêt à engager sa responsabilité dans les apprentissages, il faut trouver des organisations intermédiaires qui permettent une négociation acceptable pour lui et susceptible d'évolution. La question est de savoir comment "accrocher" le contrat didactique aux représentations des élèves de façon à ce qu'il puisse se modifier et faire évoluer ces représentations. Nous pensons que l'enseignant ne peut faire les adaptations nécessaires que s'il a une certaine conscience de ses propres attentes et de celles des élèves.

3.8. Impact de l'évaluation. Confirmation de son importance.

Dans cette recherche, nous n'avons pas étudié spécialement l'évaluation mais nous avons pu constater à plusieurs reprises combien elle intervenait dans la négociation du contrat didactique et dans l'institutionnalisation, que ce soit l'évaluation officielle obtenue par des notes chiffrées ou l'évaluation informelle que fait le professeur au jour le jour. Nous ne pouvons achever ce bilan sans en dire quelques mots.

Rôle dans la négociation du contrat didactique

L'observation de classes montre en général très vite comment les enseignants utilisent l'évaluation comme moyen de gestion de la discipline dans la classe : depuis l'interrogation écrite pour rétablir l'ordre immédiatement jusqu'à l'annonce de la notation du travail en cours ou de son intervention dans un contrôle prochain...
C'est en même temps un moyen d'obtenir un investissement de l'élève parce que le système scolaire et les parents contribuent à conditionner le travail de l'élève à un résultat noté. Nous avons vu dans le chapitre 6 que des enseignants déclarent que les élèves considèrent cette note comme un salaire qui leur est dû. Une des questions qui se posent à la didactique est de savoir si l'existence d'une note pour un travail favorise la dévolution ou est au contraire un obstacle à la dévolution. La réponse n'est certainement pas simple, et elle dépend au moins du moment de l'apprentissage et des élèves dont il s'agit.

Rôle dans l'institutionnalisation des connaissances

De plus, l'évaluation contribue fortement à l'institutionnalisation des connaissances : c'est la dernière étape de l'institutionnalisation d'un objet d'enseignement. Elle intervient à plusieurs niveaux :

D'abord, ce qu'on évalue va être considéré par les élèves comme plus important que ce qu'on n'évalue pas. Ainsi le contenu strict, le texte du savoir et les algorithmes risquent de prendre le pas sur les méthodes de travail non standardisées et plus difficiles à évaluer.

L'évaluation intervient aussi directement dans l'institutionnalisation par le type de questions posées, de réponses attendues qui vont être de ce fait valorisées et mémorisées.

Enfin, la correction indique ce qu'il fallait faire et par là ce qu'il aura lieu de faire une autre fois et donc de retenir.

Rôle dans la représentation de soi qu'a l'élève

L'évaluation, aussi bien officielle qu'informelle, contribue évidemment à construire la représentation de soi comme élève de la personne concernée, aussi bien que de sa position dans la classe, et a donc des répercussions sur l'ensemble du travail de l'élève dans la matière concernée.

Rôle social : famille, administration...

Enfin, l'évaluation a des conséquences objectives aussi bien au niveau des relations de l'élève avec sa famille que de son devenir scolaire et donc social.

---

[18]voir A. Robert (1988) "Une introduction à la didactique des mathématiques (à l'usage des enseignants)" *Cahier de didactique des mathématiques n°50.* IREM PARIS 7.

Nous ne développons pas ces points qui ont certainement un impact important sur l'apprentissage des élèves mais que nous ne nous sommes pas donné les moyens d'étudier ici.

4. A propos des représentations métacognitives et de la théorisation en didactique des mathématiques.

Rapport au savoir, habitus et théorie de la représentation sociale.

Outre la théorie des situations didactiques qui était au cœur des questions abordées dans la plupart des paragraphes précédents, nous avons fait référence à plusieurs constructions théoriques. Nous allons maintenant essayer de préciser comment, au terme de ce travail, nous les situons les unes par rapport aux autres.

Rapport institutionnel au savoir

Dans un article récent, Y. Chevallard (1989) expose de façon plus précise une théorie dont certains éléments figuraient déjà dans plusieurs écrits précédents, qui lui permet de redéfinir certaines notions de didactique des mathématiques et de formuler des problèmes de didactique qu'on ne pouvait jusqu'alors évoquer que dans les termes habituellement employés dans l'institution scolaire elle-même, donc sans extériorité d'après lui. Les termes premiers de sa théorie sont des objets, rattachés à des institutions auxquelles les individus, enseignants et élèves sont assujettis, et les rapports à ces objets. Il y a lieu de distinguer les rapports institutionnels pour différentes positions (en particulier celles d'enseignant et d'élève) aux objets institutionnels - qu'ils soient des objets de savoir ou d'autres objets - et les rapports personnels à ces mêmes objets. Notons qu'il faut entendre là institution en un sens large qui ne se réduit pas à institution scolaire. Un élève est ainsi soumis à de nombreuses institutions comme sa famille, et au-delà d'elle une culture, sa classe d'âge, diverses institutions extra-scolaires, son histoire, son passé scolaire... Parmi les objets institutionnels qui ne sont pas des objets de savoir, il y a entre autres, l'objet "savoir" ou "connaître" et aussi les objets "être élève" "être enseignant". On peut alors parler de "l'idonéité" (ou non) d'un rapport personnel à un rapport institutionnel à propos d'un objet de savoir ou d'un autre objet institutionnel. Ainsi, nos observations nous laissent penser que beaucoup d'élèves en difficulté ont un rapport au savoir et un rapport au métier d'élève qui ne sont pas idoines aux rapports institutionnels correspondants (dans l'institution scolaire).

Il fait remarquer que le rapport institutionnel n'existe que parce qu'il existe un certain nombre de rapports personnels qui lui sont suffisamment idoines mais qu'il n'est le rapport personnel d'aucun individu particulier. On peut donc penser que le rapport personnel du maître est lui-même plus ou moins idoine au rapport institutionnel pour sa position d'enseignant. Par ailleurs, le plus souvent le rapport personnel de l'élève à un objet institutionnel n'est confronté au rapport institutionnel que par l'intermédiaire du rapport personnel du maître, il nous semble donc que ce qui apparaît au niveau de la relation didactique proprement dite, c'est l'idonéité (ou non) du rapport personnel de l'élève au rapport personnel du maître au rapport institutionnel à un certain objet de savoir, ou autre objet institutionnel.

Ce que nous entendons par "représentations métacognitives" (chapitre 4) peut, en partie, s'interpréter dans cette théorie : il s'agit pour nous d'un regroupement de certains rapports personnels à des objets institutionnels qui ne sont pas des objets de savoir : principalement la nature de l'activité mathématique, le rôle des mathématiques dans la société, leur rôle dans la formation des élèves, en un mot l'objet de l'enseignement des mathématiques, ce qu'il convient d'enseigner, comment on peut apprendre les mathématiques, comment il faudrait les enseigner, et aussi des objets plus généraux comme le savoir, l'apprentissage, le métier d'élève, l'école... Ces objets sont des objets considérés par l'institution scolaire et pour lesquels existe un rapport institutionnel. Les rapports personnels des acteurs du système didactique à ces objets ont donc toutes les chances d'avoir des effets didactiques.

Cependant, la théorie de Chevallard laisse beaucoup d'ombre sur le mode de génération des rapports personnels. Certes, le rapport personnel d'un individu à un certain objet se constitue sous la pression des différents rapports institutionnels relatifs à cet objet, à la place qu'y occupe l'individu en question, dans les diverses institutions auxquelles il est assujetti - on peut ainsi considérer la personne comme la résultante de ses divers assujettissements institutionnels. Mais Chevallard ne nous dit rien des hiérarchies qui peuvent exister entre ces assujettissements. Il est clair que, pour un individu et un objet donnés, toutes les institutions concernées n'ont pas le même poids. Celui-ci dépend probablement du temps qu'occupe l'institution dans la vie actuelle de l'individu, de l'investissement affectif qu'elle occasionne, de l'ancienneté de l'assujettissement, de l'ordre dans lequel les assujettissements ont eu lieu. Des modifications de rapport institutionnel ou des assujettissements nouveaux vont avoir des effets sur les rapports personnels des individus concernés. Mais il se peut par exemple qu'un premier rapport personnel lié à un rapport institutionnel ancien reste bien ancré et peu modifié par des assujettissements nouveaux qui auraient été déterminants s'ils étaient arrivés les premiers.

La théorie de la représentation sociale

Si nous retenons de la théorie de la représentation sociale le modèle de l'organisation avec un noyau central et des éléments périphériques, nous pouvons considérer que chaque rapport personnel est ainsi structuré et que des modifications dans les rapports institutionnels auxquels est exposé un individu vont occasionner en priorité des modifications dans les éléments périphériques des rapports personnels correspondants de façon à rétablir une cohérence aux moindres frais. Par ailleurs la modification d'un rapport personnel à un certain objet institutionnel, objet de savoir ou non, entraîne en général des modifications dans les rapports personnels à d'autres objets. On pourrait alors imaginer une structuration en réseau pour les rapports personnels : ceux qui touchent le plus près à la personnalité, à la représentation du monde, installés le plus anciennement ayant une position centrale, les autres venant s'imbriquer en des éléments plus ou moins périphériques. On aurait ainsi une structuration qui ressemblerait un peu à un fractal, chacun des rapports personnels étant lui-même structuré avec son noyau central et ses éléments périphériques.

Le rapport à un objet est un produit mais c'est en même temps un élément organisateur et structurant pour les rapports aux objets nouveaux et modifiés. Le rapport personnel correspondrait ainsi à une différenciation en éléments plus fins de la représentation sociale considérée à la fois comme produit et comme processus. Le regroupement de certains rapports personnels à des objets institutionnels que nous avons fait sous le nom de représentations métacognitives se justifie s'il s'avère que ces rapports sont suffisamment liés pour qu'une modification sensible de l'un d'eux entraîne une modification sensible des autres. Ce serait une espèce d'interface entre le domaine cognitif où se situent les rapports à des objets de savoir et le domaine affectif.

Si on considère le rapport personnel aux mathématiques d'un individu, il peut avoir une position plus ou moins périphérique relativement à la représentation du monde de l'individu. Il sera ainsi plus ou moins facilement modifié. Le rapport institutionnel aux mathématiques de toutes les institutions auxquelles est assujetti l'individu, pour peu que les mathématiques soient un objet considéré dans la dite institution, intervient dans la constitution et l'évolution du rapport aux mathématiques de l'individu. L'influence de ces différents rapports va dépendre de ce qu'on pourrait appeler le degré d'assujettissement. Ainsi un enseignant d'université sera davantage assujetti à la communauté des mathématiciens qu'un professeur de 6ème. Il dépend aussi de l'ancienneté de cet assujettissement et de la charge affective conjointe. Le rapport aux mathématiques des élèves, surtout s'ils sont jeunes, est très largement modifiable et donc très influencé par celui du professeur. Ce caractère labile apparaît dans les études sur les représentations métacognitives des élèves d'A. Robert et E. Bautier (cahier 41). Cependant, on peut penser que les rapports à un certain nombre d'objets, considérés ou non par l'école mais qui sont pertinents par rapport à l'objet apprendre, ont des positions plus centrales, et sont donc moins facilement modifiables.

Le concept d'habitus

La notion de représentations métacognitives a aussi une certaine parenté avec le concept d'habitus introduit par Bourdieu comme *"systèmes de dispositions durables, structures structurées prédisposées à fonctionner comme structures structurantes, c'est-à dire en tant que principe de génération et de structuration de pratiques et de représentations qui peuvent être objectivement "réglées" et "régulières" sans être en rien le produit de l'obéissance à des règles, objectivement adaptées à leur but sans supposer la visée consciente des fins et la maîtrise des opérations nécessaires pour les atteindre et, étant tout cela, collectivement orchestrées sans être le produit de l'action organisatrice d'un chef d'orchestre".* Ainsi on peut considérer que les pratiques professionnelles des professeurs quand ils gèrent leur classe correspondent assez bien à la caractérisation qu'il donne des pratiques générées par habitus. La stabilité des pratiques s'explique ainsi par le fait que les habitus ont tendance à reproduire les conditions qui sont à l'origine de leur production et sont eux-mêmes renforcés par la pratique. *"Lors même qu'elles apparaissent comme déterminées par le futur, c'est-à-dire par les fins explicites et explicitement posées d'un projet ou d'un plan, les pratiques que produit l'habitus en tant que principe générateur de stratégies permettant de faire face à des situations imprévues et sans cesse renouvelées, sont déterminées par l'anticipation implicite de leurs conséquences, c'est-à dire par les conditions passées de la production de leur principe de production, en sorte qu'elles tendent toujours à reproduire les structures objectives dont elles sont en dernière analyse le produit."* (Bourdieu 1972).

La notion d'habitus nous semble assez bien convenir pour modéliser ce qui concerne une partie de la pratique professionnelle de gestion de la classe qui ne fait pas intervenir le contenu et qui concerne des décisions à prendre dans des situations qui n'ont pas été explicitement prévues. Nous sommes alors dans des conditions telles que les réponses ne pourraient être fournies que par des habitus puisque, comme l'indique Bourdieu (1972) *"(les réponses de l'habitus) se définissent d'abord par rapport à un champ de potentialités objectives, immédiatement inscrites dans le présent, choses à faire ou à ne pas faire, à dire ou à ne pas dire, par rapport à un à venir qui (...) se propose avec une urgence et une prétention à exister excluant la délibération"*. Les représentations métacognitives comprendraient ainsi un habitus et une composante plus rationalisée concernant la discipline elle-même qui serait mieux modélisée par le concept de rapport au savoir.

5. Au sujet de la méthodologie

5.1. Les entrées "élèves en difficulté" et "milieu social"

Au cours de ce travail, nous avons utilisé fréquemment les termes "d'élèves en difficulté" ou "élèves de milieu social défavorisé" avec le risque de laisser croire que nous confondions les deux. Ce n'est bien sûr pas du tout le cas. Nous savons qu'il y a fort heureusement des élèves de milieu défavorisé qui réussissent à l'école et qu'on peut trouver des élèves en difficulté dans les milieux favorisés. Mais le cas qui nous a principalement occupée est celui des enfants de milieu défavorisé qui ont des difficultés à l'école. Une des raisons en est que ces enfants se trouvent souvent, du fait de l'inégalité géographique du recrutement, regroupés dans des classes où ils sont majoritaires, ce qui, selon nous, contribue à amplifier le phénomène. On nous objectera peut-être qu'en se plaçant dans des conditions aussi complexes, nous risquions de ne rien voir. Nous nous sommes déjà expliquée sur ce point dans le premier chapitre. Rappelons qu'à notre avis, cette complexité est inévitable parce que certains des phénomènes que l'on observe dans ces classes ne peuvent s'observer ailleurs, soit parce qu'ils n'existent pas (effet de nombre), soit parce que les élèves en difficulté s'expriment moins dans une "bonne classe".

Cela explique aussi pourquoi nous ne nous sommes pas intéressée aux résultats des élèves dans les autres matières. Nous avons plutôt tenté d'analyser le fonctionnement des élèves et de l'enseignant dans de telles classes de mathématiques. C'est donc un taux d'échec de la classe que nous avons considéré, en prenant comme critère l'âge des élèves avant de regarder l'échec de tel ou tel élève.

Nous n'avons pas non plus cherché à définir précisément ce qu'est un élève en difficulté en mathématiques à un niveau donné, nous contentant sur ce point d'un indice global, le retard scolaire, puisqu'en fait ce sont plutôt des classes que nous voulions observer. Ceci ne nous a bien entendu pas empêchée de repérer et d'analyser les échecs ponctuels sur tel ou tel objet d'enseignement.

5.2. Recherche expérimentale et théorisation.

Il s'agissait dans cette thèse d'une recherche exploratoire, nous n'avons donc pas cherché à déployer des moyens d'observation très sophistiqués : nous risquions d'être noyée sous des masses d'informations que nous aurions été incapable d'exploiter. Il s'agissait pour nous de problématiser des premières questions naïves, une observation rudimentaire était suffisante pour cela. Par la suite, nous avons étudié quelques-unes des questions soulevées, concernant les représentations des enseignants et des élèves notamment, en nous donnant des moyens plus fiables de recueil des données.

Nous avons procédé de façon relativement empirique et c'était à notre avis inévitable pour un travail de ce type. En effet, s'il existait un certain nombre de travaux sur l'échec scolaire, le domaine du fonctionnement en mathématiques de "classes faibles" était encore peu exploré. Notre cadre théorique de départ nous permettait de faire certaines hypothèses concernant des possibilités d'amélioration de l'apprentissage de ces élèves mais il ne permettait pas de prévoir les difficultés que nous avons rencontrées pour réaliser une expérimentation qui mette en œuvre ces hypothèses. Il ne nous restait comme alternative à l'abandon pur et simple qu'à faire une étude empirique des données, a posteriori, en cherchant éventuellement à compléter notre cadre théorique pour considérer des questions que nous avions laissées jusque là hors de notre champ d'investigation et recueillir de nouvelles données qui s'y rapportent. C'est ce que nous avons fait à propos des représentations des enseignants, notamment par des entretiens. Le recours à la théorie de la représentation sociale nous a donné un cadre général, avec la notion de noyau central par exemple, mais pour analyser les représentations à propos des mathématiques, nous ne disposions que de peu de catégories a priori, la plupart n'ont pu être définies qu'a posteriori.

Si une théorie se révèle insuffisante pour prévoir ou expliquer certains faits qui semblent pertinents dans le champ considéré, on est conduit à les étudier par d'autres moyens avant de rechercher un affinement éventuel de la théorie qui tienne compte de ces faits et qui maintienne cependant la cohérence de la théorie. Précisons toutefois que notre travail ne conduit pas à une remise en cause de notre cadre théorique de départ qui nous a été indispensable pour recueillir les observations qui ont servi à la suite de notre réflexion.

La théorie des situations modélise l'élève comme un sujet épistémique, ce qui nécessite certaines réductions, comme dans toute théorisation. En nous plaçant dans des conditions limite, nous nous trouvons dans le cas où certaines hypothèses faites sur le sujet ne sont plus suffisamment vérifiées. Cela peut permettre de voir, amplifiés, certains phénomènes qui sont peut-être valables aussi pour le sujet épistémique. Cela amène par exemple à poser la question de la place à faire dans la théorie pour des différences entre élèves ou entre enseignants.

5.3. Observation naturaliste de classe et ingénierie didactique

Nous avons utilisé, pour la deuxième partie, une méthode intermédiaire entre l'observation "naturaliste" et l'ingénierie didactique. En effet, d'une part, il est difficile de faire une observation purement naturaliste ne serait-ce que parce que l'observation elle-même perturbe le fonctionnement ordinaire de la classe et aussi parce que l'enseignant attend une aide et un engagement du didacticien —surtout dans le cas où ce dernier est lui-même professeur de mathématiques— dans l'élaboration des séquences d'enseignement. De plus, on peut difficilement observer de telles classes sans venir avec un projet d'amélioration, et c'est bien avec cette idée que nous avions démarré la recherche. D'autre part, il s'est avéré qu'il y avait une certaine incompatibilité entre les principes qui sous-tendent une ingénierie didactique construite en référence à la théorie des situations et les conceptions des professeurs sur l'apprentissage et leur fonction d'enseignant (voir chapitre 6). Nous avons, dans un article rédigé avec M. Artigue[19], relevé les points essentiels sur lesquels elle se manifestait : statut de l'erreur, continuité des apprentissages, activité de l'élève, ce qui ne s'identifie pas du tout à recherche de l'élève. La réalisation d'un compromis entre les projets du chercheur et ceux de l'enseignant est donc obligatoire dès qu'on envisage une expérimentation sur le long terme, toute une année, voire plus.

Même si nous employons parfois les mots "expérience" ou "expérimentation" pour parler de notre travail, il s'agit plutôt d'un objet intermédiaire entre observation et expérimentation : à partir d'une ingénierie didactique construite à l'avance, nous apportons nous-mêmes certaines modifications a priori en collaboration avec l'enseignant, et celui-ci apporte de fait d'autres modifications dans la réalisation effective. La méthode, prévue au départ pour tester des hypothèses relatives à l'apprentissage des élèves en situation de classe devient un moyen d'étudier le fonctionnement de l'enseignant et plus généralement du système par l'analyse des distorsions entre le fonctionnement prévu et le fonctionnement réel.

L'utilisation de telles ingénieries didactiques dans les conditions où nous l'avons fait comporte un risque, et nous avons à plusieurs reprises vérifié qu'il était bien réel : celui de dénaturer complètement la situation dans la transmission et d'obtenir parfois un effet inverse de celui qui était visé. On arrive ainsi parfois à perturber le fonctionnement de l'enseignant et à consommer du temps sans bénéfice pour l'apprentissage des élèves.

Mais, pour étudier des phénomènes de classe dans un domaine peu exploré comme celui qui nous a occupée ici, il est cependant utile de disposer de travaux d'ingénierie didactique déjà éprouvés dans des conditions plus classiques. Il était en effet très important pour nous d'avoir auparavant expérimenté les situations dans d'autres classes ce qui nous assurait de la viabilité de ces situations et nous donnait des moyens de préciser les conditions de cette viabilité ou des conditions pour leur transmission.

Quand on réalise une ingénierie didactique, par exemple comme celle des aires exposée en première partie, on a en général un double objectif :

- à plus ou moins long terme produire des séquences qui permettent d'enseigner un contenu avec un sens le plus proche possible de celui qu'il a dans le savoir savant ; dans cette perspective le rôle de l'enseignant doit être le plus possible contrôlé : il s'efface le plus possible derrière les variables de la situation
- dans l'immédiat de la recherche, on conçoit des séquences, le mieux possible selon les critères précédents, à l'aide d'une analyse a priori ; en réalisant ces séquences en classe et en observant leur déroulement, on espère non seulement valider ou invalider l'analyse a priori mais aussi apprendre sur le fonctionnement didactique du contenu considéré, du côté des élèves, du côté du savoir et du côté de l'enseignant, par les écarts entre le déroulement prévu et le déroulement réel.

[19] L'ingénierie didactique, méthodologie de recherche et produit de développement : quelques problèmes théoriques liés à cette dualité. Présentation de M. Artigue au Congrès TME, Mexico, juillet 1990. Une version en anglais est parue en fev. 1991 dans *For the learning.*

Avec le premier objectif, on se place d'une certaine manière dans la perspective de l'enseignement tel qu'il devrait être. Cette optique peut être dangereuse d'une part parce qu'elle risque de faire perdre de vue aux chercheurs certaines contraintes du système —surtout si elle porte sur un domaine restreint— d'autre part elle risque de s'exporter trop facilement hors de la communauté des chercheurs, sans garantie suffisante sur les conditions de la transmission, mais elle est incontournable. En effet, le didacticien, après d'éventuelles études préalables, a besoin de tester ses propres conceptions et hypothèses sur l'enseignement de la notion considérée. Pour qu'il sache quelles hypothèses il teste, il a besoin de contrôler le mieux possible les interventions de l'enseignant et donc de le faire disparaître derrière la situation : il privilégie l'étude des rapports élève - savoir - milieu avant de prendre en compte l'enseignant. Ce contrôle du rôle de l'enseignant est aussi une des conditions de transmissibilité de l'ingénierie didactique : il faut arriver à donner des conditions pour que se reproduise le sens des situations et non leur histoire. La problématique de l'ingénierie didactique a de plus permis de construire des outils pour l'analyse des situations qui sont utilisables bien au-delà de l'ingénierie didactique, par exemple pour analyser des manuels ou des séquences qui relèveraient d'une observation "naturaliste".

Toutefois, si on se place dans des conditions réelles, c'est-à-dire dans une problématique d'étude de l'enseignement tel qu'il est, on ne peut plus négliger l'enseignant, qui va intervenir en fonction de l'analyse qu'il fait de la situation et des objectifs qu'il se donne. Mais passer par la première étape est une manière de découper l'objet d'étude : concevoir des ingénieries didactiques est un moyen de forger des outils d'analyse et disposer d'ingénieries didactiques très contraintes donne un moyen d'accès au fonctionnement réel du système par l'étude des perturbations qui lui sont apportées.

6. Perspectives.

Nous avons déjà dégagé des pistes de réflexion didactique dans le paragraphe 3. Nous allons maintenant envisager des recherches qui seraient des prolongements naturels de notre travail, que nous avons d'ailleurs commencé à entreprendre. Nous distinguerons deux directions : l'enseignement aux élèves en difficulté et l'étude des fonctions de l'enseignant. Dans ces deux directions, on poursuit un double objectif : d'une part vérifier si les effets de certaines actions sont conformes aux attentes qu'on peut avoir dans l'état actuel de l'avancement de la recherche, et préciser des conditions qui déterminent ces effets ; d'autre part, confronter les résultats des observations à la théorisation en didactique des mathématiques, questionner cette théorisation et contribuer par là à la développer. L'étude des situations de rappel par exemple implique un travail sur ces deux niveaux.

6.1. L'enseignement aux élèves en difficulté.

6.1.1. Nouvelles hypothèses

Les recherches que nous avons menées pour cette thèse nous amènent à faire l'hypothèse que la genèse et l'accumulation des difficultés que rencontrent certains élèves est surtout à mettre en relation avec des dysfonctionnements du contrat didactique qui se situent principalement dans le double processus de dévolution et d'institutionnalisation, notamment au niveau de l'enjeu même de l'enseignement des mathématiques. Cette hypothèse n'est pas vraiment nouvelle, ainsi énoncée, mais elle se traduit de façon plus précise en objectifs pour les élèves et en moyens didactiques à mettre en œuvre dans l'enseignement. Nous indiquerons le moment venu les hypothèses plus précises que nous sous-entendons ici. De plus, cette hypothèse générale s'accompagne d'un élargissement et d'un déplacement du champ d'investigation qui consiste à donner une place importante au rapport de l'enseignant au savoir en jeu (mathématiques en général, contenu précis...) dont l'étude est inséparable de celle du reste du contrat didactique.

6.1.2. Traduction en objectifs pour les élèves

Les analyses que nous avons faites, dans le paragraphe 2 notamment, nous amènent à avancer certains objectifs prioritaires, particulièrement dans le cas de l'enseignement à des classes composées majoritairement d'élèves "faibles" :

- faire dévolution d'un enjeu général à travers des enjeux plus ponctuels,
- favoriser la création de représentations mentales de l'action permettant un début de décontextualisation, et pour cela donner aux élèves plusieurs occasions de les construire,
- favoriser le travail personnel des élèves, notamment le travail à la maison,
- et pour cela viser à ce qu'ils soient capables d'utiliser le manuel,

- rendre possible et développer des formes de communication et d'interactions entre élèves, dans le travail collectif ou en groupes,
- faire évoluer leur rapport à l'évaluation pour le rendre plus compatible avec un fonctionnement scientifique.

6.1.3. Moyens didactiques envisagés

La formulation de ces objectifs s'accompagne de la conception de moyens destinés à les atteindre —ou au moins dont l'état actuel de nos recherches nous permet de penser qu'ils pourraient nous aider à les approcher. Ces moyens ont été parfois envisagés dans le cas d'un enseignement à un classe composée presque exclusivement d'élèves faibles. Ceci ne signifie pas que nous faisons l'hypothèse que ces élèves ont plus de chance d'apprendre dans ces conditions, nous aurions plutôt tendance à faire l'hypothèse contraire parce que nous pensons que les élèves apprennent aussi avec leurs pairs. Cependant d'une part ces classes existent, parfois pour des raisons de carte scolaire aggravées par un phénomène d'évitement des écoles défavorisées par les élèves de milieu favorisé, d'autre part nous pensons que les moyens que nous envisageons ici sont utilisables dans toutes les classes, avec peut-être un regroupement à certains moments des élèves plus faibles en séances dites de soutien.

- construction de situations a-didactiques avec un degré de complexité optimal

Au départ de cette recherche, nous faisions l'hypothèse que les situations qu'on propose aux élèves pour démarrer l'apprentissage d'une notion ou l'approfondir notablement, devaient être assez riches et complexes pour que cette notion se construise avec du sens et que la situation puisse servir de référence dans d'autres problèmes. La tendance des élèves à rechercher très vite des règles et des algorithmes nous confirme dans cette hypothèse. Cependant, il faut que cette complexité soit gérable par les élèves et nous devons tenir compte de 2 facteurs qui tendent à en limiter les possibilités : la difficulté de faire collaborer les élèves au sein d'un travail en groupes et la lassitude qui se fait sentir assez vite et empêche souvent de mener à son terme le déroulement prévu. Il faut donc prévoir une évolution dans la complexité des situations utilisées en fonction de l'évolution des possibilités de travail en groupes et d'échanges collectifs : au début des situations suffisamment complexes pour nécessiter une recherche des élèves mais assez courtes pour tenir sur une séance ou deux ; à mesure que l'évolution de la socialisation et de l'autonomie des élèves le permet, on pourra aborder des situations plus complexes et plus longues.

- articulation vie réelle - conceptualisation en mathématiques.

Un des moyens de motivation des élèves est de s'appuyer sur des contextes issus de la réalité concrète. C'est particulièrement vrai pour des élèves qui sont d'une part préoccupés de l'utilité de ce qu'ils apprennent et qui, d'autre part, ramènent l'utilité à l'utilisation dans la vie professionnelle ou quotidienne. Cependant, il y a dans ce cas à faire une modélisation, ce qui demande en particulier de trier ce qui, dans le contexte, va faire l'objet d'un traitement mathématique et ce qui va y échapper. Le fait de considérer ce passage comme naturel et évident contribue à créer des malentendus entre l'enseignant et l'élève qui ne se placent pas au même niveau de traitement du problème.

Nous n'avons pas eu jusqu'à présent le loisir d'étudier les expériences qui ont lieu en Italie et qui utilisent l'articulation avec le réel comme un moyen de conceptualisation en mathématiques. Il est dans nos projets d'approfondir cette question pour voir comment on peut provoquer des questionnements en s'appuyant sur l'expérience des enfants. Signalons cependant que la recherche de situations dans la vie réelle ne nous semble pas une nécessité pour cela : nous pensons en effet qu'on peut progressivement construire une réalité à l'intérieur même des mathématiques, même pour des enfants assez jeunes, et c'est d'ailleurs un des objectifs que nous visons.

- intervention d'ordre métamathématique.

Nous avons souligné l'absence de projet général de certains élèves et l'attitude inadaptée qu'ils ont vis à vis des problèmes et des mathématiques en général. Nous pensons qu'il est possible d'avoir une intervention explicite à ce niveau, même avec des élèves assez jeunes, à condition qu'elle s'accompagne d'explicitations dans des situations précises. Dans l'expérimentation qui a eu lieu en 6ème pendant l'année scolaire 1988-1989, nous avons utilisé une heure de cours pour faire une intervention un peu solennelle de ce genre. La forme expérimentée là pour des raisons conjoncturelles n'est sans doute pas en général la plus adaptée, mais il nous paraît important d'aborder explicitement avec les élèves le contenu que nous voulions faire passer ce jour là et que nous rappelons ici très brièvement :
- nous pensons que vous pouvez réussir en mathématiques,
- pour résoudre un problème, il faut se servir de ce que l'on sait faire. Il y a en général plusieurs méthodes pour arriver à la solution et on peut avancer sur le chemin de la solution sans avoir tout résolu,
- en faisant un problème de mathématiques, on a le droit de réfléchir, on a le droit de faire des dessins, des essais...
- on peut avoir des moyens de savoir si ce qu'on dit est juste sans demander au professeur,

- en s'y mettant à plusieurs, on peut parfois réussir à résoudre des problèmes plus difficiles qu'aucun ne saurait résoudre seul,
- tout le monde peut se tromper, même les gens qui sont très forts en mathématiques. L'important est de comprendre pourquoi on s'est trompé : on peut aussi apprendre quelque chose de ses erreurs,
- on ne trouve pas toujours du premier coup. D'ailleurs les mathématiciens ont mis longtemps pour résoudre certains problèmes. Il y en a même que vous pouvez comprendre et qui ne sont pas encore résolus,
- quand on résout un problème de mathématiques, on apprend souvent des choses qui peuvent servir dans d'autres problèmes. Pour cela, il faut se demander ce que l'on a appris de nouveau.

- organisation de situations de rappel.

Nous avons analysé dans le paragraphe 3 ce qui pouvait se jouer pour les élèves dans ce type de situations. Rappelons les éléments qui nous paraissent essentiels :

- faire une place explicite dans l'enseignement à la construction d'images mentales et de représentations symboliques de l'action en ménageant des phases où les élèves doivent évoquer en racontant ou en faisant des schémas, des dessins, une situation d'action qu'ils ont déjà vécue : cela leur permet de se reposer le problème et de réinventer la solution, surtout s'ils ne l'ont pas trouvée eux-mêmes la première fois. On se heurte bien sûr là à la difficulté de formulation que rencontrent beaucoup d'élèves en difficulté et il se peut qu'ils aient retenu davantage d'une situation que ce qu'ils sont capables d'en dire mais il n'est pas sûr que ce qu'ils retiennent soit utilisable longtemps s'ils ne sont pas capables d'en parler. De plus, c'est un moyen de
- travailler le langage et la formulation qui sont des facteurs de réussite importants dans le système scolaire,
- commencer la décontextualisation et l'institutionnalisation progressives des connaissances,
- continuer après coup la dévolution de l'enjeu de la situation.

Elles doivent pouvoir se dérouler sur un temps assez court (un quart d'heure, peut-être moins au début de l'année) pour ne pas épuiser les capacités d'attention des élèves

- autres aides à l'organisation et à la mémorisation des connaissances des élèves.

Les situations de rappel sont un élément important d'organisation des connaissances des élèves et de mémorisation, notamment parce qu'elles peuvent porter sur un passé plus ou moins proche et plus ou moins étendu. Elles peuvent porter sur la séance précédente, sur tout ce qui a été fait jusque là sur un thème comme les taxis ou les aires. On peut passer de ce qu'on a fait à ce qu'on appris en reparlant à la fin d'un apprentissage ou même après de tout ce qu'on sait sur la symétrie orthogonale par exemple.

Dans le travail mené en 6ème en collaboration avec D. Butlen, nous avions envisagé de compléter l'aide à la mémorisation apportée par ces phases par d'autres moyens comme la constitution d'affiches qui illustrent des points à retenir et la constitution d'un cahier de la classe dont chacun est responsable à tour de rôle. Nous avions par exemple encouragé les élèves à réaliser des affiches sur les triangles particuliers, sur les graphiques représentant les tarifs des différents taxis... Ces affiches réalisées avec soin à la maison sont aussi un moyen de valoriser les élèves autrement que par une note. Le cahier où chacun écrit à tour de rôle ce qu'on a fait et appris dans la séance est aussi pour le professeur un moyen de se faire une idée de l'enjeu pour les élèves des situations traitées.

- aide au travail personnel

Les élèves ne pourront apprendre que s'ils s'investissent personnellement et prennent à leur charge une partie de l'apprentissage. Une grande partie de cet investissement se fait dans le travail en classe mais le travail personnel continue hors de la classe, dans le travail à la maison. Beaucoup de collèges mettent en place des structures d'aide au travail à la maison. Cela peut sans doute être une manière d'encourager le travail personnel des élèves à condition que cette aide soit conçue avec un souci de rendre les élèves autonomes pour qu'ils puissent se passer ensuite du professeur et non, conformément à ce qu'attendent beaucoup d'élèves, comme une aide à faire les devoirs pour qu'ils soient réussis. Cette condition ne peut être remplie que si on attend en classe aussi un travail personnel de l'élève. L'aide organisée au travail à la maison peut cependant être un moyen d'amorcer l'investissement personnel de l'élève en lui montrant qu'il peut faire quelque chose seul et qu'il est à sa charge d'apprendre tout en lui donnant la sécurité de pouvoir demander de l'aide au besoin.

Nous avons constaté que les élèves n'utilisent pas le manuel et ne savent pas l'utilser. Une piste de travail serait d'utiliser le manuel en classe quand les notions étudiées sont déjà suffisamment décontextualisées, au moment du cours, ce qui permettrait d'alléger les notes de cours pas toujours bien prises. On pourrait aussi rechercher des informations dans le manuel sur des leçons déjà traitées.

- ***aide à la socialisation***

Nous avons déjà parlé des difficultés de mise en place dans certaines classes de collaboration entre élèves dans du travail en groupe. Il paraît alors nécessaire d'initialiser ce type de travail quand les élèves ne sont pas en classe entière, par exemple au cours de séances de soutien, ou dans des tâches relativement courtes et comportant un objectif commun bien défini.

- ***mise en place d'une évaluation adaptée.***

Nous avons constaté l'importance des notes pour les élèves que nous avons observés. L'évaluation chiffrée pose des problèmes particuliers dans une classe où l'ensemble des élèves a un niveau faible : d'une part il faut avoir des critères adaptés aux objectifs qu'on se fixe et qui ne peuvent pas être les mêmes que dans une classe "forte", d'autre part on ne peut noter sans tenir aucun compte des exigences qu'on a dans les autres classes de même niveau d'enseignement, sinon les élèves et les parents ne comprendraient pas les décisions d'orientation de fin d'année. Pour une telle classe, il faudrait donc prévoir une double évaluation : d'une part une évaluation sur l'acquisition des contenus qui permette à l'élève de mesurer ses progrès, d'autre part, une évaluation normative classique qui porte éventuellemnt sur plusieurs classes.

De plus, il faut pouvoir évaluer non seulement les progrès sur le contenu mais aussi l'investissement des élèves, les méthodes utilisées, l'entrée dans le contrat didactique en quelque sorte. Un des problèmes des élèves en difficulté est de ne pas utiliser au mieux leurs connaissances dans les évaluations écrites parce qu'ils ne savent pas lire les indications qui leur sont données entre les lignes...

- ***collaboration avec les autres disciplines.***

Une collaboration entre les différentes disciplines paraît importante parce que les problèmes de ces élèves, du moins au niveau scolaire considéré, se retrouvent dans la plupart des disciplines. Cependant, elle ne peut se faire valablement que si on a suffisamment avancé la recherche dans chaque discipline, même si des thèmes de travail peuvent être choisis en commun et si on peut relier le traitement d'une même notion dans des disciplines différentes.

6.1.4. Méthodologie d'observation.

Aux méthodes d'observation déjà utilisées, nous pensons en ajouter une autre que nous avons expérimentée avec J. Robinet pendant l'année scolaire 1989-1990. Nous avons travaillé avec des élèves volontaires hors de la classe. Cette activité était présentée comme une aide aux élèves, ce qu'elle était réellement d'ailleurs, et la désignation des élèves se faisait en accord avec le professeur, parmi des volontaires qui s'engageaient à venir au moins 3 ou 4 semaines de suite. Nous faisions travailler les élèves soit seuls dans une première période de diagnostic, soit par groupes de 2 ou 3. Cette méthode permet une observation à la fois plus souple et plus précise des élèves que l'observation en classe et elle limite les perturbations apportées par le didacticien dans la classe.

6.2. Etude de l'enseignant et de l'institutionnalisation.

L'autre direction de recherche que nous pensons approfondir est celle du rôle de l'enseignant. Le travail avec des élèves en difficulté est d'ailleurs un bon observatoire pour cela parce qu'il a plus de conséquences qu'avec des élèves qui rentrent d'eux-mêmes dans une problématique mathématique.

Les moyens d'étude du rôle du maître

Pour étudier le rôle du maître, déterminer les marges de manoeuvre dont il dispose réellement et l'utilisation qu'il en fait, il est nécessaire de prendre en compte ses déclarations sur ce qu'il fait, ses choix et de les mettre en relation avec les choix effectifs qu'il fait en classe en étudiant en particulier :

- *les situations choisies avec l'organisation de la classe correspondante,*
- *la conduite de la classe* : ses prises de parole, sa manière de donner la parole aux élèves (à qui, à quel moment)
- *les différents types et niveaux de discours utilisés par le maître et par les élèves.*

Les différents niveaux de discours du maître sont inégalement présents dans une séquence d'enseignement. Leur nature et leur importance dépendent à la fois des représentations métacognitives du maître, des élèves qu'il a en face de lui, de la situation, du contenu mathématique.

- *les choix en matière d'évaluation*

Il est important de prendre en compte aussi les déclarations des élèves sur les notions enseignées aussi bien que sur les méthodes de travail, l'importance relative des unes et des autres, pour avoir une idée de l'impact, selon les élèves, des choix de l'enseignant.

L'analyse des choix du maître, de la cohérence entre ses choix et ses déclarations permet d'avoir des renseignements sur les diverses composantes de ses représentations métacognitives (rapport au savoir enseigné, représentations sur la manière d'apprendre et d'enseigner) composées avec ses représentations sur les élèves auxquels il s'adresse. Cela permet aussi de dégager des lignes générales sur les contraintes et les possibilités de choix des enseignants.

Notre projet

Nous prévoyons d'étudier plus particulièrement le rôle du maître à travers les situations de rappel. Nous avons en effet souligné, lors de la description de ces situations, la place importante qu'y occupait le maître puisqu'il s'y déroule une phase importante du processus d'institutionnalisation. Nous comptons étudier la manière dont il donne la parole aux élèves, ce qu'il reprend du discours des élèves, comment il le transforme, et les différents niveaux de discours qu'il utilise ainsi que les marqueurs de ces niveaux de discours. Nous pensons également rechercher si ce fonctionnement dépend du contenu enseigné (géométrie et algèbre ou calcul par exemple), du niveau scolaire des élèves (6ème, 3ème) et du niveau de la classe (forte ou faible).

Nos deux directions de recherche : côté élèves en difficulté, côté enseignant nous paraissent très imbriquées et nous pensons que les résultats que nous pourrons obtenir dans ces conditions nous apprendront sur le rôle de l'enseignant en général parce qu'en didactique comme ailleurs, il n'est pas rare d'apprendre sur le fonctionnement d'un système en observant les endroits où il a du mal à fonctionner.

Références bibliographiques de la deuxième partie.

ABRIC Jean-Claude (1987) *Coopération, compétition et représentations sociales* Ed. Del Val, Cousset, Suisse

ADDA J. (1976) : *Travaux sur les difficultés inhérentes aux mathématiques et sur les phénomènes d'incompréhension.* Thèse d'Etat, Université Paris 7.

ADDA J. (1980) : *Quelques aspects de la relation aux mathématiques chez les enfants en situation d'échec scolaire dans l'enseignement élémentaire.* Colloque sur "Langage et acquisitions", Mons, Belgique.

ADDA J. (1982) : L'incompréhension en mathématiques et les malentendus. *Educational studies in mathematics.*

A.P.M.E.P. *Bulletin* numéros 251 (janv.1966), 300 (sept.1975)

A.P.M.E.P. (1974) Dictionnaire, fiches sur fractions, rationnels.

G. ARSAC (1989) : Le rôle du professeur - aspects pratiques et théoriques. *Cahiers du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique,* Grenoble, Ed. IMAG.

M.ARTIGUE (1984) : *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 7.

M.ARTIGUE (1990) : Congrès T.M.E., Mexico, juillet 1990.

M.ARTIGUE et M.J.PERRIN-GLORIAN (1991) Didactic engeneering, research and development tool : some theoritical problems linked to this duality. *For the learning of Mathematics* n° 11.1 (fev.) p.13-17.

M.ARTIGUE et J. ROBINET (1982) Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des mathématiques* n° 3.1, p. 5-64, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BALACHEFF N. (1988) *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège* Thèse d'Etat Université de Grenoble 1.

S. BARUK (1985) : *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques.* Ed. du Seuil, Paris.

E. BAUTIER et B. CHARLOT (1990) : article dans *Migrants formation*

E. BAUTIER et A. ROBERT (1987) : Apprendre des mathématiques et comment apprendre des mathématiques : premiers éléments pour une étude des représentations des élèves de l'enseignement post-obligatoire de l'accès au savoir mathématique. *Cahier de didactique des mathématiques* n°41, IREM Paris 7.

E. BAUTIER et A. ROBERT (1988) : Réflexions sur le rôle des représentations métagnotives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de pédagogie* n°84 p.13-19, INRP, Paris.

BOERO P. (1989) : Mathematical literacy for all experiences and problems *Actes du colloque PME,* Paris, juillet 1989, p. 62-76.

BOERO P. et collectif (1989) : *Rapporto tecnico su : perimentazione e revisione di un piano di lavoro triennale per l'insegnamento scientifico nella scuola media con particolare riferimento ai problemi dell'insegnamento della matematica.* Université de Gênes, Italie.

BOURDIEU P. (1972) : *Esquisse d'une théorie de la pratique.* Droz, Genève.

G. BROUSSEAU (1980) : Problèmes de l'enseignement des décimaux *Recherches en didactique des mathématiques* n°1.1 Ed. La pensée sauvage Grenoble

G. BROUSSEAU (1981) : Problèmes de didactique des décimaux *Recherches en didactique des mathématiques* n°2.1 Ed. La pensée sauvage Grenoble.

G. BROUSSEAU (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 4.2. p. 164-198.

G. BROUSSEAU (1986) : *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I.

G. BROUSSEAU (1986b) : La relation didactique : le milieu *Actes de l'Ecole d'été de Didactique des Mathématiques.* Publication de l'IREM de Paris 7.

G. BROUSSEAU (1987a) : Les différents rôles du maître. *Actes du colloque InterIREM des PEN,* Angers, mai 1987.

G. BROUSSEAU (1987b) : Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2, p. 33-115. La pensée sauvage Grenoble.

G. BROUSSEAU (1989) : Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques in *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* Actes du colloque du CIRADE, Ed. arc inc. Ottawa.

G. BROUSSEAU (1990) : Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques,* n° 9.3. La Pensée sauvage, Grenoble. p. 309-336

G. BROUSSEAU et N. BROUSSEAU (1985) : *La construction des nombres rationnels et décimaux* Brochure de l'IREM de Bordeaux

G. BROUSSEAU et J. CENTENO (1991) : La mémoire du système didactique à paraître in *Recherches en didactique des mathématiques* n° 11.2.

J.S. BRUNER (1983) : *Savoir faire, savoir dire.* Presses Universitaires de France, Paris.

BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) : Une expérience d'enseignement de mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté. *Cahier de DIDIREM n°13.* IREM, Université Paris 7.

B. CHARLOT (1987) *L'école en mutation.* Payot, Paris.

Gérard CHAUVEAU (1982) . L'insuccès scolaire. Le rôle des rapports sociaux et culturels. *Psychologie scolaire.* n°39 p. 21-39.

Y. CHEVALLARD (1983). *Remarques sur la notion de contrat didactique.* Brochure de l'IREM d'Aix-Marseille repris dans CHEVALLARD (1988b).

Y. CHEVALLARD (1988) *Notes sur la question de l'échec scolaire.* Publication de l'IREM de Marseille n°13

Y. CHEVALLARD (1989) *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel.* Intervention au Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique , Universit Joseph Fourier Grenoble I.

Y. CHEVALLARD (1990) *Sur la déconcertation cognitive* Communication au colloque du COED, Marseille, à paraître dans *Interactions didactiques.*

DO F. et DUTILLEUX G. (1985) : *Appréciations des maîtres en mathématiques à l'école primaire.* IREM de Basse-Normandie (Caen).

W. DOISE et G. MUGNY (1981) : *Le développement social de l'intelligence.* Interéditions, Paris.

J.M. DOLLE (1974) : *Pour comprendre Jean Piaget* collection Pensée, Ed. Privat.

DOUADY R. (1980) Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11ans) *Recherches en didactique des mathématiques* n°1.1 p. 77-111. Ed. La pensée sauvage Grenoble

R. DOUADY (1984) : *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire.* Thèse de doctorat d'état, Université Paris 7.

R. DOUADY (1987) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2 p. 5-31. La pensée sauvage Grenoble.

R. DOUADY et M.J. PERRIN-GLORIAN (1986) : *Nombres décimaux.* Brochure n° 62 IREM Paris 7.

R. DOUADY et M.J. PERRIN-GLORIAN (1989) : Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane *Educational Studies in Mathematics* Vol.20. n°4, p. 387-424

DURKHEIM (1898) Représentations individuelles et représentations collectives *Revue de métaphysique et de morale* in *Sociologie* 1967 Paris PUF

Equipe élémentaire de l'IREM DE GRENOBLE (1980) : Quel est l'âge du capitaine? *Bulletin de l'APMEP* n° 323. avril 80.

J.P. FISCHER (1988a) : La mesure des TR en arithmétique élémentaire.Spécificités d'une tâche de vérification *Annales de didactique et Sciences cognitives.* IREM de Strasbourg.

J.P. FISCHER (1988) : Le rôle positf des erreurs n'est-il pas surfait ? *Annales de didactique et Sciences cognitives.* IREM de Strasbourg P. 179-201.

GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en 6ème* Thèse, Université de Grenoble

GRISVARD C. et LEONARD F. (1981) Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison des nombres décimaux positifs *Bulletin de l'APMEP* n° 327 fev.81

GRISVARD C. et LEONARD F. (1983) Résurgence de règles implicites dans la comparaison des nombres décimaux. *Bulletin de l'APMEP* n° 340 sept. 83.

HART K. (1980) From whole numbers to fractions and decimals *Recherches en didactique des mathématiques* n°1.1 Ed. La pensée sauvage Grenoble

HART K. (1981) Strategies and errors in secondary mathematics - the addition strategy in ratio *Actes du colloque du groupe international PME* Ed. laboratoire IMAG Grenoble

HART K. et al. (1981) *Children's understanding of mathematics : 11-16* John Murray publishers London

HASEMAN K. (1988) Conceptions "alternatives" des élèves, conflits conceptuels et leur importance pour les processus d'apprentissage des mathématiques *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* textes réunis par C. Laborde Ed. La pensée sauvage Grenoble

HERZLICH (1972) La représentation sociale in Moscovici Ed. *Introduction à la psychologie sociale* Paris Larousse vol I p.303-325

ISAMBERT-JAMATI V. (1990) : *Les savoirs scolaires. Enjeux sociaux des contenus d'enseignement et de leur réforme.* Ed. Universitaires, collection "Savoir et formation", Paris.

IZORCHE M.L. (1977) : *Les réels en classe de seconde.* Mémoire de DEA, Université de Bordeaux 1, nov.1977.

LAUTREY J. (1980) : *Classe sociale, milieu familial, intelligence.* Paris, PUF.

M. LEGRAND (1990) : Rationalité et démonstration mathématique, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques* n°9.3. Ed. La pensée sauvage Grenoble p.365-406.

MARGOLINAS C. (1989) : *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques.* Thèse de Doctorat, Univ. J. Fourier, Grenoble.

N. MILHAUD (1980) : *Le comportement des maîtres face aux erreurs des élèves.* Mémoire de DEA, IREM de Bordeaux.

S. MOSCOVICI (1961) La psychanalyse, son image et son public réed. 1976, Paris, PUF

S. MOSCOVICI (1969) préface à Herzlich *Santé et maladie. Analyse d'une représentation sociale* Paris, Mouton

PERRET-CLERMONT A.N;, BRUN J., SAADA E.H., SCHUBAUER-LEONI M.L., BELL N., CONNE F., GROSSEN M (1982) : Processus psychosociologiques, niveau opératoire et appropriation des connaissances. *Interactions didactiques n°2* Genève et Neuchâtel, Suisse.

M.J. PERRIN-GLORIAN (1985) : Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves du CM2 et du collège *Cahier de didactique des mathématiques n° 24* IREM Paris 7

M.J. PERRIN-GLORIAN (1986) : Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves du CM2 et du collège *Petit x* n° 10 IREM de Grenoble

M.J. PERRIN-GLORIAN (1987) : Eléments de bibliographie sur la relation entre origine sociale et réussite ou échec scolaire, *Cahier de didactique des mathématiques* n°36, IREM Paris 7.

M.J. PERRIN-GLORIAN, D. BUTLEN et M. LAGRANGE (1990) : Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 5ème en difficulté. *Cahier de DIDIREM n° 5* IREM de Paris 7.

J. PIAGET (1975) : *L'équilibration des structures cognitives, problème central du développement.* Paris, P.U.F.

A. PROST (1983) *Les lycées et leurs études au seuil du XXIème siècle* rapport du groupe de travail national sur les seconds cycles présidé par M. Antoine Prost (dit "rapport PROST"), Ministère de l'Education Nationale, CNDP, Paris.

RATSIMBA-RAJOHN H. (1981) : Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles.

RATSIMBA-RAJOHN H. (1982) : *Etude de deux méthodes de mesures rationnelles : la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue de l'élaboration de situations didactiques.* Thèse de 3ème cycle, Université de Bordeaux 1.

ROBERT A. (1982) : *L'acquisition de la notion de convergene des suites numériques dans l'enseignement supérieur.* Thèse d'Etat, Université Paris 7.

A. ROBERT (1988) : Une introduction à la didactique des mathématiques (à l'usage des enseignants). *Cahier de didactique des mathématiques n° 50* IREM Paris 7.

A. ROBERT et J. ROBINET (1989a) : Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier de DIDIREM* n°1. IREM de PARIS 7.

A. ROBERT et J. ROBINET (1989b) : Enoncés d'exercices de menuels de seconde et représentations des auteurs de manuels. *Cahier de DIDIREM* n°4. IREM de PARIS 7.

ROBINET J. (1986) Les réels : quels modèles en ont les élèves ? *Educational Studies in Mathematics* vol. 17 n°4 Nov 86 p. 359-386. D. Reidel publishing company Dordrecht Holland et *Cahier de didactique des mathématiques* n°21 IREM Université Paris 7

ROSENTHAL R.A., JACOBSON L. (1968) *Pygmalion in the classroom* New-York, Holt, Reinehard and Winston. Traduction *Pygmalion à l'école. L'attente du maître et le développement intellectuel des élèves.* Paris, Casterman 1971

ROUCHIER A. (1991) : *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itéro-récursives, institutionnalisation.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université d'Orléans.

M.L. SCHUBAUER-LEONI et A.N. PERRET-CLERMONT (1980) : Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 1.3. p. 297-350.

M.L. SCHUBAUER-LEONI, M. GROSSEN, E.H. SAADA et J. BRUN (1984) : Formulations écrites et résolution de problèmes additifs. Analyse de leur élaboration et de leur contenu. *Interactions didactiques* n°5. Neuchatel et Genève.

M.L. SCHUBAUER-LEONI (1986) : Le contrat didactique dans l'élaboration d'écritures symboliques par les élèves de 8-9ans. *Interactions didactiques* n°7. Neuchatel et Genève.

M.L. SCHUBAUER-LEONI (1986) : *Maître-élève-savoir : analyse psychosociale du jeu et des enjeux de la relation didactique.* thèse de doctorat, Université de Genève.

G. VERGNAUD (1981a) : *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Ed. P. Lang, Berne.

G. VERGNAUD (1981b) : Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Actes du 5ème colloque PME* Grenoble. vol.2 p. 7-17 et *Recherches en didactique des mathématiques* n°2.2. La pensée sauvage, Grenoble

G. VERGNAUD (1989) : Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques in *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* Actes du colloque du CIRADE, Ed. arc inc. Ottawa.

L.S. VYGOTSKY (1985) *Pensée et langage.* Editions sociales Messidor, Paris.

Bibliographie complémentaire.

ADDA J. et al. (1987) Numéro spécial sur l'échec en mathématiques de *Educational Studies in Mathematics.* n°18.3 (Août 1987)

AINSWORTH M.E., BATTEN E.J. (1974) *The effects of Environmental Factors on Secondary Attainment in Manchester. A Plowden follow-up.* London, Macmillan

AMIGUES R., CHEVALLARD Y., JOSHUA S., PAOUR J.L., SCHUBAUER-LEONI M.L. (1988) : Le contrat didactique : différentes approches. *Interactions didactiques* n°8. Neuchatel et Genève.

APMEP *brochure Mots IV* Approximations

APMEP (1977) : *A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle.* 2ème édition.

M.ARTIGUE (1989) : Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* 9.3. La Pensée sauvage, Grenoble p.281-308.

M.ARTIGUE (1991) : Epistémologie et didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* 10.2.3. La Pensée sauvage, Grenoble. p. 241-286

M. ARTIGUE et R. DOUADY (1986) : La didactique des mathématiques en France (note de synthèse) in *Revue Française de pédagogie* n°76 p.69-88 INRP Paris.

G. BACHELARD (1938) : *La formation de l'esprit scientifique.* Vrin, Paris, 1975.

BALLION (1982) *Les consommateurs d'école.* Paris, Stock

BAUDELOT C., ESTABLET R. (1971) *L'école capitaliste en France* Paris, Maspéro

BAUDELOT C., ESTABLET R. (1975) *L'école primaire divise* Paris, Maspéro

E. BAUTIER (1989) : Aspects socio-cognitifs du langage : quelques hypothèses. *Langage et société,* n°47, Maison des Sciences de l'Homme.

BEHR M. LESH R. and POST T (1981) Construct analysis, manipulative aids, representational systems and learning rational numbers concepts *Actes du colloque du groupe international PME* Ed. laboratoire IMAG Grenoble.

BEILLEROT J. et collectif (1990) :*Savoir et rapport au savoir.* Editions Universitaires, Paris.

BERNSTEIN B. (1975a)*Langage et classes sociales. Codes sociolinguistiques et contrôle social* (traduction) Editions de Minuit, Paris.

BERNSTEIN B. (1975b) *Class, Codes and Control Vol.3* Towards a theory of Educational transmissions. London, Routledge, Kegan Paul

BIGARD A. (1977) *Mathématiques échec et sélection* IREM de Nantes CEDIC

BISHOP A. (1988) *Mathematical Enculturation. A cultural perspective on Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

BKOUCHE R., CHARLOT B., ROUCHE N. (1991) : *Faire des mathématiques : le plaisir du sens.* A. Colin, Paris.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1991) : *Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches.* Université de Paris X- Nanterre.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1991) : La dimension du travail psychique dans la formation continue des enseignant(e)s de mathématiques. *Actes colloque PME,* Assisi.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1991) De quelques considérations épistémoogiques à propos des méthodes de recherche en didactique des mathématiques. *Interactions didactiques n°15.* Genève.

BLANCHARD-LAVILLE C. et autres (1989) : conférence à plusieurs voix : "Approches cliniques, contre-transfert et analyse didactique *Actes de l'Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques.* Plestin les Grèves

BLED E. (1977) *Mes écoles* Paris, Laffont

BOERO P. (1987) : Analyse de quelques facteurs d'erreur dans l'apprentissage des mathématiques dérivant de l'origine socio-culturelle des élèves. *Actes de la réunion CIEAEM Sherbrooke 1987.* Ed. Université de Sherbrooke, 1988.

BOERO P. (1990) : On long term development of some general skills in problem solving : a longitudinal comparative study. *Proceedings of 14th PME Conference, vol.2,* Mexico.

J.F. BONNEVILLE, C. COMITI, D. GRENIER, G. LAPIERRE (1990) : Eléments d'étude des représqentations des enseignants de mathématiques. Le métier, les contraintes, l'apprentissage. *Les publications de l'Institut de Formation des maîtres, équipe imat* Université J. Fourier, Grenoble.

BOSCHET F. (1988) : Un aperçu des travaux de Vygotsky, Léontiev et Bruner. *Cahiers de didactique des mathématiques* n°52, IREM, Université Paris 7.

BOUDON R. (1973) *L'inégalité des chances. La mobilité sociale dans les sociétés industrielles* Paris, A. Colin

BOURDIEU P. (1979) Les trois états du capital culturel in *Actes de la recherche en sciences sociales n°30*

Pierre BOURDIEU (1980) : *Questions de sociologie.* Paris, Editions de Minuit.

P. BOURDIEU et Jean-Claude PASSERON (1964) : *Les héritiers.* Paris, Editions de Minuit

P. BOURDIEU et J.C. PASSERON (1970) : *La reproduction* Paris, Editions de Minuit

BROSSARD M. (1979) *Conduites verbales, activités cognitives et origine sociale* Bordeaux. Thèse de Doctorat d'Etat.

Michel BROSSARD (198) : "Qu'est-ce que comprendre une leçon ?" *Bulletin de Psychologie n° 371 Tome 38*

G. BROUSSEAU : *Le cas Gaël* note dactylographiée. IREM de Bordeaux.

G. BROUSSEAU (1980) : Les échecs électifs en mathématiques. *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie* Vol. 101 n°3-4 P. 107-131.

G. BROUSSEAU (1980) : L'échec et le contrat in *La politique de l'ignorance*. Recherches n°41. p. 177-182.

G. BROUSSEAU (1982) : Les objets de la didactique des mathématiques. Ingénierie didactique.*Actes de la 2ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*. Olivet.

CARAYOL F. (1983) : *Comportements d'élèves et de futurs maîtres face à des questions de mathématiques.* Thèse de 3ème cycle, Université de Toulouse.

CARPENTER T.P. et FENNEMA E. Building on the knowledge of students and teachers. *Actes du colloque PME,* Paris, juillet 1989, p.34-45.

CARRAHER NUNES T. (1988) : Street mathematics and school mathematics. *Proceedings of 12th PME Conference, vol.1,* Veszprem, O.O.K., Hongrie.

CERQUETTI F. (1981) : *Quelques aspects de la relation aux mathématiques chez des élèves de L.E.P. et de classes pratiques.* Thèse de 3ème cycle, Université Paris 7.

Raymond CHAMPAGNOL (1986) : "L'échec scolaire : une conduite programmée" *Revue Française de Pédagogie n°77 oct-nov-dec 1986*

B. CHARLOT (1976) : *La mystification pédagogique.*. Payot, Paris.

B. CHARLOT (1983) *L'échec scolaire en mathématiques et le rapport social au savoir* Journées Nationales de l'APMEP Lille, 22-24 sept.1983 dans *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques n°342 fev. 1984.*

B. CHARLOT (1987) Qu'est-ce que faire des maths ? L'épistémologie implicite des pratiques d'enseignement des mathématiques *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques n°359 juin. 1987.*

CHARLOT B. et FIGEAT M. (1979) *L'école aux enchères. L'école de la division sociale du travail* Paris, Payot

CHAUVEAU G. (1980) Etiquetés, triés, fichés *in* GEDREM *Echec et maternelle* Paris, Editions Syros

CHAUVEAU G. (1982) : L'insuccès scolaire : le rôle des rapports sociaux et culturels. *Psychologie scolaire n°39*. p. 21-39.

Gérard CHAUVEAU et Eliane ROGAVAS-CHAUVEAU (1985) : "Les processus d'acquisition ou d'échec en lecture au CP" *Revue Française de Pédagogie n° 70 janv-fev-mars 1985.*

Gérard CHAUVEAU et Eliane ROGAVAS-CHAUVEAU textes tirés de *Pour une meilleure réussite scolaire.* Groupe permanent de lutte contre l'illétrisme.

Mohamed CHERKAOUI (1986) : *Sociologie de l'éducation.* Que sais-je ? Paris, PUF

CHERKAOUI M. et LINDSEY J.K. (1974) Lepoids du nombre dans la réussite scolaire. *Revue Française de Sociologie, XV, 2 (201-215)*

Y. CHEVALLARD (1980) *Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante* in G. Kaleka, F. Ledoux, A. Rouchier et B. Rozoy-Sénéchal "La politique de l'ignorance" *Recherches, 41 (sept 1980)* p. 71-99.

Y. CHEVALLARD (1986) *Sur la notion de temps didactique* Actes de la 4ème Ecole d'été de didactique des mathématiques (Olivet, 1986) Publication de l'IREM de Paris 7 p. 69- 93.

Y. CHEVALLARD (1988b) *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation.* Publication de l'IREM de Marseille n°14.

Y. CHEVALLARD (1988c) "L'univers didactique et ses objets : fonctionnement et dysfonctionnement" *Interactions didactiques n°9 (Médiations et remédiations didactiques).* Université de Genève et de Neuchâtel p. 9-36

Y. CHEVALLARD (1990) *Enseignement des mathématiques et besoins professionnels* Actes du XVIème colloque interIREM des PEN et autres formateurs d'instituteurs (mai 1989) Publication de l'IREM de Bordeaux.

Y. CHEVALLARD (1990) *Habilitation à diriger des recherches* Université d'Aix-Marseille I.

Y. CHEVALLARD et M.A. JOSHUA (1982): Un exemple d'analyse de la transposition didactique - la notion de distance, *Recherches en didactique des mathématiques* 3.2. p.157-239.

Y. CHEVALLARD et M. JULIEN (1989) *Sur l'enseignement des fractions au collège. Ingénierie, recherche, société.* Publication de l'IREM de Marseille n°15.

Y. CHEVALLARD et A. MERCIER (1987) : *Sur la formaion historique du temps didactique.* Publication de l'IREM de Marseille.

C.I.E.A.E.M. (1986) : Actes du groupe "Mathematics for all" du Congrès ICME 5 d'Adélaïde (Août 1984) publication de l'UNESCO, 1986.

C.I.E.A.E.M. (1988) : *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathémati-que.* Comptes rendus de la 39ème rencontre de la C.E.I.A.E.M., Sherbrooke, Août 1987

C.I.E.A.E.M. (1989) : Actes du groupe "Mathematics, Education and Society" du Congrès ICME 6 de Budapest (Août 1988) publication de l'UNESCO, 1989.

CIRADE (1989) :*Construction des savoirs. Obstacles et conflits* Actes du colloque du CIRADE à Montréal, Ed. arc inc. Ottawa.

COLEMAN J.S. et al. (1966) : *Report on Equality of Educational Opportunity.* US Government Printing Office for Department of Health, Education and Welfare ("Rapport Coleman")

COLLINS R. (1971) : Functional and Conflict Theories of Educational Stratification *American Socilogical Review n° 36 dec 1971*

COLLINS R. (1974) : Where are Educational Requierements for Employement highest ? *Sociology of Education n° 47*

CONNE F. (1981): *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'Ecole Primaire.* Faculté de Psychologie et des sciences de l'Education. Thèse.Genève. Lausanne.

COQUIN-VIENNOT D. (1985) : Complexité mathématique et ordre d'acquisition : une hiérarhie de conceptions à propos des relatifs. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 6.2.3. La pensée sauvage, Grenoble.

CRESAS (1978) : *Le handicap socioculturel en question* Paris, ESF

CRESAS (1981) : *L'échec scolaire n'est pas une fatalité* Paris, ESF

CRESAS (1983) : *Ecoles en transformation : zones prioritaires et autres quartiers* Paris, L'Harmattan INRP

CRESAS (1985) : *Depuis 1981, l'école pour tous ? Zones d'éducation Prioritaires* Paris, L'Harmattan INRP

CRESAS (1989) : *Ecoles et quartiers. Des dynamiques éducatives locales* Paris, L'Harmattan INRP

Jean-Claude DESCHAMPS, Fabio LORENZI-CIOLDI, Gil MEYER (1982) : *L'échec scolaire Elève modèle ou modèles d'élève ? Approche psychosocio- logique de la division sociale à l'école.* collection "Regards sociologiques" Editions Pierre-Marcel Favre, Lausanne.

W. DOISE et G. MUGNY (1981) : *Le développement social de l'intelligence.* Interéditions.

DOISE W. et PALMONARI A. Ed. (1986) *Représentations sociales* Delachaux et Niestlé

DUMONT B. (1989) : Questionnements et interprétation des erreurs en mathématiques. Thèse d'etat, Université Paris 7.

DUPUIS C. et PLUVINAGE F. (1981) : La proportionnalité et son utilisation.*Recherches en didactique des mathématiques* n°2.2. La pensée sauvage, Grenoble

Marie DURU (1986) : Notation et Orientation Quelle cohérence, quelles conséquences ? *Revue Française de Pédagogie n°77 oct-nov-dec 1986*

S. EHRLICH (1985) Les représentations *Psychologie française.* Tome 30 n° 3-4, Ed. A. Colin, Paris.

ELDER G. (1963) : Parental Power Legitimation and its Effect on the Adolescent. *Sociometry*

ESPERET E. (1979) : *Langage et origine sociale des élèves* Berne, Peter Lang

Jacques FIJALKOW (1986) : *Mauvais lecteurs pourquoi ?* Paris, PUF

FLANDERS dans GAGE (1963) *Handbook of Research on teaching* Chicago, Rand Mac Nally.

Jean-Claude FORQUIN (1981) : *L'approche sociologique de la réussite et de l'échec scolaires* CREFED - ENS Saint-Cloud.

FRANÇOIS F. (1977) *Langue orale et langue écrite de l'enfant dans l'enseignement du premier degré en fonction des milieux sociaux d'origine.* Rapport A.T.P. n° 1561 Paris 1977 UER de linguistique, Univ. Paris V

FRANÇOIS F. (1980) Analyse linguistique, normes scolaires et différenciations socioculturelles *Langages n°59 sept 1980*

FRASER E. *Home Environment and the School* London University of London Press.

FREUDENTHAL H. (1973) : *Mathematics as an educational task,* Reidel, Dordrecht.

FREUDENTHAL H. (1978) : *Weeding and sowing,* Reidel, Dordrecht.

FREUDENTHAL H. (1984) : L'échec des coureurs, conférence aux journées APMEP de Lille, oct 1983, *Bulletin de l'APMEP n°342, fev.84.*

GATTUSO L. et LACASSE R. (1989) : *Les maths, le cœur et la raison. Un modèle d'intervention dans une classe de mathématiques au niveau collégial.* Cégep du Vieux Montréal.

Nicole GAUTHIER, Catherine GUIGON, Maurice GUILLOT (1986) *Les Instits. Enquête sur l'école primaire* Paris, Editions du Seuil

GILLY M. (1980) *Maître - élève. Rôles institutionnels et représentations* Paris P.U.F.

GLAESER G. (1985) : A propos des obstacles épistémologiques. Réponse à G. Brousseau. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 5.2.

Groupe Français d'Education Nouvelle (1974) *L'échec scolaire "doué ou non doué" ?*

Groupe Français d'Education Nouvelle (1985) : *Reconstruire ses savoirs. Chercher, agir, inventer.* Messidor, Editions Sociales, Paris.

HAROCHE C.et PECHEUX M. (1972) Facteurs socio-économiques et résolution de problèmes *Bulletin du CERP* 1972, 21, (2-3), 67-83.

HERZLICH (1969) *Santé et maladie. Analyse d'une représentation sociale* Paris, Mouton

J.HOUDEBINE et J. JULO (1988) : Les élèves en difficulté dans le premier cycle de l'enseignement secondaire. *Revue Française de pédagogie* n°84 p.5-12 INRP Paris.

INRP (1986) : *En mathématiques, peut mieux faire. L'élève face à la difficulté en mathématiques.* Rencontres pédagogiques n°12, INRP, Paris.

D. JODELET (Ed.) (1989) : *Les représentations sociales.* PUF, Paris.

INED (1970) *"Population et l'enseignement"* Paris, PUF.

KRYGOWSKA A.Z. (1984) : Composantes de l'activité mathématique qui devraient jouer un rôle significatif dans la mathématique pour tous. *Bulletin de l'APMEP n°343, avr.84.*

LABORDE C. (1982) : *Langue naturelle et écriture symbolique. Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université J. Fourier, Grenoble.

LABOV W.(1969) The logic of Non Standard English, Georgetown Monographs in *Languages and linguistics , 22* , traduit dans *Le parler ordinaire tome 1 pages 111à 158* Editions de Minuit, Paris.

LABOV W.(1972) The study of language in its social context in *Sociolinguistics,* Pride J.B., Holmes J. pages 180-202

LABOV W.(1978) *Le parler ordinaire* Paris, Editions de Minuit

LABOV W. (1976) *Sociolinguistique* Paris, Editions de Minuit.

LACOMBE D. (1984) : Spécificités du langage mathématique et difficultés pédagogiques résultantes. *Actes des 6èmes journées sur l'éducation scientifique,* Chamonix, p.139-152.

LACOMBE D. (1988) : Le pseudo-formalisme scolaire ou l'inintelligence artificielle. *Actes de la deuxième Ecole d'été Intelligence Artificielle et enseignement des mathématiques.* p. 27-44. Ed. IREM de Toulouse.

LAWTON D. (1968) *Social class, language and education* London, Routledge, Kegan Paul

Alain LEGER (1983) : *Enseignants du secondaire* P.U.F.

Alain LEGER et Maryse TRIPIER (1983) : "Echec scolaire et cohabitation multiethnique" *Société Française n° 9 nov-dec 83-janv 84*

Alain LEGER et Maryse TRIPIER (1986) : *Fuir ou construire l'école populaire ?* Méridiens Klincksieck

LEONARD F. et SACKUR C. (1991) : Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en didactique des mathématiques* n°10.2.3. Ed. La pensée sauvage Grenoble p.205-240.

LEVY-LEBOYER et PINEAU (1980) : "Inégalités sociales et motivations scolaires" *Enfance 1980, 3, 135-156*

Pierre MARC (1984) : *Autour de la notion pédagogique d'attente* Collection Exploration. Editions Peter Lang, Berne.

MEIRIEU P. (1989) : *Enseigner, scénario pour un métier nouveau.* E.S.F., Paris.

METREAU (1981) : Attitude de trois groupes de parents d'élèves de grande section de maternelle *Mémoire de maîtrise de psychologie* Toulouse

J. MEYROWITZ (1985) : L'enfant adulte et l'adulte enfant in *Le temps de la réflexion.* Gallimard, Paris.

MINGAT A. (1981) : "Aptitudes et classes sociales. Accès et succès dans l'enseignement supérieur" *Population n° 2 mars-avril 1981*

Alain MINGAT (1984) : "Les acquisitions scolaires au CP : les origines des différences" *Revue Française de Pédagogie n° 69 oct-nov-dec 1984*

<u>Ministère de l'Education Nationale :</u>

1983 *Pour un collège démocratique* : "rapport Legrand" La Documentation Française

1983 Education et Formations n°3 : *"Evaluation pédagogique dans les écoles et les collèges CM2-6ème"* SPRESE (ex SIGES)

1984 Education et Formations n°6 : *"Niveau d'études des parents et scolarité primaire des enfants"* SPRESE (ex SIGES)

1982 - 1986 : Diverses Notes d'information (82-10, 83-25, 84-42, 85-11, 85-40, 86-39)

1986 Repères et références statistiques *"Panel 86"* SPRESE

MOLLO S. (1986) *La sélection implicite à l'école* Paris, P.U.F.

NIMIER J. (1988) : *Les modes de relation aux mathématiques.* Coll. Psychologie sociale, ed. Méridiens Klincksieck

R. NOIRFALISE (1987) : Attitudes du maître et résultats scolaires en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* n°7.3. Ed. La pensée sauvage Grenoble

R. NOIRFALISE (1990) : Arguments pour un modèle du fonctionnement cognitif en termes de connaissances, métaconnaissances et traitement de l'expérience. *Bulletin de l'IREM de Clermont-Ferrand* n°41 et *Repères* n°5 (oct 91).

OZOUF J. (1967) : *Nous, les maîtres d'école* Paris, Julliard

PERRENOUD P. (1970) *Stratification socioculturelle et réussite scolaire : les défaillances de l'explication causale.* Genève, Droz

Philippe PERRENOUD (1984) : *La fabrication de l'excellence scolaire* Librairie Droz Genève

A.N. PERRET-CLERMONT (1979) : *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale.* P. Lang, Genève.

M.J. PERRIN-GLORIAN (1989) : A propos de l'enseignement des nombres décimaux à l'école élémentaire et au collège *Innovations n° 13* CRDP Lille

M.J. PERRIN-GLORIAN (1990) L'aire et la mesure *Petit x* n°24 p. 5-36 IREM de Grenoble.

M.J. PERRIN-GLORIAN (1990) Réflexions sur le rôle du maître dans les situations didactiques à partir du cas de l'enseignement à des élèves en difficulté *Communication au congrès international de PME, Mexico, juillet 1990.* Proceedings vol. II pages 209- 216.

M.J. PERRIN-GLORIAN et R. DOUADY (1988) : Conceptions des élèves à propos d'aires de surfaces planes in *Actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique (Luminy nov 86)* Ed. C. Laborde La Pensée Sauvage Grenoble.

PEZARD M. (1985) : *Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs.* Thèse de 3ème cycle, Université Paris 7.

Eric PLAISANCE (1985) Colloque du C.N.R.S. de 1984 : *L'échec scolaire . Nouveaux débats, nouvelles approches.* Editions du C.N.R.S.

PLOWDEN Report (1967) *Central Advisory Council for Education. Children and their Primary Schools.* London, HMSO

A. REVUZ (1980) : *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques ?* PUF, Paris

J.F. RICHARD (1984) Résoudre des problèmes au laboratoire, à l'école, au travail. *Psychologie française* Tome 29 n° 3-4 Ed. A. Colin, Paris

RIST R. (1977) : On understanding the processes of Schooling : The Contribution of Labeling Theory *in* KARABEL J. et HALSEY A.H. *"Power and Ideology in Education"* New-York, Oxford University Press.

ROBERT A. (1982) : *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 7.

ROBINET J. (1984) : *Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur.* Thèse d'Etat, Université Paris 7.

J. ROGALSKI (1984) : *Acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les élèves d'âge scolaire et préscolaire.* Thèse d'Etat, Université Paris 7.

J. ROGALSKI (1985) Conservation : une formalisation mathématique de situations expérimentales, des propriétés des transformations et sa relation avec des hypothèses psychologiques sur l'acquisition des conservations. *Archives de psychologie.* 53 p. 227-253.

ROUCHE N. (1988) : Pourquoi les maths ? *Bulletin de l'APMEP n°362, fev.88.*

ROUCHIER A. (1980) Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs *Recherches en didactique des mathématiques* n°1.2 Ed. La pensée sauvage Grenoble

ROUSSET-BERT S. (1990) : Stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de maths en liaison avec certaines de leurs représentations. *Petit x* n° 25 IREM de Grenoble.

M.H. SALIN (1976) : *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire* (mémoire de DEA) IREM de Bordeaux.

Michel SCHIFF (1982) *L'intelligence gaspillée. Inégalité sociale, injustice scolaire.* Paris Ed. du Seuil.

SCHUBAUER-LEONI M.L. (1988) : Le contrat didactique : une construction théorique et une connaissance pratique. *Interactions didactiques* n°9. Neuchatel et Genève.

SCHNEIDER-GILOT M. (1988) : *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives.* Dissertation doctorale, Louvain-la-neuve.

SIERPINSKA A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 6.1

SIROTA R. (1984) *L'école primaire au quotidien* Thèse de 3ème cycle Université de Paris V, paru au PUF en 1988 dans la collection Pédagogie d'aujourd'hui.

SIROTA R. (1988) *L'école primaire au quotidien* PUF, Paris.

STREEFLAND L. (1982) Substracting fractions with different denominators *Educational Studies in Mathematics* vol. 13 n°3 D. Reidel publishing company Dordrecht Holland

STREEFLAND L. (1984) Search for the roots of ratio : some thoughts on the long term learning process (Towards ... a theory) Part I : reflections on a teaching experiment *Educational Studies in Mathematics* vol. 15 n°4 D. Reidel publishing company Dordrecht Holland

STREEFLAND L. (1984) Search for the roots of ratio : some thoughts on the long term learning process (Towards ... a theory) Part II : The outline of the long term learning process *Educational Studies in Mathematics* vol. 15 n°4

TAJFEL (1972) La catégorisation sociale in Moscovici Ed. *Introduction à la psychologie sociale* Paris Larousse vol I

Jean-Pierre TERRAIL (1983) : "Les ouvriers et l'école : le sens de la réussite" *Société Française n°9 nov-dec 83-janv 84*

TREISMAN Philip Uri (1985) *A study of the mathematics performance of black students at the University of California, Berkeley.* Brochure polycopiée.

G. VERGNAUD (1982) : A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems in *Addition and substraction : a cognitive perspective.* T.P. Carpenter, J.M. Moser, T.A. Romberg, Eds, Hillsdale, New Jersey p. 39-59.

G. VERGNAUD (1985) : Multiplicative structures, in *Acquisition of Mathematic concepts and processus.* R. Lesh et M. Landau, Academic Press.

VERGNAUD (1991) : La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 10.2.3. La pensée sauvage, Grenoble.

G. VERGNAUD et al. (1983) : "Didactique et acquisition du concept de volume" *Recherches en didactique des mathématiques* n° 4.1

VOIGT J. Patterns and routines in classroom interactions. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 6.1

H. WALLON (1941) : *L'évolution psychologique de l'enfant.* A. Colin, Paris, rééd. 1968.

H. WALLON (1945) : *Les origines de la pensée chez l'enfant.* PUF, Paris.

ZAZZO B. (1978) *Un grand passage : de l'école maternelle à l'école élémentaire* Paris, PUF

ZIMMERMAN (1982) *La sélection non verbale* Paris, E.S.F.

Table des matières.

* L'annexe 1 n'est pas reproduite : elle correspond au cahier de didactique des mathématiques n° 36 de l'IREM Paris 7.

ANNEXES

de la deuxième partie.

Ce que disait l'A.P.M.E.P. en 1974 (Mots 1)

FRACTION

I. Langage courant

"Il réagit en une fraction de seconde."
"Seule une fraction de la population part en vacances l'été."
"Un quart d'heure est une fraction d'heure qui équivaut à quinze minutes."
"A moi seul, j'ai mangé une énorme portion de tarte: les quatre cinquièmes ! Comme cette tarte coûte dix-sept francs, je dois payer les quatre cinquièmes de dix-sept francs."

Les idées évoquées semblent être celles de "portion d'un tout", de "partage", parfois de "rupture"; de nombre ou de mesure plus petits que 1 ; ...

II. Langage mathématique

Il se doit d'être beaucoup plus précis. Comment répondre aux questions suivantes, à propos du mot "fraction":
Désigne-t-il des nombres ? Si oui, quelle sorte de nombres ?
Désigne-t-il des opérateurs ? Si oui, quelle sorte d'opérateurs ?
Désigne-t-il des couples de nombres ? Si oui, lesquels ?

$\frac{0,6}{0,4}$ est-il une fraction ? et $\frac{\pi}{2}$? et $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}$? et $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$?

Que penser des égalités suivantes:

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{3}{2} = \frac{0,6}{0,4} \quad ?$$

Cette rubrique essaie de répondre à ces questions.

Le lecteur est invité à se reporter à ENTIERS et RATIONNELS; NOMBRE DECIMAL, NOMBRE A VIRGULE; ENSEMBLES DE NOMBRES.

III. Ce qu'est une fraction

1. Tout rationnel peut être représenté, d'une infinité de façons, par une **notation fractionnaire.**

Par exemple, le quotient dans **Q** de 140 par 60 peut se noter indifféremment

$$\frac{140}{60} \text{ ou } \frac{14}{6} \text{ ou } \frac{7}{3} \text{ ou } \frac{35}{15} \quad ....$$

De même, le naturel que la langue française nomme "quatre" peut se représenter par l'écriture non fractionnaire 4 et aussi par l'une des écritures fractionnaires

$$\frac{20}{5}, \quad \frac{4}{1}, \quad \frac{24}{6}, \quad ...$$

D'où les égalités suivantes:

$$\frac{140}{60} = \frac{7}{3} \qquad \frac{14}{6} = \frac{35}{15} \qquad \frac{20}{5} = 4$$

$$4 = \frac{24}{6} \qquad \frac{4}{1} = 4 \qquad \frac{3}{2} = 1,5$$

Sont de même des écritures différentes d'un même rationnel:

$$\frac{12}{10} \quad \frac{1\,200}{1\,000} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{42}{35} \quad \frac{4,2}{3,5} \quad \frac{2,4}{2}$$

(écritures fractionnaires)

1,2 1,200 (écritures décimales)

12 : 10 6 : 5 3,7 — 2,5 6 × 0,2 etc...

2. Mais la notation fractionnaire n'est pas réservée aux rationnels.

Par exemple: $\frac{\pi}{2}$ est une notation fractionnaire d'un réel non rationnel.

De même pour $\frac{-\sqrt{3}}{44}$

$\frac{3y-1}{y^2+1}$ est une écriture fractionnaire d'un quotient de polynomes en y.

etc...

3. En définitive, une *fraction* est un dessin, une écriture, une représentation, un symbole, ... qui sert à représenter certains êtres mathématiques.

Elle comporte:

- un trait parallèle aux lignes d'écriture, dit "trait de fraction"; c'est un signe typographique, au même titre que les chiffres, les parenthèses, le signe + , etc...
- au-dessus de ce trait, une écriture (d'un être mathématique) appelée "numérateur" de la fraction
- au-dessous de ce trait, une écriture (d'un être mathématique) appelée "dénominateur" de la fraction.

426

IV. Exemples

1. Si le numérateur est l'écriture d'un naturel et si le dénominateur est l'écriture d'un naturel non nul, la fraction est *l'une* des *écritures* d'un *rationnel positif.*

2. Une telle fraction précédée du signe " — " désigne un rationnel négatif; exemple: $-\dfrac{37}{48}$ (ce rationnel se note aussi $\dfrac{-37}{48}$ ou $\dfrac{37}{-48}$).

3. $\left(\times \dfrac{4}{5}\right)$ est une notation (parmi d'autres) d'un *opérateur* (voir OPERATEUR). Cette notation fait intervenir, entre autres, une fraction, mais n'est pas une fraction.

Une autre notation possible de ce même opérateur est:

4 pour 5

De même

25 pour 100 ; $\left(\times \dfrac{25}{100}\right)$; $(:4)$; $\left(\times \dfrac{1}{4}\right)$; $(\times\ 0{,}25)$; 25%

sont six notations différentes d'un même opérateur.

(On rappelle qu'un opérateur n'est pas un nombre).

V. Ce que n'est pas une fraction

Les mots *rationnel, nombre, opérateur, ensemble,* désignent des êtres mathématiques. Au contraire, le mot *fraction* ne désigne pas un être mathématique :

1. Une fraction *n'est pas* un nombre.

2. Une fraction *n'est pas* non plus un opérateur.

3. Une fraction *n'est pas* un couple de naturels. Pour la notion mathématique de "couple de naturels", on dispose d'un mot et

d'une notation (exemple: (13,25) ou (13 ; 25)) parfaitement adaptés aux besoins. Pourquoi aurait-on inventé un synonyme ?

4. Il n'y a guère place, parmi les notions mathématiques actuellement utiles (à l'école élémentaire et même ailleurs), pour une notion, "intermédiaire" entre le couple de naturels et le rationnel, qu'on appellerait "fraction". Pas plus qu'entre le couple de naturels et l'entier dans la construction de **Z** .

VI. Les abus de langage

Le langage mathématique usuel comporte beaucoup d'abus de langage qui sont tolérables et même bien utiles dans certains cas; il serait pénible de s'en priver. L'essentiel est de savoir qu'il s'agit d'un abus et de pouvoir, en cas de besoin, revenir à un langage plus rigoureux.

427

Exemples:

1. On dit couramment, et sans inconvénient la plupart du temps, "le naturel 27" au lieu de "le naturel représenté, dans le système de numération de position à base DIX et à chiffres arabes, par 27".

2. De même, "le rationnel $\dfrac{2}{3}$" au lieu de "le rationnel dont une écriture fractionnaire est $\dfrac{2}{3}$".

3. "Pour additionner deux fractions, on les réduit d'abord au même dénominateur", au lieu de "Pour additionner deux rationnels représentés sous forme fractionnaire, on remplace d'abord chacune des deux représentations par une autre telle que les deux nouvelles fractions aient le même dénominateur".

4. "La somme des chiffres d'un naturel" au lieu de "Le naturel somme des naturels représentés par chacun des chiffres figurant dans le codage du naturel considéré".

5. Les écritures "$\frac{2}{3}$" et "$\frac{4}{6}$" sont visiblement différentes, mais elles représentent le même rationnel; donc

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

En disant: "Les rationnels $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ sont égaux", on commet un abus de langage gênant car on masque ainsi le fait que c'est *le même* rationnel qui est représenté aussi bien par $\frac{4}{6}$ que par $\frac{2}{3}$.

En disant: "Les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ sont égales", on commet un autre abus de langage, qu'on essaie parfois d'éviter en parlant de "fractions équivalentes"; de plus, on voudrait ainsi rappeler que "les couples de naturels (4 ; 6) et (2 ; 3) sont équivalents pour la relation $\mathfrak{R}$" (voir ENTIERS et RATIONNELS); cette dernière phrase est, elle, parfaitement claire.

Au lieu de "fractions égales" et de "fractions équivalentes", on pourrait suggérer "fractions synonymes".

6. "Fraction irréductible" peut se définir par "Fraction dont le numérateur et le dénominateur désignent deux naturels sans diviseur commun autre que 1"; il n'y a là aucun abus de langage.

Par contre, "rationnel irréductible" est une absurdité; on veut dire "rationnel représenté par une fraction irréductible".

7. Il existe une différence profonde entre un "rationnel décimal" (voir NOMBRE DECIMAL) et une "fraction décimale" (on entend par là une fraction dont le dénominateur est une puissance de *dix*).

Exemple: Le rationnel quotient de 7 par 20 peut se noter $\frac{7}{20}$, et aussi $\frac{35}{100}$; "$\frac{35}{100}$" est une "fraction décimale" qui montre clairement que le rationnel en question est un décimal (il se note encore 0,35). Mais sa représentation "$\frac{7}{20}$" n'est pas une fraction décimale, puisque son dénominateur n'est pas une puissance de *dix*.

VII. Autres emplois d'écritures fractionnaires

1. L'examinateur qui note les trois questions d'un problème respectivement sur 9, 4 et 7, utilise souvent des fractions: $\frac{6}{9}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$.

Il les additionne selon une règle qui n'a rien à voir avec l'addition dans Q :

$$\frac{6}{9} + \frac{1}{4} + \frac{2}{7} = \frac{9}{20}$$

2. Les examinateurs d'élite évaluent une dissertation au quart de point près. Mais quand ils écrivent $8\frac{1}{4}$, il ne s'agit pas du tout du produit des nombres 8 et $\frac{1}{4}$.

3. Que dire des "formules dentaires" des naturalistes ? ?

Annexes ch 2.

Questionnaire A

version 1

Nom Prenom Classe

date de naissance

1 - Si tu devais expliquer à un camarade du CE_2 ce qu' est $\frac{1}{3}$, que lui dirais-tu? quels dessins ferais-tu?

Et pour $\frac{3}{4}$?

Et pour 2,3 ?

2- Combien y-a-t-il de minutes dans $\frac{1}{4}$ heure ? dans $\frac{1}{3}$ heure ? dans $\frac{1}{5}$ heure ?

3- Que vaut $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$?

Que vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$?

Que vaut $\frac{1}{10} + \frac{1}{10}$?

Que vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$?

Quelle est la moitie de $\frac{1}{100}$?

4 - Peux-tu citer trois nombres compris

entre 1 et 5 ?

entre 1 et 3 ?

entre 1,8 et 2,1 ?

entre 1,5 et 1,8 ?

entre 1,5 et 1,6 ?

entre 1 et 1,1 ?

5- Martine dit : " C'est drôle, dans ma famille, mon petit frère a la moitié de mon âge, mon père a le triple de mon âge et mon grand-père a 5 fois mon âge. Devine combien de fois mon grand-père a l' âge de mon petit frère ? Explique comment tu as trouve. "

version 1

" Mon père a 36 ans. Devine les âges des autres membres de ma famille. (Ma mère a 2ans de moins que mon père) .

6 - Compare les nombres :

4,12 - 43,25 - 4,54 - 4,02 - $4+\frac{1}{2}$ - 4,45 - 40,2 - 4,2 - 40,12 - $43+\frac{1}{4}$ - 4,325

7 - Un carreleur utilise des carreaux rectangulaires pour carreler le sol d'une pièce rectangulaire. Il constate qu' il peut reporter exactement 25 fois la longueur du carreau dans la longueur de la pièce et exactement 15 fois la largeur du carreau dans la largeur de la pièce. De combien de carreaux aura-t-il besoin pour carreler la pièce ?

8 - Dans une entreprise, on range les oeufs dans des boîtes. On met 6 oeufs dans chaque boîte; quand on a 6 boîtes, on les range dans un carton; et on range 6 cartons dans une caisse. Ce jour là, on a rempli 50 caisses, 4 cartons, et 5 boîtes. Combien d'oeufs ont été emballès?
Dans une autre entreprise, on emballe les oeufs par boîtes de 10, on met 10 boîtes dans un carton et 10 cartons dans une caisse . De combien de boîtes, cartons et caisses aurait-on besoin dans cette deuxième entreprise pour emballer le même nombre d'oeufs ?

classe de 6ᵉA :

8 - Dans une entreprise, on range les oeufs dans des boîtes. On met 12 oeufs dans chaque boîte; quand on a 12 boîtes, on les range dans un carton; et on range 12 cartons dans une caisse. Ce jour là, on a rempli 50 caisses, 8 cartons, et 10 boîtes. Combien d'oeufs ont été emballès?
Dans une autre entreprise, on emballe les oeufs par boîtes de 10, on met 10 boîtes dans un carton et 10 cartons dans une caisse . De combien de boîtes, cartons et caisses aurait-on besoin dans cette deuxième entreprise pour emballer le même nombre d'oeufs ?

version 1 bis

Date :

Nom : Prénom :

Date de naissance : Classe :

1- Dans une entreprise, on range les oeufs dans des boîtes, des cartons, des caisses.

On met 6 oeufs dans chaque boîte.

On met 6 boîtes dans chaque carton.

On met 6 cartons dans chaque caisse.

Aujourd'hui, on a rempli 50 caisses, 3 cartons et 2 boîtes.

Combien d'oeufs ont été emballés?

Dans une autre entreprise, on emballe les oeufs par boîtes de 10 ; on met 10 boîtes dans un carton et 10 cartons dans une caisse.

De combien de boîtes, cartons et caisses aurait-on besoin dans cette deuxième entreprise pour emballer le même nombre d'oeufs? (c'est à dire le nombre d'oeufs que tu as trouvé à la première question)

2- Voici un morceau d'axe gradué . Peux-tu placer les nombres suivants sur cet axe

2,5 0,8 1,45 1,7 0,62 2,87 1,08

version 1 bis

3- Range les nombres suivants du plus petit au plus grand en utilisant le signe $<$ ou le signe $=$ suivant le cas.

4,12 43,25 4,54 4,02 $4+\frac{1}{2}$ 4,45 40,2 4,2 40,12

$43 + \frac{1}{4}$ 4,325

4- Cite, si c'est possible, trois nombres strictement compris

entre 1,8 et 2,1

entre 1,6 et 1,8

entre 1,3 et 1,4

entre 1 et 1,1

version 2 :

A

Date :

Nom : Prénom :

Date de naissance : Classe :

1- Dans une entreprise, on range les oeufs dans des boîtes, des cartons, des caisses.

On met 6 oeufs dans chaque boîte.

On met 6 boîtes dans chaque carton.

On met 6 cartons dans chaque caisse.

Aujourd'hui, on a rempli 50 caisses, 3 cartons et 2 boîtes.

Combien d'oeufs ont été emballés?

Dans une autre entreprise, on emballe les oeufs par boîtes de 10 ; on met 10 boîtes dans un carton et 10 cartons dans une caisse.

De combien de boîtes, cartons et caisses aurait-on besoin dans cette deuxième entreprise pour emballer le même nombre d'oeufs? (c'est à dire le nombre d'oeufs que tu as trouvé à la première question)

2- Voici un morceau d'axe gradué . Peux-tu placer les nombres suivants sur cet axe

2,5 0,8 1,45 1,7 0,62 2,87 1,08

3- Range les nombres suivants du plus petit au plus grand ; tu précises s'il y a égalité :

4,12 43,25 4,54 4,02 $4 + \frac{1}{2}$ 4,45 40,2 4,2 40,12

$43 + \frac{1}{4}$ 4,325

4- Dans un magasin on vend 3 tablettes de chocolat pour 8,50 F ; dans un autre magasin on vend 5 tablettes du même chocolat pour 14,50 F . Dans lequel des deux magasins le chocolat est-il le moins cher ?

version 2

version2- B

Date :

Nom : Prénom :

Date de naissance : Classe :

1- Si tu devais expliquer à un camarade du CE_2 ce qu'est $\frac{1}{3}$ (un tiers) , que lui dirais-tu, quels dessins ferais-tu ?

Et pour $\frac{3}{4}$ (trois quarts) ?

Et pour 2,3 ?

2- Combien y-a-t-il de minutes dans un quart d'heure ? dans un dixième d'heure, dans un cinquième d'heure ?

3- Que vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

$\frac{1}{10} + \frac{3}{10}$

0,7 + 0,8

version 2- B

4- Quelle est la moitié de $\frac{1}{100}$?

Quel est le double de $\frac{1}{100}$?

Quelle est la moitié de 0,1 ?

5- Cite, si c'est possible , trois nombres compris

entre 1,8 et 2,1

entre 1,6 et 1,8

entre 1,3 et 1,4

entre 1 et 1,1

Attention, donne des nombres différents de ceux qui sont donnés.

6- Martine dit : " C'est drôle, dans ma famille, mon petit frère a la moitié de mon âge, mon père a le triple de mon âge et mon grand-père a 5 fois mon âge. Devine combien de fois mon grang-père a l'âge de mon petit frère ? Explique comment tu as trouvé. "

Annexe :

QUESTIONNAIRE B (CLASSES DE 4ème)

- I -

1) Si vous aviez à expliquer à un camarade qui a été absent :
   - ce qu'est une fraction,
   - ce qu'est un nombre rationnel,
   - ce qu'est un nombre décimal.

   Que lui diriez-vous ?

   Donner des exemples de fractions, de nombres rationnels.

2) Que veut dire pour vous :
   - fractions équivalentes,
   - fractions égales.

   Donner des exemples de fractions équivalentes, de fractions égales.

   Pouvez-vous donner une fraction équivalente à 7/8, une fraction égale à 7/8 ?

   Y a-t-il pour vous une différence entre " fractions équivalentes " et " fractions égales " si oui, laquelle ?

- II -

1) Calculer :

$\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$\frac{3}{5} - \frac{2}{7}$ $\qquad$ $\frac{3}{5} - \frac{5}{6}$

$\frac{3}{4} \times \frac{12}{5} =$ $\qquad$ $\frac{3/4}{12/5} =$

2) Ordonner :

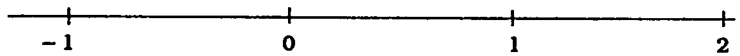
$\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{9}$

$\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{8}$

$-\frac{32}{17}$ et $\frac{43}{19}$

$\frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{13}$

3) Situer sur l'axe gradué ci-dessous les nombres : 1,5 ; - 0,3 ; $\frac{13}{20}$; 0,75 ; $\frac{45}{25}$; $-\frac{3}{4}$; $\frac{14}{12}$; 0,65 ; $-\frac{1}{10}$; 1,1



4) Donner, si possible, un ou plusieurs nombres compris entre :

$\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{7}$

1,39 et 1,4

3,1 et 3,12

31/7 et 4,42

- III -

1) *a)* Trouver un nombre x tel que $4 . x = 125$.

   b) Trouver deux entiers consécutifs a et a + 1 tels que $a \leq x < a + 1$

c) Trouver si possible un encadrement de x par deux nombres décimaux d_1 et d_2 à $\frac{1}{100}$ près, autrement dit tels que :

$$d_1 \leq x < d_2 \qquad \text{et} \qquad d_2 - d_1 = \frac{1}{100}$$

2) Répondre aux mêmes questions :

pour $12 . x = 177$ et pour $19 . x = 5$

3) Peut-on trouver un carré d'aire 36 cm^2,

un carré d'aire $\frac{25}{4}$ cm^2

un carré d'aire 27 cm^2

Si oui, quelle est la mesure du côté ?

Si vous ne pouvez pas donner une valeur exacte, pouvez-vous en donner des valeurs approchées ?

Pour chaque mesure d'aire, proposer un rectangle de même aire et dont l'un des côtés mesure 4,5 cm.

NOMBRES

(Test proposé aux élèves instituteurs)

1. Les nombres suivants sont-ils des nombres décimaux ?
$\frac{117}{125}$; 2,2222...(infinité de 2) ; 13 ; $\frac{117}{3}$; $\frac{19}{3}$; $\frac{215}{64}$;
17,9999....(infinité de 9)

2. Y-a-t-il un nombre réel (resp. rationnel, resp. décimal)
compris entre 2,5789 et 2,579 ____________________

entre $\frac{7}{19}$ et $\frac{8}{19}$ ____________________

entre $\frac{22}{7}$ et 3,142857 ____________________

entre π et 3,1416 ____________________

entre $\frac{1}{3}$ et 0,3333..... (infinité de 3) ____________________

entre 1,8732 et 1,8733 ____________________

En cas de réponse positive, donner au moins un exemple.

3. Quel est le nombre qui précède 3,7
Quel est le nombre qui suit 3,7
-dans l'ensemble des nombres réels?
-dans l'ensemble des nombres décimaux?

4 Mettez le signe convenable $<$, = ou $>$
entre 1,77777......+ 2,2222222..... et 4
entre 3 X 0,33333333....... et 1

5. Peut-on compter les points d'un segment (par exemple [1,5])?
Peut-on numéroter les points d'un segment ? (par exemple [1,5])
Peut-on numéroter les décimaux d'un segment? (par exemple [1,5])

6. Si on grossissait beaucoup un petit segment de droite au microscope électronique ou avec un ordinateur , qu'est-ce qu'on obtiendrait?

Même question avec un petit morceau de cercle.

7. Soit a un nombre rationnel et b un nombre irrationnel,
y-a-t-il des entiers n pour lesquels n.a soit entier ?
pour lesquels n.b soit entier ?

Expliquez pourquoi.

8. Y-a-t-il une différence entre les nombres rationnels et les nombres décimaux ? Si oui laquelle ? Donner des exemples.
Y-en-a-t-il plus des uns que des autres ?

9. Y-a-t-il plus de nombres rationnels ou de nombres irrationnels ?
Pourquoi ?

10. Comment vous représentez-vous les nombres réels ?

QUESTIONNAIRE POUR LES PROFESSEURS

1 . Dans quelles classes enseignez-vous ?
Quel est le pourcentage d'élèves en avance dans vos classes de 4e ?
en retard

2 . Quel manuel ont vos élèves ?
Quels livres utilisez-vous pour préparer votre cours ?
vos exercices ?

3 . A quelle(s) époque(s) de l'année traitez-vous les rationnels ? les réels ?
(Précisez si c'est en une fois, en plusieurs fois, tout au long de l'année).

4 . Combien de temps y consacrez-vous (cours, exercices) ?

5 . Abordez-vous les réels d'abord en définissant $\mathbb{Q}$ comme une partie de $\mathbb{R}$ ou les rationnels d'abord et les réels ensuite ?

6 . Quelle place faites-vous aux décimaux dans cet enseignement ?
(Cf. aussi question 14)

7 . Traitez-vous les opérations avant l'ordre ?
en même temps que l'ordre ?
après l'ordre ?

8 . Quelle importance accordez-vous aux problèmes de mesure dans le cours ?
dans les exercices ?
Viennent-ils avant le cours ? après le cours ? à la fois avant et après le cours ?

9 . Abordez-vous les questions nouvelles par le cours ou à travers des problèmes ?
Donnez des exemples .

10 . Le mot "fraction" désigne-t-il pour vous
- un couple de deux entiers
- une écriture d'un nombre rationnel
- autre chose (précisez)

11 . Vous paraît-il important de distinguer nombre et écriture de nombre ?

12 . Parlez-vous des suites décimales illimitées ?
A quel moment ? en cours ? dans les problèmes ou exercices ?

13 . Quels exemples d'irrationnels donnez-vous aux élèves dans le cours ?
Quelle proportion de problèmes ou exercices portent sur des irrationnels ?

14 . Faites-vous dans votre cours un chapitre spécial sur les approximations décimales des réels et des rationnels ? Quelle proportion de problèmes ou d'exercices sont consacrés à l'approximation par des décimaux d'un rationnel ? d'un irrationnel ?

15 . Quelle place accordez-vous à la recherche de solutions approchées d'une équation (par exemple $x^2 = n$) dans le cours ? dans les problèmes ou exercices ?

16 . Quelle place faites-vous aux représentations graphiques dans le cours sur les nombres ? dans les problèmes ou exercices ?

17 . Y-a-t-il des points qui vous paraissent difficiles à présenter dans le cours sur réels, rationnels ? lesquels ? pourquoi ?

18 . Y-a-t-il des points que, d'après-vous, les élèves devraient assimiler facilement et sur lesquels ils butent ? lesquels ?

19 . Quelles erreurs avez-vous rencontrées chez les élèves ? lesquelles sont les plus fréquentes ?

20 . Voyez-vous des relations entre les erreurs des élèves dans le calcul algébrique et dans le calcul numérique ?

21 . Y-a-t-il des lacunes dans le programme de 4e ou des classes précédentes qui vous paraissent expliquer certaines erreurs ?
Y-a-t-il des prérequis qui vous semblent manquer ? lesquels ?

22 . Y-a-t-il des allègements possibles du programme actuel ? (précisez si la question vous paraît devoir être remise à plus tard ou supprimée).

23 . Autres renseignements qui vous paraissent intéressants ?

24 . Qu'attendez-vous de ce stage ?

25 . Qu'avez-vous à dire sur le fonctionnement prévu ?

QUESTIONNAIRE POUR LES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DU PREMIER CYCLE

1. Quelle place faites-vous dans votre enseignement en 6ème (resp. 5ème, 4ème, 3ème) à la graduation d'une droite ou d'une demi-droite par des décimaux, par des fractions (dans combien de cours en parlez-vous ? pendant combien de semaines posez-vous des exercices faisant intervenir la graduation ?)
- est-ce pendant une période déterminée ?
- est-ce tout au long de l'année ?
- est-ce pendant le travail sur les nombres ?
- est-ce à un autre moment ? lequel?

2. La place que vous accordez à cet enseignement est-elle constante ou dépend-elle du niveau de la classe ?

Est-ce que vous y passez plus de temps en cours pour une bonne classe ? pour une classe faible ?

Est-ce que vous posez plus d'exercices mélangeant graduation et nombres non entiers pour une bonne classe, pour une classe faible ?

Même question pour des entiers relatifs? pour des nombres négatifs,entiers ou non ?

3. Si vous avez une classe de 6ème et que vous disposez de peu de temps pour l'enseignement de l'ordre des décimaux, quelle place faites-vous dans ce cours à la graduation d'une demi-droite ? Est-ce que cette décision dépend du niveau de la classe ? comment ?

4. Utilisez-vous d'autres représentations ou images des nombres dans votre cours sur les décimaux, sur les fractions ? dans les exercices ? lesquelles? combien de temps y consacrez-vous ?

5. En général, dans une semaine, quelle proportion de vos interventions consacrez-vous à la recherche par les élèves, en classe, de problèmes ou d'exercices - dans une bonne classe ?
- dans une classe faible ?

Y-a-t-il des différences suivant les contenus ? Donnez des exemples .

DOCUMENT ANNEXE AU CHAPITRE 4.

Séances de travail avec Didier.

Nous ne donnons pas ici une transcription complète de toutes les séances mais de larges extraits significatifs avec un résumé de ce qui se passe entre les séquences transcrites. Nous avons mis en italique les passages les plus significatifs qui nous servent à illustrer le chapitre 4.

16 septembre 1987

Problème : j'ai 378 oeufs que je veux ranger dans des boîtes de 12. De combien de boîtes ai-je besoin ?

Le premier réflexe de Didier est de multiplier 378 par 12.

Il m'a expliqué qu'il a du mal à comprendre les problèmes à l'école. J'interviens : je ne veux pas que tu fasses des opérations, je veux que tu essaies de prévoir. Tu imagines les 378 oeufs dans une caisse. Tu dois aller chercher des boîtes pour les emballer. Combien tu en prends ?

D. : 6

Je lui fais dessiner les 6 boîtes et Didier cherche combien il y a d'oeufs dedans. Il trouve assez facilement 72 en ajoutant 12 + 12 = 24, 24 + 24 = 48, 48 + 12 = 60, 60 + 12 = 72, parfois en utilisant la numération (+ 10 + 2), parfois en comptant de 1 en 1. Il constate que ça ne suffit pas, propose d'aller chercher 2 boîtes, ce qui fait 96, encore 2 boîtes. Il trouve difficilement 120 et ne sait pas faire 12 X 10 de tête.

Je lui fais écrire 10 boîtes, 120 oeufs. Didier propose encore 10 ce qui donne 20 boîtes, 240 oeufs. Il propose encore 20 et arrive à 40 boîtes, 480 oeufs. c'est trop. Il propose d'enlever 5 boîtes mais là il est perdu : il veut enlever 5 à 480.

Je le fais repartir sur une autre voie : on a vu que 20 boîtes ne suffisaient pas, que 40 c'est trop, on va essayer 30 boîtes. Didier a des problèmes pour trouver le nombre d'oeufs dans 30 boîtes, il fatigue, il est perdu, ne peut pas se servir des résultats de 20 et 10, ni faire une multiplication.

On décide que 10 boîtes se rangent dans un carton et on dessine les boîtes et les cartons. Sur chaque carton on dessine le nombre d'oeufs. De cette façon Didier trouve facilement 360 et constate que ça ne suffit pas encore. Après hésitation il trouve qu'il reste 18 oeufs et qu'il faut 2 boîtes de plus. Mais il a beaucoup de mal à donner la réponse finale et surtout à dire combien de places vides il reste. Il ne peut le faire qu'à partir des 18 oeufs dans 2 boîtes, en dessinant. Ensuite je lui demande le nombre d'oeufs dans 1 boîte, 2 boîtes, ... 15 boîtes.

On remplit un tableau. Pour ajouter 12, au début, Didier utilise bien la numération, + 10, + 2. De 120 à 144 il compte un par un sur les doigts. De 144 à 156 il fait + 10 + 2 à nouveau, puis toujours un par un.

27 septembre

Exercice 1 : Jean vide le contenu de deux sacs de billes dans une grande boîte vide. Il avait compté les billes du premier sac et avait trouvé 43. Il compte maintenant les billes qui sont dans la boîte et trouve 125. Combien y avait-il de billes dans le deuxième sac ?

Didier lit le problème, puis je lui demande de raconter ce qui se passe. Il le fait très bien et commente : 43 d'un côté, ça va pas forcément être 43 de l'autre côté, ça pourrait aussi bien être 22. Je demande si on ne donne pas un autre renseignement. Didier : si, quand on met toutes les billes ensemble, ça fait 125.

Didier a compris la question : ça ne peut pas faire 43, 43 et 43, 86, c'est trop petit.

Il essaie 125 mais ne peut pas prévoir sans faire l'opération que ça va être trop grand. Il ne peut proposer des essais qu'au hasard.

je lui demande de redire le problème comme s'il l'expliquait à un copain et de faire des dessins. Il écrit les nombres sur ma demande mais ça ne l'aide pas. Je lui propose le problème direct avec plusieurs valeurs pour le deuxième sac (20, 40, 60). Il exprime toujours le résultat sous forme d'un nombre et répugne à l'exprimer sous forme d'une opération.

On reprend le problème, je lui propose de désigner le nombre de billes du deuxième sac par une lettre. Il choisit a. Je lui demande comment on ferait pour trouver le nombre de billes dans la boîte. Il ne sait pas. En reprenant ce qu'on a fait pour 20, 40, 60, il reconnaît qu'on ajoute 43 et a. Je le lui fais écrire. Il dit : c'est comme une addition à trous. Je lui demande de la faire et de vérifier que ça va. Je lui demande s'il aurait pu trouver autrement. Il répond que non. Je reprends le problème en disant qu'on vide les 125 billes de la boîte dans les sacs. On en met 43 dans le premier sac, combien en reste-t-il dans la boîte ? Il sait que c'est 82, mais ne voit pas comment il aurait pu trouver autrement. Je lui pose la soustraction, il la fait.

Exercice 2 : Paul dispose d'une barre de pâte à modeler de 100 grammes. Il fabrique des animaux avec cette pâte : il a utilisé 20 g pour faire une souris. Il utilise le reste pour faire un chat. Combien pèse le chat ?

Didier essaie 100 + 20. Je lui demande si le chat pèse plus ou moins de 100 g. Il répond moins et pose successivement 20 - 100 = 120, 100 - 20 = 20 avant de faire correctement 100 - 20 = 80.

Je commence à lui poser un troisième problème, mais Didier est trop fatigué et on s'arrête.

3 octobre

D. Ce matin on a fait un jeu mathématique avec des dés. Alors, on avait des dés, puis il fallait .... par exemple on jetait les dés, on obtenait un numéro et on devait les classer dans des colonnes. Alors à ce moment là, Tala et moi, on a tiré, on a fait 2 fois 8, 3 fois 7 et une fois 6 alors on a gagné 5 points.

M. Pourquoi ? explique-moi comment on mettait les points. Ils étaient comment les dés? c'étaient des dés normaux ?

D. Oui, des dés comme ceux-là.

M. Et on jouait avec combien de dés ?

D. Généralement avec 4. Alors on a tiré, on a trouvé ... on a réussi à avoir un 6 avec trois 7.

M. Il y a des 7 sur des dés ?

D. Non, on a additionné tous les numéros qu'on avait.

M. Sur les quatre dés alors

D. Oui, et puis ensuite on a obtenu trois 7, et un 6

M. 3 fois 7 et 1 fois 6 ?

D. non en tout, on a eu 16 points et puis la maîtresse a promis qu'on allait recommencer samedi prochain.

M. ça t'a plu ?

D. Oui

M. Et d'habitude qu'est-ce que tu fais en math ?

D. D'habitude on a commencé à faire les opérations, c'était une révision.

M. Qu'est ce que tu as révisé comme opérations ?

D. Là, maintenant, on en est aux soustractions et puis ensuite, ça va être les multiplications et ensuite ça va être les divisions.

M. Et comment ça s'est passé ?

D. ça s'est bien passé, j'ai eu presque toujours des 9, 3 fois j'ai eu 10

M. Alors tu sais faire les soustractions ! Et les problèmes ?

D. Non pas encore

M. pas encore depuis le début de l'année ?

D. Non pas encore.

M. Et qu'est-ce que tu aimes le mieux quand tu fais des maths ? Qu'est-ce que tu aimes le moins ?

D. Les problèmes je commence à bien aimer, mais entre les divisions et tout ça, en plus on n'a pas encore appris les divisions, alors ce que j'aime le plus c'est les soustractions et ce que j'aime le moins c'est les multiplications.

M. Ah bon, pourquoi ?

D. Parce que c'est trop dur les multiplications.

M. Pourquoi c'est dur ?

D. Parce que à chaque fois il faut que je compte sur mes doigts.

M. Ah, c'est parce que tu ne sais pas tes tables.

D. Ben oui, pourtant je les ai apprises, et après j'ai fait mon anglais avec ma maman....

M. Maintenant on va faire des problèmes. On va commencer par celui de la dernière fois. Tu n'y étais pas arrivé parce que tu étais fatigué. Maintenant on va y arriver. Relis le problème. (Il y a un schéma qui accompagne le texte).

D. Un enfant va de A à C en passant par B.......

Je n'y arrive pas.

M. Attends tu n'as pas encore posé de questions.

D. Ah oui ! quelle distance a-t-il parcourue sur le deuxième tronçon ?

M. C'est-à-dire sur le deuxième bout

D. Sur le deuxième tronçon qui va de B à C

M. Tu vois il y a un dessin...... raconte moi le problème

D. il y a un enfant, il y a quelqu'un qui

M. On va dire que c'est toi

D. Alors moi ....

M. On va dire que tu pars d'ici

D. On va dire que le A c'est chez moi, on va dire que B c'est ici

M. Non, admettons que c'est Lionel Terray (Centre sportif, dans la suite LT), tu passes par LT pour venir ici ?

D. Oui

M. Et admettons que C, c'est ici. Qu'est-ce qu'on te donne comme renseignements?

D. On me donne que de là à là

M. C'est à dire de chez toi jusqu'à ....

D. LT, j'ai fait 37 m et de A jusqu'ici directement ça me fait 51 cm

M. 51 m ..... pour que ça soit plus vrai .... tu sais ce que ça fait 37 m en vrai ?

D. Non

M. Tu sais ce que ça fait 1 m ?

D. 100 cm

M. oui et ça fait comment 100 cm, tu peux me montrer ?

D. toute ma main (il montre son bras)

M. oui ça fait à peu près ton bras je vais te montrer....

D. De LT jusqu'ici, là je ne trouve pas du tout, du tout.

M. Bon pour que ça soit plus vrai, on pourrait dire qu'il y a 370 m, là c'est peut-être vrai. Tu vois on représente tout droit mais c'est pas tout droit.

D. Non il y a des tournants.

M. On représente droit pour simplifier. Tu vas tout droit de chez toi jusque chez moi, en entier ça fait 510 m, et de chez toi jusqu'à LT ça fait 370 m.

D. Ah j'ai compris, il faut que je réussisse à calculer combien je mets de temps, combien je mets de mètres pour arriver là.

M. De LT jusqu'ici.

D. Ben je vais essayer avec ça.

M. Tu as raison, c'est des plus petits nombres, tu fais avec ça et après tu feras l'autre.

D. Je ne crois pas que c'est 16

M. Comment tu as fait pour trouver ?

D. J'ai compté sur mes doigts

M. Dis comment tu as compté sur tes doigts

D. Eh ben j'étais à 37, j'ai arrêté de 37 et j'ai recommencé de 1 à 0

M. Vas y tout haut

D. 38, 39 ..... 51, 52, 53 ......

M. jusqu'où tu vas comme ça ?

D. jusqu'à 15

M. Il y a combien là ?

D. 51 m, donc là je dois mettre 15 m

M. vérifie

D. Si là je mets 15, ça fera 150 ici

M. Vérifie

D. Je ne sais pas comment vérifier

M. Si, imagine que tu te déplaces

D. Je me promène... mettons que je suis ici, c'est à peu près LT

M. Tu as déjà fais combien ?

D. Ben je ne sais pas moi

M. On a dit

D. 37 m, admettons que c'est 37 m, là jusqu'à là, 51 m

M. Et qu'est que tu me proposes pour le deuxième morceau

D. 15 m

M. On va vérifier

D. là je l'ai fait trop loin

M. Oui le dessin n'est pas juste, tu as raison. Comment on va vérifier ?

D. ça je ne sais pas, je ne vois pas du tout

M. Tu dis que tu fais 37 m de chez toi à LT, de LT jusque chez moi tu dis que tu fais 15 m, alors pour aller de chez toi jusque chez moi en passant par LT, combien tu fais de m ?

D. Ah il faut que j'additionne ces deux là. Ah j'avais pas compris.

M. Et combien ça fait ?

D. Attends, 37, 38 51

M. Essaie sans compter sur tes doigts. Comment ajouter 15 à 37 ?

D. Fastoche

M. Tu poses ?

D. 37 plus 15, 5 et 7 ça fait, ah là là je m'en rappelle même plus, j'ai perdu la mémoire, vous m'avez dit de ne pas compter sur les doigts.

M. Il faut que tu aies un moyen de retrouver

D. il faut pas que je compte sur les doigts sinon ça va être de la triche

M. Est-ce que tu sais ce que font 5 et 5

D. 5 et 5, 10

M. Alors 5 et 7, tu peux pas trouver ?

D. Ah ça fait 12 ... je pose 2, je retiens 1, ça fait 4, 5 c'est pas bon j'en ai 1 de plus, donc c'est 14 qu'il fallait mettre

M. Voilà très bien. Je trouve que tu fais des progrès, tu as trouvé beaucoup plus vite que la semaine dernière ... Et si c'était 370 et 510, ça serait combien pour celui là d'après toi ?

D. ça serait 140

M. Et comment tu as fait pour trouver ?

D. Parce que là, normalement c'est 37, 51 donc là ça doit être 14. Vous avez rajouté un zéro partout, et voilà !

M. Qu'est-ce que ça fait quand je rajoute un zéro partout

D. Là ça fait 140, 370, 510.

M. En dizaine c'est 37, 51et 14. Tu es d'accord ?

D. Oui

M. On va voir si tu as bien compris. Regarde ce qu'on dit maintenant, on va dire le temps. En fait c'est un parcours de course, parce que 37 m et 50 m c'est des distances que tu cours au stade .... par exemple tu cours 51 m et il y a un piquet à 37 m, combien il te reste à parcourir quand tu franchis le piquet ?

D. Eh ben il me reste 14.

M. Maintenant écoute bien ce qu'on te dit après, c'est sur le temps .....

D. 23 s sur le premier tronçon

M. C'est à dire sur la première partie de la course ...

D. De A à B, et 41 pour aller de A à C. Quel temps a-t-il mis sur le deuxième tronçon... Il peut pas avoir mis 14 ...

M. Répète ce qu'on te dit. Admettons qu'on met 23 s de chez moi jusqu'à LT, et là .... Pour faire tout le parcours tu mets ...

D. je mets 41 s, donc là, on me demande combien je dois faire

M. Combien tu mets entre LT et ici ? Oui, vas-y. Tiens, refais ton dessin en marquant les temps cette fois.

Il le fait, marque 23, 41.

D. Je vais essayer par l'addition, faites-moi voir ça .... 23 plus point point = 41 (il pose une addition à trous). C'est toujours par là qu'on doit faire ? Par en haut ou par en bas je ne m'en rappelle plus.

M. Réfléchis, qu'est que que tu cherches, tu vas retrouver

D. Je recherche le nombre qu'il doit y avoir là.

M. Vas-y, cherche-le. Comment tu peux faire pour le trouver ?

D. Je ne sais pas

M. Comment tu fais une addition d'habitude ? Si tu connaissais ce nombre tu dirais...

D. 23 ...

M. Tu t'occupes des unités d'abord

D. Oui 3 +

M. 3 + quelque chose que tu ne connais pas, ça doit faire combien ?

D. 4

M. Pourquoi 4 ? Non. 3 + quelque chose que tu ne connais pas, ça doit faire combien pour que tu écrives un 1 ?

D. 3 + quelque chose que je ne connais pas .... (répété trois fois) ouh là là

M. Qu'est que que tu dois faire pour trouver 41. Il faut que ça se termine par un 1.

D. Ah

Mon fils, Nicolas (13 ans) qui venait d'entrer dans la pièce, réexplique et conclut "essaie, tu n'as pas 36 nombres à essayer"

D. Heureusement parce que s'il y'en avait 36 ouh là là. Si je mets un zéro

M. ça fait quoi ici

D. 3

M. Donc, ça va pas

D. Je sais pas

Nicolas : Essaie autre chose !

D. Si je mets 1, ça ferait 4 ici

M. Est-ce que ça va ?

D. Non il y a un 4 ici ... si je mets 9 ça fera 13

M. Comment tu comptes ?

D. 9, 10, 11, 12, 13

M. Mais non, fais 9 et 3 correctement s'il te plaît !

D. Je vais l'écrire en addition

M. ça ne te sert à rien, 9 et 3 tu es obligé de le faire dans ta tête. Tu as mal compté sur tes doigts.

D. 10 11 12 13 14

M. Pourquoi tu rajoutes 5 ? 9 et 3 ?

D. 9, 10 11 12. ça doit donner 12.

M. Alors est-ce que ça va ?

D. Non ça aurait fait 5

M. Non, ça aurait fait 2 là. Alors, qu'est-ce qu'il faut que tu écrives ?

D. Ah, ... Il y a pas 36 solutions, hein, pour ce problème...

M. Quest-ce que tu cherches là ? Tu ne cherches pas !

D. Si !

M. Alors cherche activement. Dis tout haut ce que tu cherches !

D. Je cherche des nombres pour aller à 1... Je crois bien que j'ai eu chaud cette fois-ci. Non, je crois bien que je vais essayer par la soustraction.

M. Si tu veux, essaie la soustraction, on reviendra sur celui-là.

Il commence 23 - ... Nicolas intervient : "tu ne peux pas enlever 41 à 23."

D. Qu'est-ce qui m'arrive aujourd'hui ?

Il pose 41 - 23.

D. ça, on peut pas, je dois mettre une retenue ici et je dois remettre la retenue là. Alors 11 - 3, de 3 pour aller à 11, ça fait 3, 4, ... 11, ça en fait 8. De 3 pour aller à 4 ça fait 1. Et ben c'est pas 18 !

M. Essaie.

Il pose 23 + 18

D. ça marche, si ! je trouve le bon résultat, donc je mets 18 s de LT jusqu'ici

M. Je vais te poser un autre problème

D. Ah non j'en ai assez

M. J'achète des stylos à bille qui valent 3 F chacun

D. Vous en achetez combien ?

M. J'en achète pour toute la classe. Il y a combien d'élèves dans ta classe ?

D. on est 18

M. 18 élèves. Des stylos à bille qui coûtent 3 F chacun pour tous les élèves. Et j'achète aussi des cahiers qui valent 4 F chacun. Dis-moi combien d'argent j'aurai dépensé.

D. Alors j'ai 18 élèves. Je veux acheter 18 cahiers à 4 F et 18 stylos à 3 F. Ah non je peux pas faire une addition là, ah ben je vais essayer ....

M. Tu as plusieurs manières de faire

D. Je vais essayer 4 fois 18 (il la pose). Non, non .... ah si je vais essayer quand même.

M. ça te donnera quoi 4 fois 18 ?

D. ça va déjà me donner combien j'ai utilisé pour les cahiers. Alors je vais la poser parce que si je la pose pas je suis nul .... 8 fois 4, je vais faire 4 fois 8, ça sera mieux, 8 et 8, 16, 16 et 16, 32. 2, je retiens 3, la retenue je l'entoure, parce que c'est comme ça qu'elle nous l'a appris, la maîtresse. 8 fois 3

M. Non

D. C'est une retenue

M. Mets ta retenue, oui, 4 fois 8 = 32

D. Ah oui, 1 fois 4, ça fait 4, ici je mets un point. C'est bon ..... J'additionne maintenant. 2 et rien ça fait 2, 3 et 4, ça fait 6, non 7.

Il continue, fait 3 X 18, ajoute.

Je pose une dernière question : je paye avec un billet de 200 F, combien me rend-on ?

Didier pose 200 - 126 et fait correctement la soustraction.

17 octobre

Travail en calcul mental :

Didier essaie de faire 11x15 sans écrire :

D. une fois 5, ça fait 5, une fois 5 encore une fois parce qu'on doit faire comme ça et comme ça, ça fait 5. Après une fois 1, ça fait 1, encore une fois 1, ça fait 1. Moi, j'ai trouvé 15 !

M. Alors, est-ce que tu pourrais trouver 10 fois 15 ?

D. Non, ça peut pas être 150.

M. Pourquoi ?

D. Attendez, il faut que je réfléchisse, parce qu'il faut toujours réfléchir avant de dire une bêtise. Ah, oui, je vais vous dire pourquoi. Parce que moi, je me suis arrêté à 10, 10 fois 15... et je me suis dit avec 11, ça fait 110, avec 12, 120, avec 13, 130, avec 14, ça fait 140, ... ça fait 150.

M. 10x15, ça fait 150, tu en es sûr ? ... Alors, est-ce que tu peux trouver 11 fois 15 ?

D. 151, je dis ça au hasard.

M. Pourquoi 151 ? Ecoute, admettons que tu aies des boîtes de chocolats et il y a 15 chocolats dans chaque boîte.

D. Et il y a combien de boîtes ?

M. 11 boîtes.

D. Ah, là, il faut que je le fasse aussi par l'écrit.

M. Non, tu as déjà fait du travail, vas-y, aujourd'hui, on travaille d'abord par l'oral, je te donnerai le papier et le crayon après.

D. Qu'est-ce-que vous m'avez dit ?

Je répète.

D. 15 et 15 ça fiat 30, 30 et 15, ça fait 45. 15 et 40, ça fait 55.

M. On n'en était pas à 40, on était à 45.

D. 40 et 15, ça fait 45.

M.Tu te perds, là, reprends.

D. 15 et 15, ça fait 30, 15 et 30... c'est ça ? Je me rappelle plus.

M. Qu'est-ce que tu cherches à faire ?

D. J'essaie de voir combien ça fait. Je réussis pas. Chaque fois, il faut que je me perds.

M. Pourquoi tu n'y arrives pas ?

D. Parce que je ne réfléchis pas assez.

M. Tu te perds parce que tu ne sais plus où tu en es dans tes +15. Tu fais +15 ... +15, tu rajoutes une boîte à chaque fois. *Est-ce que tu ne connais pas un moyen qui te permette de trouver plus vite le nombre de chocolats parce que le problème, c'est que tu te perds avec tout ça ... Tu ne sais plus combien de boîtes tu as comptées.*

M; (après avoir répété le problème). Qu'est-ce que tu pourrais faire ?

D. une multiplication... non, une addition. A moins que je parte d'un nombre et puis j'en retire 15.

M. Qu'est-ce que c'était ta méthode ?

D. Je voulais faire + + + jusqu'à ce que je trouve le nombre.

M. Vas-y. N'oublie pas de compter les boîtes..

Après avoir ajouté encore 3 fois 15, il perd le fil à nouveau et n'arrive plus à utiliser les méthodes précédentes.

D. 75. J'ai déjà combien de boîtes là ? Je crois que j'en ai 5. Après 75, c'est 85

M. Ah, tu crois, 75 et 15 ?

D. 85

M. Non, 75 et 15

D. C'est pas 95 ?

M. Non plus, regarde 75, pour ajouter 15 qu'est-ce que tu peux faire d'abord ? Essaie que ce soit plus facile ... 15 c'est 10 et 5.

D. Donc je pose déjà le 5, ça fera 80, ça fera 90.

M. Oui

D. ça fera déjà 7 boîtes, ah non, ça fera 6, parce que tout à l'heure j'en étais à 5

M. oui, bon 90, après ?

D. 95

M. C'est 15

D. 100, là c'est dans les 100, 115, 105, je me trompe.

M. 105

D. ça fait 7 boîtes 115 130

M. Tu en étais à 105, 105 et 15 comment tu as fait ?

D. j'ai compté sur mes doigts

M. Ah bon, voilà, tu te trompes toujours quand tu comptes sur tes doigts. C'est trop grand pour que tu comptes sur tes doigts. Comment tu fais pour rajouter 15, on a dit.

D. 105, attendez 125 ça fera.

M. mais non, 105 tu ajoutes déjà 5, ça fait ?

D. 110

M. Et encore ?

D. 10

M. ça fait ?

D. 120

M. Voilà

D. Après c'est 135, après 145

M. Non, 145, regarde, est-ce que ça peut se terminer par un 5 après 135 ?

D. Non, 140

M. 135 et 5 ça fait 140

D. Ah oui, c'est des nombres impairs.

M. Lesquels sont impairs ?

D. Les numéros impairs c'est 1, 3, 5, ... 19

M. D'accord, et là où on en était ?

D. 7 boîtes

M. 7 boîtes, tu te souviens combien c'était ?

D. Non

M. Ah, tu vois, il faut aussi compter les boîtes. On en était à 135, c'est pas 7 boîtes.

D. C'était 105, 7 boîtes

M. 105, 7 boîtes, d'accord, alors 135, c'était combien ?

D. 8 boîtes

M. Non, parce que de 105 à 135, il y a combien ?

D. 15

M. De 105 à 135 il y a 15 ? On l'entend rien qu'au son, 105, 135, combien de plus ?

D. 15, si c'est plus un il y a 15

M. Didier, tu étais à 7 alors on recommence à 7, 105, alors 8, ça fera combien ?

D. 135

M. Non

D. Ah, 105 120

M. 120 pour 8, alors pour 9 ?

D. 135

M. pour 10 ?

D. 145

M. Non

D. 160

M. 135 et 5, 140 et qu'est-ce que tu dois ajouter ?

D. 150, et 11 c'est .... 150, 155, 160, 170 ....

M. 165. Tu as trouvé le résultat, mais tu t'es fatigué beaucoup. Est-ce que tu n'aurais pas pu trouvé plus vite le résultat pour 10 boîtes ? Dans chaque boîte, il y a 15 chocolats, si il y a 10 boîtes, est-ce que tu aurais pu trouver plus vite ?

D. Non, j'aurais pas pu trouver plus vite.

M. Pourquoi ? Tu l'avais pourtant trouvé tout à l'heure

D. Ah si, en comptant les dizaines.

M. Et alors combien de dizaines tu devais trouver ?

D. Ben, je m'en rappelle plus. Oh là là, j'ai une courte mémoire sans doute.

M. Je te rappelle qu'on a 15 chocolats dans chaque boîte et 10 boîtes.

D. Ah, 10, attendez ça fait 110, 120, ... il compte de 10 en 10 jusqu'à 240.

M. Qu'est-ce que tu es en train de chercher ?

D. Moi, je suis en train de chercher si je pouvais trouver plus vite.

M. Dis-moi si c'étaient des boîtes de 10 chocolats et que tu aies 15 boîtes, est-ce que tu aurais trouvé facilement ? Disons qu'on a des sacs de billes. Tu as 10 billes dans chaque sac et tu as 15 sacs, est-ce que tu aurais trouvé facilement ?

D. Non

M. Tu as 10 billes dans un sac, dans 2 tu en aurais combien ?

D. 10 et 10, 20, après 30, 40, 50.

M. Et alors dans 15 sacs, essaie de dire tout de suite.

D. 155

M. 150, pas 155. Comment tu fais pour trouver vite ?

D. 10, 20, 30.... il continue jusqu'à 100 ....

M. Oui, tu ajoutes des 10, et alors là tu avais combien de fois 10 ?

D. 10 fois

M. Non, tu avais 15 fois 10

D. Ah, je croyais que vous me disiez pour ce que je viens de vous dire.

M. Oui, alors est-ce que c'est pareil 10 boîtes avec 15 chocolats dans chaque boîte, ou 15 boîtes avec 10 chocolats dans chaque ....

D. ça fera 150

M. Je peux prendre un chocolat dans chaque boîte et je remplis des petits sacs de 10 chocolats. Combien j'aurai de sacs ?

D. 15

M. Alors est-ce que tu peux trouver facilement 10 fois 15 ?

D. 10 fois 15 ça fait 150

M. et 10 fois 23, tu peux trouver facilement ?

D. Non.

M. Essaie.

D. Ah là là

M. Et 23 fois 10 ?

D. Attendez 10, 20, 30, 40 ...

M. Est-ce que tu as besoin de compter toutes les dizaines sur tes doigts ? Il y a combien de dizaines ?

D. Il y en a 23

M. Est-ce que tu as déjà fait des tableaux comme ça avec des dizaines et des unités?

D. Oui j'en ai fait quand j'étais ...

M. 23 dizaines, tu es d'accord, c'est 23 fois 10 ? Comment ça s'écrit 23 dizaines?

Didier écrit | 2 | 3 | dz

M. Si tu veux, mets 23 dizaines ça fait combien d'unités ?

D. 3 unités et 2 dizaines

M. Non, je te dis que j'ai 23 dizaines. Si j'ai 23 dizaines de billes, ça fait combien de billes ?

D. ça fait 230

M. Oui, comment tu as fait pour le trouver ?

D. J'ai compté les dizaines

M. Comment

D. 10, 20, 30,40 ...

M. tu es obligé de faire comme ça ? Regarde quand tu as ton tableau, là, tu as les unités, là tu as les dizaines, là, tu as les centaines. Le nombre 23 dizaines, tu l'écris comme ça, 0 unités, tu trouves tout de suite.

D. Ah, c'est fastoche ! vous pouvez m'en donner une série ?

....

M. Si je te donne 148, il y a combien de dizaines dedans ?

D. 48

M. Non, combien de dizaines dans 148 ?

D. 4

M. Oui, mais il y a aussi une centaine, alors ça fait 14 dizaines, le nombre de dizaines c'est 14. Tu comprends, quand tu fais des dizaines, tu fais des paquets de 10, si, avec 148, tu fais des paquets de 10, combien tu vas en trouver ?

D. Vous m'avez dit 14 ? 14 fois 10

M. Oui c'est 14 fois 10 plus 8.

D. Tout à l'heure c'était combien 11 fois 15 ?

M. Tu vas le retrouver maintenant

D. 150

M. ça, c'était 10 fois 15, alors 11 fois 15 ?

D. 154

M. Non 150 et 15, qu'est-ce que tu peux faire ?

D. Ajouter 5

M. Si tu veux, mais tu peux aussi ajouter 10, quand tu as un nombre entier de dizaines, c'est très facile et tu sais très bien le faire. Pour ajouter 15, tu peux ajouter 10 et 5 ou 5 et 10, ce qui t'arrange le mieux pour aller plus vite à une dizaine. Alors là, tu es à 150, tu vas ajouter 10, ça va te faire ?

D. 160

M. Et encore 5

D. 165

M. Tu vas compter de 10 en 10 à partir de 165

D. 170

M. J'ai dit de 10 en 10

D. 175, cent soixante vingt cinq, non 165.

M. 165 tu avais commencé là

D. 175, 170, attendez

M. Ecris le ....

D. ça doit toujours se terminer par un 5

M. Oui, c'est bien, après ?

D. 185 190

M. Regarde bien

D. 195, 205, 215, 225

Il va plus vite, mais de 255, passe 2 fois de suite à 305

M. Si tu n'avais pas le 200, 55 et 10 ?

D. 65, donc ça fait 265.

Il continue correctement jusqu'à 325

M. Est-ce que c'est facile maintenant ?

D. il y a que des 5 à la fin et devant 2, 3, 4, 5, 6 ....

21 novembre

Didier travaille sur l'écriture des grands nombres à l'école et souhaite en faire.

Ecrire 4 millions. Il écrit 40000.

M. Comment vérifier ?

D. On groupe 1, 2, 3. (il met un point) Ah, non c'est quarante mille.

M. Pour 4 millions?

Il écrit 40000000 en comptant les zéros 1, 2, ... 7, puis regroupe en mettant des points, pour relire et lit 40 millions.

M. Tu groupes comment ?

D. Par trois

M. Qu'est-ce que tu dois obtenir à la fin ?

D. 4 millions

M. Tu dois avoir combien de groupements ?

D. Comment ?.... Peut-être ça (400000)

Enfin il arrive à écrire 4 millions.

Je lui demande d'écrire 72 mille. Il écrit 720000000 puis 720000. A chaque fois, il relit correctement ce qu'il a écrit mais ne semble pas pouvoir prévoir. Enfin,

D. Ah! j'ai trouvé ! et il écrit correctement 72000.
M. Et mille, est-ce que tu sais l'écrire ?
D. Bien sûr ! ... Il écrit 10000.
M. Tu es sûr ? ... Il recompte et corrige.
M. Tu te souviens du tableau ?
D. Oui, c'est-ce qu'on a fait.
Il prépare son tableau et commente : unités, dizaines, centaines, unités de mille, dizaines de mille, centaines de mille, unités de millions, dizaines de millions, centaines de millions (c'est-ce qu'il a appris à l'école depuis la dernière fois).
...
Je sors les baguettes Cuisenaire qu'on examine. Didier trouve sans peine que si la petite vaut 10, les autres valent 10, 20 ... 100, et que si la petite vaut 100, la grande vaut 1000.
M. Et si le petit cube vaut 12 ?
D. 1002.
M. Tu crois ?
D. non !
M. Vérifie !
D. 12, 24, 24 et 24, 48, 48 et 48, 56.
M. Non, 48 et 48, tu as oublié quelque chose.
Il pose l'opération et trouve 96.
D. Où j'en étais au fait ? 12, 24, 48, 56.
M. Pourquoi 56, tu avais dit 48 et 48 ?
D. 96.
M. Mais combien pour 48 ? sors-les.
Il sort les petits cubes au fur et à mesure et continue
D. 96 et 12, déjà, 102, et encore 12.
M. 96 et 12 ?
Didier pose l'opération .
M. De tête.
D. J'y arrive pas !
Il la fait cependant de tête et trouve bien 108. et continue 108... 118... 120.
M. Didier, quand tu fais 10 fois 12, est-ce que c'est différent de 12 fois 10 ?
D. Non, c'est pareil.
M. Et alors, 12 fois 10, est-ce que tu saurais le faire vite ?
D. 120, ça fait.
M. Et 15 fois 10, ça fait combien ?
D. Attendez .
Il pose 10
x 15 ... et trouve 150 avant d'ajouter
D. Ah, oui ! j'avais qu'à faire le truc qu'elle nous avait donné, la maîtresse ! Par exemple, elle nous dit : on écrit 15, on ajoute le 0 et ça donne le résultat !
M. Et pourquoi ? On dit que chaque petit baton vaut 10, et on fait 15 fois 10.
Didier compte 10, 20, ... 150.
M. 47 fois 10.
Didier commence à compter de 10 en 10 et se perd....
M. Essaie 40 fois 10 de tête.
D. 4 fois 10, ça fait 40, et un 0, ça fait 400.
M. 40 fois 10, tu sais le faire, et 47 fois 10 ?
D. 407
M. Non, 47, c'est 40 + 7. Reprends les baguettes, fais 47 avec les baguettes.
Il le fait (4 grandes et 7 petits cubes).
M. Fais fois 10.
D. 100, 200, 300, 400 et 7, 407.
M. Non, ça n'est pas 7, c'est 7 fois 10.
D. 70, ça fait 470.
M. On recommence, 38 fois 10.
D. 308.
M. On recommence avec les baguettes. On fait 38 et après on dit que chaque petit carré vaut 10, ce n'est plus une unité, c'est une dizaine.
Didier fait 38 avec ses baguettes (3 grandes et 8 petites).
M. Et maintenant le petit cube vaut 10, combien vaut la baguette orange ?
D. 100. ... 100, 200, 300, 308.
M. Celui-là vaut 10, alors ?
D. 8 fois 10, 80, 380.
M. Reprends le tableau, écris 38 fois 10 dans le tableau. Comment dire "fois 10"? C'est 38 dizaines.
Il veut écrire 38 en mettant le 8 dans la colonne des unités.
M. Non, ça, ça ferait 38 unités, 38 dizaines, tu mets le 8 dans la colonne des dizaines. ... Quel nombre ça fait ?
D. 380, parce qu'ici, comme il y a rien, on va dire qu'il y aura un 0.
M. 57 dizaines.
D. C'est comme ça, la maîtresse, elle nous a dit : on met le 57 et on rajoute un 0, et on trouve le nombre.
M. Eh oui, le 0, c'est fois 10.
D. Et si c'était 57 fois 20, il y aurait un 0, ici le 7, ici le 5.
M. Non, ça c'est "fois 100". "fois 20", c'est "fois 2" "fois 10".
A la fin de la séance, on écrit encore quelques grands nombres dans le tableau.

28 novembre.
On commence par écrire des grands nombres dans le tableau de numération.
Didier s'en tire assez bien. Sans le tableau, Didier écrit correctement 12613. Pour 8042, il commence à écrire 8000 et s'arrête.
M. pense à ton tableau. Tu mets où ton 8 ?
D. Dans les mille
M. J'ai dit 8042
Didier écrit correctement 8042
M. On va faire les grands nombres avec le tableau et les plus petits sans.
D. Je voudrais essayer un gros sans le tableau ..... Pas un trop trop trop gros
M. D'accord un 1 million trois cent mille cent.
Il le fait très bien
D. Je l'ai fait sans hésiter
M. Il n'y avait pas trop de pièges dans celui-là
D. Vous m'en faites un avec des pièges s'il vous plait ?
M. 40 101
Il le fait correctement.
M. Très bien. Il faut que tu apprennes à écouter. On entend en fait. Maintenant un million 402.
Il écrit 1400002. Il lit un million 402 puis un million 4102. Je répète en ajoutant "est-ce que j'ai dit quelque chose dans les mille ?"
D. Ah !
il écrit correctement .
D. Après vous pourrez me faire une dictée de nombres ?
M. Qu'est-ce que tu crois qu'on est en train de faire là ? C'est ça !
Il écrit encore correctement 73012, 1005, 100 040 et bute 10400050. Il réussit 4050068, 17401072 et 60018017.
M. Maintenant un peu de calcul mental, tu vas compter de dix en dix à partir de 118.
Il le fait bien jusqu'à 208 mais saute 218. Je le lui fais remarquer, il corrige et continue bien. Je l'arrête à 318 et on recommence à partir de 917. Cela va bien jusqu'à 1097, il passe à 2007 mais peut corriger quand je le lui demande. Il a du mal cependant à faire 2007 - 10.

M. Maintenant on va multiplier par 10, 17 X 10

D. Au fait, je voulais vous dire, avec la maîtresse on a appris la multiplication à 2 chiffres, moi j'avais déjà appris avec ma grande soeur.

Il pose 17 fois 10, je lui dis "non, alors, fais 17 fois 12". A la 2ème ligne, il dit "je pose un zéro". Je lui demande pourquoi. Il répond "la maîtresse a dit que c'est très important"

....

M. On va le refaire de tête. On a vu la semaine dernière que c'est facile de multiplier par 10.

D. Je vais le faire. 0 fois 7...

M. Non pas comme ça. Si tu veux la poser dans ta tête après tu n'arriveras pas à faire des multiplications plus grandes. Je veux t'apprendre des techniques pour que tu puisses aller loin après .... tu te souviens des sacs de billes. Dans chaque sac, il y a 10 billes, on a 17 sacs, ça fait combien de billes ?

D. 170, j'ai rajouté le 0.

M. Et 2 fois 17 ?

D. 2x17, 14

M. 2x17, 14 ?

D. Je croyais que vous m'aviez dit 2x7.

M. oui, 2x7, 14, et 2x10 ?`

D. 20

M. 20 + 14 ?

D. 34.

M. 2x17, ça fait 34, et 10x17, 170, donc 12x17 ?

D. 204 (il lit sur l'opération qu'il avait effectuée).

On continue quelques multiplications par 10 que Didier effectue en ajoutant un 0, 10x 25, 10x112, 10x 4317, 10x 1942. Il accroche une ou deux fois sur la lecture du résultat et commente "oh là là ! c'est en lecture des nombres, maintenant, que je suis nul !

M. Mais, non, d'ailleurs, je trouve que tu as fait des progrès en concentration depuis le début de l'année.

D. Le problème, c'est que ça rentre par là et que ça sort par là !

M. Il faut écouter avec tes deux oreilles, comme ça, ça rentre par les deux oreilles !

D. Et ça ressort pas !

Didier parle de ses oiseaux et veut un problème avec des oiseaux. Je choisis un pigeon voyageur qui doit faire 200 km pour aller de Paris à Lille, et qui s'arrête à 60 km de Paris. Combien lui reste-t-il à faire ?

Didier demande "combien de km de Paris à Lille ? 102 ? puis répète le problème en disant partout m au lieu de km. Il propose de faire 200 - 60 en posant la soustraction. Il le fait.

M. De tête tu n'aurais pas pu ?

D. Non.

M. Et de 60, combien pour aller à 100 ?

D. J'aurais pas pu non plus

M. Et de 6 pour aller à 10 ?

D. 4

M. Alors ? Quand on est à 60, pour aller à 100 ?

D. 40.

On change de problème. Je lui demande l'âge de sa soeur. Actuellement, Didier a 9 ans et sa soeur 2 ans. Je lui demande quel âge aura sa soeur quand il aura 18 ans.

D. 9 ans .... ah non, 11 ans. Je l'ai fait de tête, j'avais déjà les 2 dans la tête, et j'ai compté jusqu'à 18 combien il y avait, et j'ai coupé à la moitié et j'ai rajouté les 2, donc elle aura 11.

M. Parce qu'il va se passer combien d'années jusqu'à tes 18 ans ?

D. 9 ans.

M. Quand tu auras 35 ans, elle aura quel âge ?

D. A partir de 11 ans ?

M. Non, quand toi , tu auras 35 ans elle aura quel âge ?

D. Elle aura 25 ans ... non ....

M. Comment on pourrait savoir ?

D. 23 ans, elle aura

M. Comment tu sais ?

D. Parce que j'ai fait .... j'ai partagé 35, ça a fait 25, alors j'ai enlevé 2, ça a fait 23.

M. Je ne comprends pas très bien tes explications. Tu partages 35 et ça fait 25. Je voudrais que l'on vérifie.

D. Oui mais je ne sais pas encore faire les divisions.

M. Mais tu n'as pas besoin de faire des divisions, on va faire un tableau, on va marquer là l'âge de Didier et là l'âge de Katia. On est sûr que quand Didier a 9 ans, Katia a 2 ans, et tu as trouvé?

D. 18 ans, 11 ans

M. Et si tu as 35 ?

D. Je vais vous montrer 35 .... disons que je compte la moitié

M. Et pourquoi tu comptes la moitié

D. Regardez ... 10, ça fait déjà 20, et après je reprends encore 10 et après il reste encore un 5, alors je le mets là, ça va faire 25.

M. Et pourquoi 25, je t'ai dit 35 !

D. Ben, justement, ça va être la moitié, je vous dis.

M. Et pourquoi il faudrait faire la moitié ?

D. Et après on fait plus 2

M. Et pourquoi la moitié ? Je ne comprends pas

D. Ici j'ai fait la moitié regardez.

M. Ah oui, mais, pourquoi la moité, 18 c'était le double de 9.

D. C'est dur cette fois-ci

M. Si c'est dur, tu peux peut être chercher des intermédiaires

D. Comment, je ne comprends pas

M. Tu ne vas pas passer directement de 18 ans à 35 ans.

D. Ah non, sûrement pas

M. Il va peut être y avoir des intermédiaires plus faciles à calculer

D. Bon, disons que j'en ai 18. 18 et 18, ça fait combien au fait ... 32 ? non ... 36 ! j'enlève un, ça fait 35, alors si je veux faire la même chose, il faut que ça donne 25, vous comprenez.

M. La moitié de 35, tu penses que ça fait 25 ?

D. Oui

M. On va vérifier, combien ça fait 25 et 25 ?

D. 5 + 5, 10 je pose 0, je retiens 1

M. Tu ne peux pas le faire comme ça, sans poser ?

D. Non, ça ne fait pas 35.

M. Et ça fait combien 25 et 25 ?

D. ça fait 50.... Il faut que je réussise à trouver la moitié. 10 et 10, ça fait 20 ... voilà ... mais oui j'ai trouvé, je vais faire 20 + 25, donc la moitié

M. ça fait combien 20 + 25

D. 35

M. Non

D. 45 ! 10 + 25, si je mets 5 du côté du 10, ça fait 15 + 20

M. ça t'aide de faire 15 + 20 ?

D. J'espère

M. Sais-tu quel âge aura Katia quand tu auras 15 ans ? Ecris 15 dans le tableau

D. là il y a un problème. Si ça avait été 0 là, ça aurait été.

M. Eh bien, cherche 10 déjà.

D. Disons que c'est 10

M. Quand tu auras 10 ans ?

D. Ben, elle aura 3 ans

M. Ah c'est facile, écris le dans le tableau

D. Admettons que j'aie encore 5 ans

M. Bon, 5 ans plus tard

D. Non, 5 ans avant.

M. Ah ! 5 ans avant ! Tu avais quel âge ?

Didier éclate de rire et dit "Katia n'était pas encore née !" Elle est née en 85.

M. Cherche quand tu auras 15 ans. D. Je pars de 3, hein ?

M. Si tu veux, marque 15 dans le tableau.

D. Je pars de 3, 4, 5 ,... 15, 16, 17, 18. Non, certainement pas 18 ans ! Attendez !

Il rit.

M. A ton avis, qui est-ce qui vieillit plus vite, Katia ou toi ?

D. Ben moi, certainement !

M. Ah, tu vieillis plus vite que Katia, tu penses ?

D. Ben oui, ben oui !

M. Tu es plus vieux, mais est-ce que tu vieillis plus vite?

D. Attendez, laissez-moi réfléchir ... Ah, j'ai un microbe à la place du cerveau !

Je repose la question

D. 12 ans

M. On va vérifier

D. Elle a quel âge maintenant ? 2 ans

M. Oui et l'an prochain ? 10 ans, 3 ans, tu es sûr ?

D. Oui

M. On va continuer : en 89 ?

D. 11 ans, 4 ans, 12 ans, 5, 13 ans, 6, 15 ans

M. 14 ans

D. Non

M. Ah, tu sautes, d'accord 15 ans, quand tu auras 15 ans elle aura quel âge ?

D. 12 ans

M. Ah, tu crois, brusquement toi quand tu passes de 13 à 15, elle, passe de 6 à 12, elle grandit beaucoup !

D. Je mets 4 d'abord (i.e. 14), ça va faire 9

M. Quand tu as 13 ans, elle a 6 ans, quand tu as 14 ans, elle a quel âge ?

D. 9 ans

M. Tu crois qu'elle va sauter de 6 à 9 ? Toi, tu vieillis d'un an et elle vieillit de combien ?

D. D'un an aussi ... donc elle aura 7 ans

M. Ben oui, et quand tu auras 15 ans, elle aura quel âge ?

D. 8 ans

M. Oui, elle aura 8 ans, elle aura pas 12 ans. Regarde tu avais trouvé que quand tu aurais 18 ans, elle aurait 11 ans, alors quand même quand tu aurais 15 ans, elle aurait moins que 11 ans c'est normal.

Didier rit

M. Quand même elle grandit vite, ta soeur avec toi, tu crois qu'elle va te rattraper?

D. Je crois bien, enfin je croyais bien.

M. Est-ce que tu peux trouver directement lorsque tu auras 20 ans ?

D. Je peux continuer là ?

M. Oui, mais est-ce que tu ne peux pas trouver directement ? Tu as 15 et 8

D. 15 et 8 ça fait ?

M. Mais non pourquoi 15 et 8 ? Quand tu auras 20 ans, toi, écris 20, alors quel âge aura Katia ?

D. 7, 8, 9, 10.

M. Là quand tu as 15 ans, elle a 8 ans

D. 7, 8, 9 ..... euh, 15, 16 ..... 34, 35. Elle aura 35 ans

M. Ah, tu crois que quand tu auras 20 ans, elle aura 35 ans ! elle est plus jeune que toi, ta soeur!

Didier rit

M. Combien il va se passer de temps entre tes 15 ans et tes 20 ans ?

D. 5 ans

M. Et pour Katia il va se passer combien de temps ?

D. Elle a quel âge là ?

M. 8 ans .... silence .... entre tes 15 ans et tes 20 ans, il se passe 5 ans, pour Katia aussi, il se passe 5 ans.

D. Attendez, laissez moi recommencer, alors elle a ?

M. 8 ans, 5 ans plus tard elle aura ?

D. 13 ans

M. Voilà quand tu auras 20 ans, elle aura 13 ans. Allez, on va aller jusqu'à 35 comme ça

D. Ah non !

M. Si, on va aller directement à 30

D. 5 ans plus tard

M. C'est combien d'années plus tard, pour aller de 20 à 30 ans ? Il se sera passé combien de temps pour toi ?

D. 2 ans, 15 ans elle aura.

M. Dis donc, Didier, quand tu as 20 ans, il te faut combien de temps pour passer à 30 ans ?

D. 1 an

M. Ah bon ? quand tu as 20 ans, l'année d'après tu as 30 ans ?

D. Ben oui

M. Qu'est-ce que tu vas vieillir vite, tu as être bientôt grand-père ! Tu as un grand frère, il a déjà eu ses 20 ans.

D. Depuis longtemps ! Il a eu 24 ans cette année

M. Et après 20 ans il a eu 30 ans !

D. Non, il a eu 21 ans.

M. Et alors ? il faut combien de temps pour passer de 20 ans à 30 ans ? Ton frère a eu 20 ans depuis longtemps et il n'a pas encore 30 ans !

D. Un an, elle aura 14 ans !

M. Pour passer de 20 ans à 30 ans, il faut un an ?

D. Il faut 10 ans, 10 ans plus tard ça fait 23 ans

M. Oui, elle vieillit à la même vitesse que toi ... et alors quand tu auras 35 ans ?

D. 5 ans plus tard, ça va faire 28 ans.

M. On va faire une méthode pour aller plus vite. Tu as combien d'années de plus que ta soeur ? Tu avais quel âge quand ta soeur est née ? On va reculer en arrière. Là, tu as 9 ans et Katia 2 ans. L'année dernière qu'est-ce qui se passait ?

D. Katia avait un an, donc j'avais 8 ans, j'avais 7 ans quand Katia est née.

M. Donc tu as combien d'années de plus que Katia ?

D. 2

M. Tu as 2 ans de plus que Katia !

D. Non, 5 ans

M. 7 ans ! quand elle est née, tu avais 7 ans

D. Mais oui ! en 82 je suis parti en vacances à l'Ile Maurice, donc ça fait 7 ans que j'y ai pas remis les pieds.

M. Non, si tu y es allé en 82, ça fait pas 7 ans, ça fait combien ?

Didier compte 82, 83, 84,85, 86, 87, 88, 8......

M. 87, arrête toi.

D. Ah, 5 ans ça fait 5 ans que j'y ai pas remis les pieds !

M. Et Katia n'était pas née !

D. Certainement pas !

M. Quand elle est née, tu avais 7 ans, après elle a un an et toi 8 etc .... Tu as toujours 7 ans de plus qu'elle et elle a toujours 7 ans de moins que toi.

D. Bé oui !

M. Comment on peut vérifier qu'on s'est pas trompé ?

D. On fait 35 - 28

M. Si tu veux ou bien, plus simplement, 35 - 7, et on doit trouver ?

D. 28
M. Et quand tu auras 70 ans, quel âge aura Katia ?
D. 70 - 7
M. De tête
D. j'y arrive pas
Il pose la soustraction et trouve 63 ans.

5 décembre (avec Claude).
A la demande de Didier, on commence par travailler sur l'écriture des grands nombres, sans tableau, cette fois. Il ne fait aucune erreur sur 1022, 14013, 101307, 1004212, 120104005.
M. Sur l'autoroute on paie 25 centimes par kilomètre. De Paris à Lyon, il y a à peu près 400 km à péage.
D. 400 X 25, on fait.
M. Et ça fait combien ?
D. Je peux faire par écrit
M. On peut faire de tête ça, 4 X 25, on sait par coeur ce que ça fait
D. 5 X 4 ça fait...
M. On fait pas comme ça pour multiplier par 4 de tête, on multiplie 2 fois par 2, 4 X 25 c'est un résultat à savoir, et tu vas le retrouver très vite. Alors 2 X 25, qu'est-ce que ça fait ?
D. 2 X 25 ça fait 45
M. Oh !
D. ça fait 50 et 4 x 25 ça fait 100
M. Si 4 X 25 ça fait 100, 400 X 25 qu'est-ce que ça fait ?
D. Je vais écrire le nombre, je sais pas le dire.
Il écrit et lit 100 000.
M. Pourquoi 100 000 ? Essaie de réfléchir. Tu dis 4 X 25 ça fait 100, si c'était 40 X 25 ?
D. ça je sais pas ... non pas 200 .... ça ferait 1000.
M. Pourquoi ? 4 X 25 ça fait 100, alors 40 X 25 ?
D. Je sais pas
M. 10 fois, 40 X 25 c'est 10 fois 4 X 25, 4 X 25 ça fait 100
D. 100, 200, 300 ....
M. Non, pas comme ça, 10 X 100 ça fait 1000, et 400 X 25 ?
D. Je dis au hasard
M. On sait que 40 X 25 ça fait 1000.
D. Attendez j'ai une cervelle d'oiseau, un petit pois, un microbe quoi !
M. Il faut se concentrer. On cherche 400 X 25 dans sa tête et on sait que 4 X 25 ça fait 100 .... Reprenons, 400 X 25 c'est pareil que 100 X 4 X 25 (je l'écris en même temps), c'est pareil que 100 X 100.
D. ça fait 200
M. Non
D. 1000
M. Il faut très bien savoir multiplier par 100, par 10 .... 100 X 100 ça fait combien?
D. 1 million
M. Non
D. 1 milliard
M. Non
D. C'est un chiffre ferme
M. Qu'est que tu entends par là ?
D. un 1 et après que des zéros.
M. Est-ce que vous savez faire 100 X 10 ?
D. Oui, 1000
M. Alors 100 X 100 ? 100 c'est 10 X 10 ?
D. Oui
M. Alors 10 X10 X 100 ?
D. ça fait 20 X 100
M. Mais non, pas 20 X 100, 10 x 100 ça fait 1000, il faut encore multiplier par 10, 10 X 1000 ça fait combien ?
D. Un million
M. Mais non, 10 X 1000 ça fait combien voyons ! vous allez faire votre tableau, il n'est pas dans votre tête ! *qu'est-ce qui se passe quand on multiplie par 10 ?*
D. On obtient un chiffre ferme.
M. Oui, on décale dans le tableau. Tu as 1000, 10 fois 1000, ça fait 10000 bien sûr !
D. Ah !
M. Quand on multiplie par 10, les dizaines deviennent des centaines (etc...) Alors, ça fait combien 100 X 100 ?
D. 10000.
M. Bon, je vais vous en poser quelques-uns de tête. 10 X 10 000....
Des nombres comme ça, on ne peut pas les voir d'un coup, il faut qu'ils soient rangés dans votre tête !
Tu as des caisses de 1000, tu as combien de caisses pour faire 10 000 ?
D. J'en ai 10.
M. Maintenant, si je te dis10 X10 000, ça fait 10 X 10 caisses.
D. 10 X 10 = 20, non 100, 100 000.
M. 100 X 10 ?
D. ça fait pas 1 million ...
M. Est-ce que ça peut être si gros que ça ? 100 X 10, qu'est-ce que vous devez penser ? Je suis sûre que si je le dis dans l'autre sens, vous allez trouver. 100 fois 10, c'est pareil que ?
D. 10 fois 100
M. Donc, ça fait ?
D. 200
M. Non.
D. 1010.
M. Non, pas 1010, 1000.
D. Bon, disons que j'ai 10 stylos dans un paquet et que j'ai 100 paquets
M. Combien tu as de stylos ?
D. 1000. J'ai écouté la réponse que vous avez dit.
...
M. Si je fais des croix (j'en fais 10) et des groupements par 2 pour aller plus vite, qu'est-ce qui correspond aux dizaines ?
D. Des paquets de 2.
Il fait les groupements en disant "j'ai l'impression de me retrouver au CP, là !"
M. et après ? Tu imagines que c'est les dizaines, pour faire les centaines, on groupe par 10, ici, c'est par 2, vas-y, groupe.
Il le fait.
D. Ca fait 100 paquets
M. Et après on groupe encore.
Il termine les groupements par 2.
M. 1318, qu'est-ce que ça veut dire ? ça veut dire qu'on en a 8 qui sont restés tout seuls, plus 1 fois 10...
D. Plus 3 fois 10
M. Mais non, plus 3 fois 100
D. Ah oui ! après 1 fois 200
M. Non, 1 fois 1000.
D. Ah oui, c'est ce genre là que je vous disais l'autre jour.
M. 2405, vous l'écrivez et après vous décomposez
D. ça fait 5 X 10
M. Non, 5 c'est les unités.
D. Ah, ça reste tout seul, je vais commencer par l'autre bout
Il écrit (2X1000) + (4X100) + 5
M. Un grand maintenant, pour voir si vous avez bien compris, 1 385 017
D. Il m'en arrive des choses le samedi !

Didier écrit correctement le nombre, mais dans la décomposition, il écrit un million avec 4 zéros. Il corrige mais hésite sur le nombre de zéros des puissances de 10 suivantes.

On reprend le problème des autoroutes avec 25 centimes par kilomètre. Je donne des distances pour plusieurs sorties. Ils sont perdus. On recalcule le prix pour 400 km.

D. ça fait 100 000, j'ai dit au hasard

....

M. Non pas 100 000, on l'a fait tout à l'heure, 10 000 mais c'est des centimes, ça fait combien de francs ?

Ils ne savent pas, je donne la réponse 100 F.

M. Pour 4 km ?

D. 25 et 25, 50, 50 et 50, 100

M. 100 quoi ?

D. 100 centimes

M. c'est à dire ?

D. 1 F

M. Pour 4 km on paie 1 F, donc pour 400 km, 100 X 4, on paie 100 F.

On commence à chercher les autres mais ils disent n'importe quoi, on s'arrête, on change de problème.

M. Si on achète une baguette à 2,80 F, combien paie-t-on si on achète 2 baquettes?

Ils font 2,80 X 2

M. Et 10 baguettes ?

D. 2,80 X 10

Il pose l'opération. Je l'empêche de mettre une ligne de 0 et il se perd. Finalement, il trouve 28 F.

M. Et 12 baguettes ?

D. 30 F

M. 2 baguettes, vous aviez cherché...

Il rectifie 28 et 5,60 et compte de 1 en 1, 28, ... 33.

12 décembre

Compter de 7 en 7 à partir de 150

D. 150, 157, 167

M. Non

D. 150, 157, 160, 167

M. Non, de 7 en 7

D. 150, 157, 164, 170

M. De 164 à 170, il y a combien ? Dis-moi toutes les manières de faire 10

D. 9 + 1, 10 + 0, 8 + 2, 7 + 3, 6 + 4, 5 + 5, 4 + 4, non, 4 + 7, 4 + 8

M. Mais non, réfléchis, ne dis pas n'importe quoi

D. 4 + 6, 3 + 7, 2 + 8 et 1 + 9

M. Tu en étais à 164, comme ça se termine par un 4, pour arriver à la dizaine suivante, qu'est-ce qu'il faut ajouter ?

D. 6

M. Oui, tu vois ça fait 170, 164 + 6 = 170, 164 + 7 = ?

D. 167

M. Non

D. 177

M. 7 c'est plus ou moins que 6 ?

D. Plus

M. Combien de plus ?

D. Un de plus

M. Bon, tu me dis que 164 et 6, ça fait 170, donc 164 et 7, ça fait combien ?

D. 177

M. Ecris-le moi, 164 + 7

D. En ligne ?

M. Oui, en ligne

D. 7 et 4 ça fait 11 donc 171

M. Ecris-le et continue

D. 178 ... 8 et 7 ... 175

M. Non, tu étais déjà à 178 donc ...

D. 185

M. Dis-moi la table d'addtion de 7

D. Je ne la sais pas très bien (et il commence 7 X1)

M. Non, addition, 1 + 7

Il la récite bien

M. Reprenons, 178 et 7, tu as dis 8 et 7 ....

D. 15

M. Oui, 170 et 15

D. 195

M. Non, écris le en ligne, 178 + 7 ... 170 + 15

D. 195

M. Non

D. Ah, 185

M. Bon, écris le, on continue.

D. 5 et 7, attendez ... 35 .... non pas 35, j'ai fait 5 X 7

M. Bon, 5 et 7, tu sais 5 et 5, alors 5 et 7

D. 7

M. Non, 5 et 5 ça fait combien ?

D. 10

M. 5 et 7 ?

D. 12

M. Tu étais à 185, ça va faire ?

D. 192 .... c'est ici que ça change

M. ça a changé à chaque fois. Après 192 ?

D. 216

M. Non, regarde, 192 et 7

D. 7 et 2 ça fait 9 donc 199

M. Ben voilà, tout simplement, tu cherches des choses compliquées. Dis-toi que c'est simple d'ajouter 7. Après, 199 et 7 ?

D. Après 199, c'est pas 200 ?

M. Si c'est 200, donc ça va faire

D. 207

M. Non, 206 parce que tu as déjà utilisé 1 ... Encore un, 206 et 7 ?

D. 6 et 7, ça fait ? 213 .... Ensuite 220 ... 227 ... 230, non 234

M. Très bien, encore un

D. 271

M. Oh, tu crois qu'on saute d'un coup de 234 à 271 ? Quelle est la dizaine suivante ? Tu as raison, on va franchir une dizaine.

D. Ici, ça va devenir 4, donc ici je vais avoir un 2

M. Donc ça fait ?

D. 247

M. Non, tu as 4 et 7 pour les unités.

D. 7, 8, 9, 10, 11, ça fait 11, 241

On reprend les péages d'auroroute pour les autres villes : Ury 17 km

D. Je vais faire 17 X 25

M. Pourquoi tu fais 17 X 25 ?

D. Pour savoir le plus rapidement combien je dois payer à la sortie de Ury

M. Oui et qu'est-ce qui t'a fait penser qu'il fallait faire 17 X 25 ?

D. J'ai pris les centimes qu'on doit payer ....

Il pose l'opération, trouve 425 et répond 425 F

M. Tu crois qu'on va payer 425 F pour 17 km

D. Non 4 F 25

M. Dans un franc il y a combien de centimes ?

D. 50 centimes, ah non 100 centimes ....

Didier cherche ensuite pour 29 km en faisant 25 X 29

Pour Dordives, 44 km, je fais chercher d'abord 4 X 25

M. On essaie 4 X 25 de tête

D. 25 et 25 premièrement, 5 et 5, je pose 0 ....

M. Pas comme ça .....
D. ça fait 50, et 50 et 50 ça fait 100.
On fait encore Courtenay (67 km) et Joigny (84 km). j'essaie de lui faire utiliser la linéarité, sans succès.
M. Regarde Dordives, 44 km, Joigny, 84 km, combien de kilomètres de Dordives à Joigny ?
D. 40 km en plus
M. Combien on va payer en plus ?
D. 25 centimes en plus
M. Par km oui, mais on a 40 km en plus.
D. Alors cette fois-ci il faut faire 40 X 25, ça fait 1000
M. Oui, c'est à dire combien de francs ?
D. 10 F donc ça fait 21 F
M. Oui, tu vois ça fait un moyen de vérifier. Pour aller de Courtenay à Joigny combien de km ?
D. 5 km en plus
M. Regarde bien Courtenay, c'est combien ?
D. 67
M. et Joigny ?
D. 84
M. Alors combien de km de Courtenay à Joigny ?
Didier compte un par un
M. Va déjà à 70
D. De 67 à 70, j'en ai 3
M. Et de 70 à 84 ?
D. 10
M. 10 jusqu'à 80
D. 18 euh ... 13
M. 13 et encore 4 pour aller à 84.
D. Donc ça fait 13 et 4 ... Vous dites rien ... 7
M. 17. On avait déjà calculé, 17
D. 4 F 25
M. Qu'est-ce qu'on doit vérifier ? 17 km de plus, combien d'argent en plus ?
D. 10 F
M. Non, 4 F 25. Est-ce que tu peux vérifier qu'on paie bien 4 F 25 de plus à Joigny qu'à Courtenay ?
D. Alors là je suis perdu, je ne comprends plus,
Je reprends le problème.
D. ça fera 25 F 25 (il les a ajoutés à 21 F)
M. Non 16 F 75 plus 4 F 25, pose la.
Il le fait correctement en disant "oh là là, on n'a jamais appris les nombres à virgule!"
M. Maintenant, je vais te poser une multiplication à trous.
D. C'est comme la maîtresse
D. Oh ben, dis donc, j'y arriverai jamais. Pour arriver à deux, il en faut .... on veut faire 2 fois quelque chose.
M. Réfléchis à ce que l'on fait quand on fait une multiplication

```
  1 .
  . 2
 -----
. . .
. 2 .
 -----
. . 8
```

D. On fait quelque chose pour arriver à 2
M. Non, ça c'est une multiplication.
D. On fait quelque chose X 2
M. Qu'est-ce que l'on doit trouver ? Là je n'ai rien écrit, mais j'ai écrit quelque chose là.
D. Je peux tirer 4 parce que 2 X 4 ça fait 8.
M. Oui, il n'y a rien d'autre dans la table des 2 qui fait 8 ?
D. Non
M. Récite la table des 2
Il le fait et trouve que 18 est possible, mais on continue avec 2 x 4
D. 2 X 4 = 8

```
  1 4
  . 2
 -----
  2 8
. 2 0
 -----
. . 8
```

Il écrit 8, puis 2 et met un zéro sur la ligne suivante. Il essaie 2 X 4

M. Regarde j'ai écrit un 2
D. 12
M. Oui, combien de fois 4 ?
D. 3, je mets un 3
Il le met et termine la multiplication (14 X 32)
M. Mais on avait dit que ça pouvait être un 9
Je réécris avec un 9, ce qui donne 19 X . 2 Didier a du mal à placer les chiffres au bon endroit, mais il se corrige quand on lui dit que ce n'est pas cela. Il faut lui demander de réciter la table des 9 pour qu'il puisse savoir si quelque chose se termine par un 2. Il ne la sait pas bien, il s'arrête à 27. Je lui fais remarquer que c'est le chiffre des unités qui doit être un 2. Il reconnaît alors que c'est 72, mais il lui faut encore un moment pour trouver que 72, c'est 9 X 8. Il termine la multiplication de 19 par 82, ce qui donne un résultat à 4 chiffres, c'est-à-dire qu'il manque des points, mais cela ne gêne pas Didier. Ce travail est visiblement un peu trop difficile pour Didier et je renonce à le faire chercher s'il y a d'autres possibilités avec un résultat à 4 chiffres.

19 Décembre (avec Claude).
Compter de 13 en 13 à partir de 113. Je lui permets d'écrire les nombres, mais il doit compter dans sa tête.
D. 116
M. Tu crois ? Ecris 113
D. cent soixante ...
M. Ecris 113 et réfléchis
D. 226
M. On avait dit 113, réfléchis
D. 226.
M. Non, est-ce que ça peut être dans les 200 ?D. 126 ... 129, non
M. 129, c'est ajouter 3 corrige
D. 133
M. Tu avais ajouté combien quand tu avais dit 129 ?
D. 3
M. Bien, tu voulais ajouter 13
D. ça fait 133
M. Non, tu es à 126, tu ajoutes 3, tu es à 129, tu dois ajouter combien encore ?
D. 10
M. Oui, 129 et 10 ?
D. 139
M. Voilà
D. Ensuite 143
M. Comment tu fais pour ajouter 13 ?
D. Je compte de 13 en 13
M. Oui, mais comment tu fais ? Tu es à 139
D. 53 ... 143
M. Débrouille toi, tu dois être sûr
D. 143
M. Bon, vérifie, écris là
Il écrit et dit 139 et 139
M. Tu crois que tu as fait 139 et 139 ?
D. Non, J'ai enlevé les deux 1, j'ai fait 39 et 39
M. Qu'est-ce qu'on est en train de faire ?
D. Du calcul mental
M. Oui, et on est en train de chercher quoi ?
D. Chercher 139 et ... compter de 13 en 13
M. Oui et on en est où ?
D. 139
M. Oui, donc on fait ? 139 ...
D. Et 13 .... 142 ça fait
M. Non
D. (Montrant l'opération posée 139 + 139) j'ai fait 13 ici et 139 là
Il a oublié la retenue et corrige : 152

M. Je crois que c'est difficile pour toi d'ajouter 13, est-ce que tu ne pourrais pas le faire en 2 morceaux ?
D. Je fais 10 et 3
M. Vas y, fais-le, tu es à 139, tu ajoutes 10 dans ta tête
D. 140
M. 139 et 10
D. 149
M. Oui 149 et 3 ?
D. 153
M. Non, 152, un pour 150, et encore 2. Continue
D. 165 173
M. Tu es à 165
D. Je sais, 178, puis 191
M. Tu es sûr ?
D. Non
M. Comment vérifier ?
D. 178 + 10 = 188 + 3, 191.
M. C'est Claude qui va dire le suivant
C. 204
Didier vérifie et dit non
C. 191, j'ai rajouté 10, 201, et 3, 204
D. 267
M. Réfléchis où on en est ? 204
D. 204 et 10, 214, 217 ... j'y suis presque, j'ai trouvé je crois
C. 230
D. 223
C. 217 + 10 =
D. 220, 227
M. On ajoute 10, on ne change pas les unités
D. 227, ça va faire 230, il a raison .... 230 et 13, 243
M. Un autre
D. 243 et 13, 253
C. + 3
D. 256
C. 279
D. La faute ! 269 ... 273
M. Calcule tout haut
D. 269 et 10, 279, et 3, 272
C. 282 ... 297
D. Non 295
M. On vérifie, 282 et 13
D. 258
M. C'était pas 258, c'était 282
C. 282, 292, + 3, 295
M. 295 et 13
D. 303
C. Non 308
D. 295 et 10 ça fait 300.
M. Ah tu crois ? Tu oublies toujours les unités
D. Ah 305, ça fait 308, t'as gagné

M. On va faire un problème. Un patissier fait des chocolats qu'il met dans des boîtes de 20. Le patissier a fabriqué 978 chocolats. Combien remplit-il de boîtes?
D. J'ai trouvé ce qu'il faut faire. Une multiplication, 978 X 20
M. Pourquoi ?
D. Il y a plusieurs boîtes ... C'étaient 978 boîtes ou 978 chocolats ?
M. 978 chocolats
D. Parce qu'il y a plusieurs chocolats
M. Oui, il y en a 978, ça fait plusieurs et alors ? Quelle est la question que je t'ai posée ?
D. Combien de chocolats ?
M. Non, puisque je t'ai dit combien il y avait de chocolats
D. De boîtes !
Pendant ce temps, Claude a fait 978 X 20 en disant 0 X 8, 0, 2 X 7, 14, je retiens 1, une fois 9 ça fait 9, ...
Didier fait aussi la multiplication en posant une ligne de 0 dont il refuse de se passer. Je lui demande pourquoi il a fait cette opération.
D. Pour trouver plus rapidement on va pas faire ...
Je fais répéter le problème puis demande à Didier de lire le résultat de sa multiplication.
M. Tu penses ? 978 chocolats, on peut remplir 19 560 boîtes, ça vous paraît normal ça ?
D. et C. Non
M. On reprend tout au départ, répétez le problème
D. Vous nous avez donné 978 chocolats à ranger
M. D'accord on imagine que je les donne et on a autant de boîtes qu'on veut, on range les chocolats dans les boîtes. Combien de chocolats dans les boîtes ?
D. 20
....
D. Alors c'est une multiplication
M. Non, ce n'est ni une multiplication ni une addition. Ce qu'il faut, c'est réfléchir et trouver la solution du problème, faire travailler ses méninges.
D. Le petit poi que j'ai sur le cou ...
Je propose de dessiner les boîtes de chocolats et de marquer les chocolats qu'on met dedans.
M. Si je vous donne 45 chocolats, il vous faut combien de boîtes ?
D. 450 boîtes
M. Est-ce que tu te moques de moi ? Répète
D. Avec 45 chocolats on les range, combien on peut remplir de boîtes
C. Déjà 2, il m'en restera 5, 40 chocolats on les met dans 2 boîtes
D. On va faire 4 X 20 en premier
M. Si 978 c'est trop d'un seul coup, faites le en plusieurs fois.
D. Vous pouvez changer le nombre ?
M. Tu peux le changer toi-même, donne toi des intermédiaires, on fera 978 de toute façon.
D. 500
M. D'accord
D. 100
M. Avec 100 chocolats combien de boîtes ?
D. 1 million
M. Dessine-les
D. ça, ça fait 80, 80 et 80...
M. On va faire un tableau

boîtes	chocolats
1	20

Ecrivez d'autres résultats.
Ils continuent 2, 40, 3, 60, 4, 80, 5, 100.
M. Vous êtes surs de ça ? Est-ce que vous pouvez faire 200 ?
C. 10
D. Parce que 5 ça fait 100, pour 200 encore 5, on va reprendre tous ces nombres là.
M. On aurait pas pu trouver tout de suite 10 boîtes, 200 chocolats ? et 20 boîtes ?
D. 300.
M. Tu crois ?
C. 400.
M. Si on a mis 400 chocolats, combien il en reste à mettre en boîtes ?
D. 578
M. Il vous en reste encore plus ou moins ?
D. 500, 30 boîtes
M. Ah, Est-ce que c'est 30 ? Regarde 100, 5 boîtes, 400, 20 boîtes. 100 chocolats c'est combien de boîtes ?
D. 5 boîtes, pour 500 c'est 30 boîtes

M. Reprends 500 chocolats
D. 30 boîtes, je dis 30.
M. Vérifions
D. Parce que j'ai l'impression que c'est la table de 10
M. Si tu mets 30, ça serait quoi ?
D. 600, donc pour 500, 40
M. Non, regarde, 500 égale 400 + 100. Pour 500 chocolats, 5 boîtes ...
Vous êtes perdus, si vous deviez expliquer à quelqu'un qui rentre ce qu'on cherche?
Ils le font à peu près correctement.
D. On a fait des intermédiaires
M. oui, quoi ?
D. 100.
C. ça fait 5
M. Je leur fais faire une phrase entière et leur demande d'autres résultats.
C. 200 chocolats, 10 boîtes
D. 300 chocolats, 15 boîtes, ah bon, ça va faire 25 boîtes, 500 chocolats ça fait 25 boîtes parce qu'ici on a fait ... la table des cinq. On remet 5 à chaque fois.
M. Combien de boîtes pour 900 chocolats ?
D. 45 boîtes
M. Pour quelle raison ?
D. Il faut compter de 5 en 5, j'ai compté 30, 35, 40, 45
M. Comment on aurait pu faire autrement ? dites ce qu'on savait avant ?
Didier relit, ajoute 600, c'est 30 parce qu'à 25 on a rajouté 5, 700 ça fait 35, 800 ça fait 40, 900, 45.
M. Est-ce qu'on a une autre manière de faire ? ... Reprenez le 400 et le 500
Ils comprennent et proposent 20 + 25
M. Combien il reste ?
D. 78 chocolats ... je vais passer à 1000, 50 boîtes.
M. Donc on est sûr qu'il en faudra moins, d'accord ? Combien tu as rangé en trop ?
D. 21
M. 22, c'est combien de boîtes ?
D. 400
M. 22 chocolats, pas 22 boîtes
D. 402
M. Tu te perds, reprenons, 50 boîtes, 1000, enlève une boîte
D. 900
M. Non, écris
Didier écrit 49 et en face 945
M. Non, en enlevant une boîte, tu enlèves combien de chocolats ?
D. 20
M. ça fait
D. 800
M. Non, enlève 10 déjà
D. 900
M. C'est quand tu enlèves 100, tu es d'accord, 900 + 100, ça fait 1000, alors 900+10 ça ne fait pas 1000
D. 999
M. ça c'est 1000 - 1
D. Justement, je compte à l'envers.
Il continue et s'arrête à 990, alors Claude dit 980.
M. Finalement on a combien de boîtes ?
D. 2
M. 2 boîtes ?
D. Non, 49 boîtes
M. Mais la dernière boîte ...
D. Elle n'en a que 2
M. Non, il lui en manque 2
On finit la séance en comptant de 10 en 10 à l'envers à partir de 925. Cela va beaucoup mieux quand le calcul est lancé, avec un peu de mal pour franchir les centaines pour Claude.

20 février

Didier me dit qu'il fait des divisions en classe mais qu'il n'est pas très bon. Je lui pose les questions du questionnaire sur les mathématiques préparé pour les CM1 et CM2 (voir chapitre 5).
M. C'est quoi faire des maths ?
D. C'est bien, on travaille surtout les divisions, enfin on travaille surtout l'arithmétique, quoi, on fait des multiplications, des divisions.
M. Des opérations, des problèmes aussi tous les jours ?
D. Non, 3 fois par semaine.
M. Est-ce que ça t'arrive de faire des maths dans la vie, quand tu n'es pas en classe ou en train de faire tes devoirs ou de travailler avec moi ?
D. Quand je fais les courses, que je vais acheter quelque chose
M. Qu'est-ce que tu préfères, le calcul ou la géométrie ?
D. La géométrie
M. Vous en faites souvent ?
D. Le vendredi. *Je suis peut être nul en géométrie mais j'adore la géométrie.*
M. Qu'est-ce que tu aimes encore ?
D. Il y a quatre matières où je suis bon, enfin ça n'en fait qu'une, l'éveil. Je suis le meilleur de la classe.
M. Et en géométrie, tu aimes les constructions ?
D. J'adore les constructions
M. Et les calculs, les problèmes ?
D. J'aime
M. Alors tu aimes les maths
D. J'adore les maths
M. Et qu'est-ce que tu n'aimes pas en maths ?
D. Je n'aime pas, c'est les divisions et les multiplications ... les additions c'est trop facile. Ce que je n'aime pas le plus c'est les additions, c'est trop bête ... j'adore les soustractions.
M. Et qu'est-ce que tu trouves difficile ?
D. Des fois, les additions.
M. Est-ce que tu penses que les grandes personnes se servent des maths ? pour quoi faire ?
D. Pour faire les commissions.
M. Est-ce que tu penses qu'il y a des personnes qui s'en servent pour leur travail?
D. Oui, prof de maths.
M. oui, mais autre chose ?
D. comptable, les maîtresses, enfin tout le monde se sert des maths.
M. Les ingénieurs.
D. Oui, pour faire des avions, il faut de la géométrie.
M. D'après toi, qu'est-ce qui est le plus important d'apprendre des leçons ou de faire des problèmes ?
D. D'apprendre des leçons parce que c'est ce qui est le plus intéressant, par exemple on a déjà fait l'addition et admettons qu'on fait tout le temps des additions, ça commence à venir lassant....

Je lui demande d'inventer un problème où on ait à faire 3 opérations et où on parle de distances.
D. De distance, non, j'y arriverai pas
M. Autre chose
D. J'en ai déjà inventé un une fois : c'est une classe de 21 élèves, il y a 11 filles et 10 garçons, ça fait 21. Ils passent devant un magasin de jouets, d'un côté il y a une espèce de poupée, de l'autre un train électrique. Le train électrique coûte 110 F et la poupée 111 F. Alors la maîtresse demande "est-ce que vous aurez assez ?"... comme ils avaient de l'argent, chacun avait 40 F. Les garçons voudraient acheter le train électrique, les filles

la poupée. La maîtresse demande s'ils auront assez d'argent pour acheter un train et une poupée. Je lui demande de faire son problème en lui répétant les données numériques.

D. Ah non, je me suis trompé, les garçons ont 50 F et les filles ont 60 F. Comme il y a 10 garçons, je dois faire 10 X 50 ... j'ai trouvé 500, j'ai utilisé une méthode que la maîtresse a donné : on enlève les deux 0, on fait 1 X 5 = 5, on rajoute les deux 0, ça fait 500.

M. Rappelle toi le tableau 5 dizaines, quand tu fais x 10, chaque dizaine devient une centaine.

D. Chez les filles c'est pas pareil, elles ont 60 F, 60 x 11

M. Fais 6 x 11 de tête

D. 66

M. 60 X 11

D. 600

M. Attention

D. 660. Maintenant je dois trouver combien il doit rendre ?

M. Ah, ils ont assez d'argent ?

D. Oui, ils en ont même trop, je vais enlever 110

M. Est-ce que tu peux le faire de tête ?

D. Attendez je vais essayer ... Non, je ne peux pas

M. Si, 500 - 110, n'enlève pas tout d'un coup ... regarde, est-ce que tu as déjà représenté les nombres sur une ligne droite ?

Je trace un axe et marque 0 et 100 (2 carreaux). Il continue à graduer jusqu'à 500.

M. maintenant tu dois faire - 110, tu recules.

D. Si j'enlève 400, il reste 100

M. Tu n'enlèves pas 400, tu enlèves 110, enlève 100 déjà.

D. 500 - 100 = 400

Je lui demande ce qu'il doit encore enlever mais il répond n'importe quoi, on reprend le problème depuis le début et enfin, il répond 400 - 10

M. Oui, écris le 500 - 110 = 400 - 10

D. ça fait .... 390. Donc il reste 390 pour les garçons. Maintenant pour les filles, moins 111.

Il place 660 sur son axe, au mileu entre 600 et 700. Je lui demande ce qui est exactement au milieu

D. 650

M. Oui, donc 660 est un peu plus loin

IL ne peut pas prévoir sur l'axe où va se situer à peu près 660 - 111

M. 660 - 100 ?

D. 106 ... J'enlève 100 à 160

M. Pas à 160, à 660

D. Ah, 560.

M. Tu voulais enlever 111. Encore combien ?

D. 11

M. Tu te représentes les nombres dans ta tête

D. J'en étais à combien

M. 560

D. 560 - 11 ... 550, 549

M. Les garçons peuvent-ils acheter un train et les filles une poupée ?

D. oui

M. Je te pose une autre question. Combien les garçons peuvent ils acheter de trains et les filles de poupées ? On commence par les trains.

D. 3

M. Oui, combien tu paies pour 3 ?

D. Je dois donner mes 500 F

M. Mais combien tu paies ? Un train coûte 110 F

D. 330 F

M. Est-ce qu'il te reste de quoi en acheter un autre ?

D. Oui, je peux en acheter 5 ... ah non, je peux en acheter 4 sinon je vais avoir 50 F de plus et j'aurai pas de quoi payer, 5 trains c'est 550 et j'ai 500 seulement.

M. Tu en achètes 4. Combien il te reste ?

D. 4 trains 440 F. Il me reste pas 100 F, ça me ferait 540 F.

Il répond cependant 540

M. Quand tu fais les courses, tu vérifies ou tu prends ce qu'on te donne ?

D. Je prends ce qu'on me donne

M. Tu m'as dit que tu faisais des maths en faisant les courses.

Je lui fais répéter ce que l'on cherche. Cette fois, Didier n'arrive pas à se concentrer. Je lui rappelle que je ne l'aiderai pas et qu'il doit s'imaginer dans le magasin en train de payer : tu avais 5 billets de 100 F, maintenant on imagine que tu as de la monnaie.

D. Un billet de 100 F et 4 pièces de 10 F ça fait ? ... 4 billets de 100 F et 4 pièces de 10 F.

M. Tu avais 5 billets de 100 F

D. J'ai trouvé, il faut que je fasse une soustraction, je vais essayer de la faire de tête ... 140 F.

M. C'est quoi ?

D. L'argent qu'on me rend

M. Quand tu as la monnaie, tu donnes 4 billets de 100 F et 4 pièces de 10 F. Si tu donnes 5 billets de 100 F, on te rend un billet de 100 F et encore des pièces tu crois?

D. Non

M. On te rend plus ou moins de 100 F ?

D. moins ... 40 F

M. on vérifie.

Didier fait 440 + 40 = 480 mais ne conclut pas. Il ne sait plus combien il avait.

M. Si tu as 100 F et que tu achètes quelque chose à 40 F, combien on te rend ?

Il répond 60 F mais ne peut pas répondre au problème. Je lui fais dessiner les billets pour 440 F et 500 F et lui demande de faire les échanges pour rendre la monnaie. Il trouve enfin la solution. Je lui laisse alors poser la soustraction, il retrouve son erreur et revient dans le problème : "c'est normal enfin, j'avais oublié qu'il faut mettre la dizaine ici" (retenue à côté du 4).

D. Je crois savoir pour les filles, je crois qu'il reste 50 F.

Je lui demande de vérifier, il compte une poupée, 2 poupées ... 6 poupées. Il écrit 222, 444 en disant que 444 correspond à 3 poupées. Je lui demande de dessiner les poupées et d'écrire le prix à côté de chaque. Il trouve alors 666 pour 6 poupées.

D. Elles peuvent en acheter encore... Ah non !

M. Elles ont combien d'argent ?

D. 660... non, encore 6F.

M. Donc, elles en achètent 5.

D. 555.

M. Combien il leur reste ?

D. il va leur rester 160.

Je lui permets de poser les opérations maintenant. Il pose 660 - 555 et trouve 105.

M. On a acheté 5 trains et 6 poupées. Est-ce qu'avec l'argent qui reste, si les filles leur en prêtent un peu, les garçons peuvent acheter un sixième train ?

D. 165 F, on peut acheter un train

M. Il reste combien ?

D. 15 F

M. Un peu plus

D. En tout cas, le dernier chiffre est un 5 .. 25 F

M. Comment vérifier ?

Il finit par faire 165 - 110 = 55.

Je lui demande de compter de 10 en 10 en reculant à partir de 378, sans écrire. Il dit 308, je lui permets d'écrire 378, il écrit 318. On corrige et il continue de tête jusqu'à 8 en faisant, à chaque franchissement de centaine, des erreurs qu'il peut corriger.

M. Qu'est-ce que tu imagines dans ta tête ?

D. J'ai l'impression que c'est une machine qui change à chaque fois de tablette.

M. Très bien, comme un compteur, c'est exactement ce qui se passe. Quelle est le chiffre qui change.

D. Soit les 2 premiers chiffres, soit le 1er chiffre

M. Quand le 1er chiffre change-t-il ?

D. A la centaine

M. Bien

Je lui propose de faire un graphique représentant le prix des trains en fonction du nombre de trains.

Didier a des problèmes pour graduer l'axe des ordonnées : on a pris 5 carreaux pour 100 F, combien prendre pour 10 F ? Il s'agit de carreaux d'écoliers et Didier essaie "une petite ligne", ça ne va pas, puis trois, ça ne va pas non plus, enfin il essaie deux et ça marche.

M. Est-ce que tu aurais pu prévoir ?

D. non

M. Si, tu aurais pu prévoir

D. Ah, bon ?

M. Oui, compte combien il y a d'intervalles entre là et là ?

D. C'est quoi, les intervalles ? Je connais Interville mais Intervalles ?

M. C'est l'espace entre 2 lignes

D. Interligne ?

M. Oui

Il en compte 4 dans un carreau

D. J'ai pris 5 carreaux donc 20 interlignes

M. Bien, 20 interlignes pour 100 F donc pour 10 F, je dois en prendre 2 parce que 2 x 10, ça fait 100

D. ça fait 20

M. Oui 2 x 10 ça fait 20, mais j'ai 20 interlignes pour 100. Tu es bien réveillé

D. Vous l'avez fait exprès.

27 février (avec Claude)

Compter de 8 en 8 en reculant à partir de 315.

D. 315 303

M. Ecris 315

D. -8 ! Que je suis bête ! ça fait 308.

M. Explique comment tu fais

D. 304.

M. Vérifions, 304 + 8, ça fait ?

D. 12

M. 312, c'est pas ça, donc 315 - 8, comment tu fais ?

D. 306

C. 307, parce que de 307 pour aller à 15, ça fait 8.

M. 8 et 7, ça fait 15, tu es d'accord ?

D. Non, c'est 8 et 5 qui font 15. Ah, non, je suis d'accord.

M. C'est Claude qui a trouvé, Didier, essaie encore.

D. 209, non, 210.

M. Tu es à 307, alors 307 - 8 ?

D. 298, non 299.

M. Oui, parce que 8 et 8, ça fait 16, ça se terminerait par un 6, tu avais 307.

D. 299.

M. Encore un

D. On en est où ?

M. 299

D. Alors, j'avais raison, j'avais dit 209.

M. Oui, ça se termine par un 9, mais 299 ce n'est pas pareil que 209.

D. 299, ça doit faire ...

C. 291

D. Ah, j'avais juste trouvé

M. Tu vas faire le suivant.

D. ... 283

M. Comment tu as trouvé ?

D. j'ai compté à l'envers 291, 290, 289...

M. Oui, mais ça ne va pas vite cette méthode. (à Claude) et toi ?

C. Moi aussi, j'ai compté à l'envers.

M. Est-ce que vous savez ajouter 8, est-ce que vous savez la table d'addition des 8 ?

Je la leur fais réciter et commente "ça doit devenir automatique sinon on ne peut pas progresser ; il faut mettre un certain nombre de choses dans votre mémoire."

Cela leur est plus difficile de trouver des compléments de 8, même 8 plus quoi fait 18, il faut attirer leur attention sur le nom "dix-huit" pour que Didier trouve enfin 10. On reprend les "moins 8".

M. 283 - 8

D. 275 ? oui, 275, parce que, ici, c'est les nombres impairs qui sont ici à la fin (unités), et puis celui-ci (dizaines), il doit tout le temps changer.

M. Ce n'est pas une raison suffisante, il pourrait changer autrement.

Didier écrit ensuite 273.

M. Pour trouver 273, qu'est-ce que tu aurais enlevé ? L'autre jour, tu savais très bien faire parce qu'on allait de 10 en 10, 283 - 10 = 273. Mais, ici, on enlève 8, alors que faut-il faire ?

D. On enlève 2 à 10.

M. Justement, on enlève 2 de moins, donc ça fait ? ... ça fait - 10 + 2. Allez, on repart de 275. (à Claude) 275 - 8 ?

D. J'ai trouvé

C. 267

M. Comment tu as fait ?

C. 275 - 10, 265, il faut rajouter 2, 267

M. A toi, Didier

D. 259

M. comment tu as fait ?

D. Comme tout à l'heure. J'ai bien regardé ces nombres là 291, 283, 275, 267, j'ai remarqué que ce nombre là (les dizaines), c'est du plus grand au plus petit qu'on va.

M. Pas n'importe comment

D. En faisant - 8 à chaque fois

M. Tu as 2 chiffres qui ont changé

D. Celui du milieu diminue de 1

M. et celui des unités ?

D. Comme il est impair, il va augmenter de 2

M. .... Oui on enlève 10 et on ajoute 2

D. Je crois que j'ai trouvé l'autre, 271

M. Tu augmentes maintenant ?

D. 261, ... 241

M. Tu penses ? 259 - 8, si tu n'avais pas vu ta technique, tu ne sais pas faire 9 - 8 ?

D. Si ça fait 1

M. Alors 259 - 8 ?

D. 241 ça fait

M. Non, le chiffre des dizaines ne doit pas diminuer cette fois, 241 et 8 ?

C. 247

M. 9 - 8

D. ça y est, j'ai trouvé

C. 9 - 8 = 1

D. J'ai trouvé, 243

M. 259 - 8, c'est facile ça, c'est beaucoup plus facile que ce qu'on a fait avant

D. Je suis habitué à faire comme j'ai commencé

M. Il ne faut pas faire comme on a commencé sans réfléchir. Il faut toujours réfléchir.
D. En tout cas, c'est dans les 200, je l'avais sur le bout de la langue
M. Qu'est-ce que c'est 259 ? Comment le décomposer en 2 morceaux ?
D. Je mets 200 et 59
M. Si tu veux, et 59 - 8 ça fait combien ?
D. ça fait 51. Ah, je l'avais au bout de ma langue !
M. Pourquoi vous me dites 241 ? si vous enlevez 10, ça fait 249, et il faut ajouter 2, ça fait 251. Mais là ce n'est pas la peine, il n'y a pas de retenue, il suffit de regarder les unités, c'était plus simple.
D. Ensuite, 243, j'en suis sûr et certain
M. Pourquoi ?
D. J'en suis sûr et certain comme ça
M. Vérifie
D. J'ai vérifié
M. Explique comment tu as trouvé
D. J'ai fait comme vous m'avez dit de faire, j'ai fait la méthode que vous avez dit.
M. C'est quoi la méthode ?
D. Ah ben non, c'est ma méthode à moi .... ça diminue celui-là et puis ....
M. Oui, tu enlèves 10 et tu
C. ajoutes 2
D. J'allais dire
On continue : après 235, Didier propose 267. Je le rappelle à l'ordre et il corrige 227. Pour le suivant, il commence par dire 209, avant de rectifier ..... il répète ce genre d'erreurs plusieurs fois de suite mais reprend très bien pour le passage de 203 à 195. Ensuite ils continuent assez facilement jusqu'à 3.

M. Voilà une graduation, j'ai marqué 0 et 60 (15 carreaux). Vous allez essayer de trouver combien ça fait pour un carreau et de graduer de carreau en carreau.
D. ça à l'air facile ça. Je vais essayer de prendre 2.
Il compte et déclare "il y a un problèm (il ne lui reste qu'un carreau à la fin).
M. Je vais vous dire combien j'ai pris de carreaux, j'ai pris 15 carreaux.
D. J'ai compris alors, ici c'est bon, je vais utiliser 3, 6, 9, 12, 15, 15 pour arriver à 60.
M. Vous savez ce qu'est une graduation régulière ? On peut ne pas mettre tous les numéros mais ça doit être régulier. On cherchera ce que vaut un carreau. J'ai gradué avec une graduation que je ne connais pas et j'arrive à la graduation 60. *Alors est-ce que vous pouvez trouver des graduations intermédiaires ? Si vous ne savez pas mettre tous les carreaux, mettez celles que vous pouvez. Est-ce que vous sauriez mettre 30 par exemple ?*
Didier compte 1, 2, 3, ... et déclare il y a 15 carreaux seulement.
C. On ne peut pas
M. Moi je dis que 60 est là, alors où y aura-t-il le 30 ?
D. Il sera plus loin
M. 30 ne doit pas être plus loin que 60
D. Il sera au milieu (mais il le place à 6 1/2 au lieu de 7 1/2)
M. Non par là
Didier compte 6 carreaux d'un côté et 8 de l'autre.
M. Là il y a 15 carreaux, le milieu c'est combien ?
D. 25 et 10
M. Je ne comprends pas
D. 10 et 5 donc ça doit faire 1, 2, ... 7, 1, 2, ... 8 et propose 7 en disant 14 c'est ce qui se rapproche le plus.
M. Mais si tu as 15 comment tu peux faire ?
D. On rajoute 1
M. Mais si tu rajoutes 1, ça fait 8, et 8 et 8, çà ne fait pas 15 ....
C. On peut faire 7 + 8
M. (à Didier) Mais comment tu avais fait ? Pour trouver le milieu on pourrait plier.
Didier place le trait au milieu et propose de mesurer les millimètres. Il veulent ensuite placer 15. Je propose plutôt 20.
D. 20, ça doit là (5 carreaux)
M. Pourquoi ?
D. J'ai fait avec les millimètres
M. On utilise les carreaux de la feuille, pas les millimètres ... Si 20 est là, où va être 40 ?
M. Mais entre 0 et 20, il y a 20 et entre 20 et 40 aussi. Je voudrais que tous les 20 aient la même longueur, que ma graduation soit régulière.
Ils n'y arrivent pas, je leur fais reprendre le problème autrement.
M. Je prends 2 carreaux pour 10, est-ce que vous pouvez continuer la graduation ?
D. 60 tombe toujours là ?
M. Je ne sais pas, continuez la graduation. (Ils le font).
M. Alors est-ce que c'était ma graduation ?
C et D. Non
M. Et si je prends 3 carreaux pour 10 ?
Ils le font et constatent qu'aucune ne marche.
M. Bon, alors, pour celle que j'ai choisie, où j'avais mis 60 au bout, qu'est-ce que vous pensez du nombre de carreaux qui représente 10.
D. Je ne comprends pas ce que vous voulez dire
M. Ici, tu vois, une longueur de 10 est représentée par 2 carreaux, ici elle est représentée par 3 carreaux, et sur cette graduation là, une longueur de 10 est représentée par quelque chose et je ne sais pas quoi ? Pouvez-vous dire quelque chose sur cette graduation ..... Pouvez-vous mettre des points intermédiaires ?
C. Non
M. Là, quand j'ai pris 2 carreaux, qu'est-ce qui se passe pour 60 ? Tu as vu que c'est trop petit
D. Et là c'est trop grand, alors je dois prendre ...
C. 1
M. Est-ce que ça va aller ? 1 c'est encore plus petit ?
C. 1 et la moitié d'un autre
M. Mais regarde là, on avait pris 2, si on prend 1 1/2
D. le 10 va être là (il complète la graduation et constate que c'est pire).
Claude fait une graduation irrégulière
D. 2 et 1/2 carreaux.
Il fait sa graduation et dit "ça y est j'ai trouvé ! "
M. Est-ce qu'on pouvait prévoir ? Si tu as 15 carreaux pour représenter 60, peux tu trouver ce qui va représenter 20 ?
Claude n'y arrive toujours pas. Je l'aide et je m'aperçois qu'il ne sait pas ce qu'est un demi carreau.
M. Ca fait combien de carreaux pour représenter une longueur de 20 ?
D. 4 1/2
M. Non, tu m'avais dit 2 et la moitié d'un.
D. 4 1/2 il va avoir, 2 1/2 il va y avoir
M. Il y a 2 1/2 pour 10, donc pour 20 ?
D. 5
M. Est-ce qu'on pouvait prévoir ? il y a combien de fois 20 dans 60 ?
D. 3 fois 20
M. Et 3 X 5 ça fait combien ?
D. 15
M. Oui
D. Ah j'ait dit au hasard.

On range 560 objets dans des boîtes de 12.

D. j'ai trouvé 56. C'est 10 hein ?

M. Mais on les range dans des boîtes de 12.

D. Si c'était 10...

M. Tu as raison, si c'était 10, il faudrait 56 boîtes, mais c'est 12. Tu peux déjà dire quelque chose, c'est plus ou moins de 56 ?

D. moins de 56 ... Attendez

Il fait 560 X 12

M. Pourquoi tu fais cette opération ? tu m'avais dit quelque chose de très intéressant.

C. Il a rempli 11 boîtes

M. Pourquoi ?

C. J'ai fait une division

5 6 0	1 2
- 5 0	11
0 6	
- 0 6	
0 0 0	

M. Montre-moi comment tu fais les divisions ?

D. De la même façon que moi, puisqu'on est dans la même classe. Je vais vous dire comment la maîtresse nous a appris. J'ai 2 chiffres au diviseur, j'en prends 2 au dividende. Comme je ne connais pas la table des 12

C. Je prends la table des 1, ce qui s'en rapproche c'est 1 X 5

D. 5 X 2 ....

....

M. 10 X 12 tu trouves 20 ?

D. 10 X 12, 120

M. Est-ce que tu as compris la technique de Claude ?

D. Il fait des paquets de 12, quoi !

M. Il dessine les boîtes

C. Dans les boîtes je figure les bonhommes jusqu'à temps qu'il n'en reste plus. J'ai compté les boîtes et j'ai marqué combien il y en avait, 12 X 17

M. Pourquoi 12 X 17

C. Parce que j'avais 17 boîtes

Ils le font avec beaucoup d'erreurs d'opération pour Claude.

M. Tu comprends sa méthode. Est-ce qu'on pourrait trouver une méthode pour aller plus vite ?

D. Attendez je vais y arriver du premier coup

C. 12 X 20

M. 12 x 20, vous ne pouvez pas le faire de tête

D. 240

M. Comment tu as fait ?

D. La même méthode que d'habitude. J'oublie le zéro, disons qu'il ne compte pas, 2 x 12, et je remets mon zéro.

M. 240 pour 20 boîtes.

D. 30 boîtes

M. De tête, 30 x 12 ?

D. 360

M. Oui, alors, est-ce que ça suffit ?

D. Non, 40 boîtes 480

M. 480 on se rapproche

D. Je vais essayer 42

C. 50

D. 492

M. Pour combien ?

D. pour 50, 492.

M. Certainement pas, 50 c'est un nombre entier de dizaines, ça doit se terminer par un zéro.

D. 490 alors !

M. ça fait combien 5 x 12 ? 5 x 10 ?

D. 50

M. Alors 5 X 12 ?

D. 500

M. Non, 5 X 2 ?

D. et C. 10

M. Alors 5 x 12

D. 110

M. Non, 5 x 10 ça ne fait pas 100. C'est peut-être plus facile 12 x 5, 10 x 5 ?

D. et C. 50

M. 5 X 2

D. et C. 10

D. 50 et 50

M. Pas 50 et 50

Enfin, ils arrivent à 60

D. Je suis perdu

M. Vous en étiez à 50 boîtes. Posez vos opérations maintenant parce que je vois que vous êtes fatigués pour le calcul mental.

Ils posent l'opération et constatent que 600 c'est trop. Ils essaient 45.

D. 540 j'ai trouvé, il me faut ....

Pendant que je discute avec Claude sur la manière de faire les multiplications (sa technique n'est vraiment pas au point), Didier répète j'ai trouvé, j'ai trouvé.

D. Il faut 46, 46 X 12 = 550, 550 + 6, voilà

M. 46 X 12, non, avec une boîte de plus, tu mettrais 12 objets de plus, pas 10. Avec 46 boîtes, ça fera combien d'objets ?

D. 160

C. 152

M. 552, 12 de plus. Dans 46 boîtes, 552 objets. Est-ce que l'on a tout rangé ?

D. et C. Non

M. Combien il en reste ?

C. 22

M. Non, on avait 560.

D. 552, donc il reste 52

M. Non

D. 50

M. On avait 560 objets, on en a mis 552 dans les 46 boîtes.

D. Attendez, je crois que j'ai trouvé !

C. 20

M. Je pense que vous êtes fatigués, il va en rester 8.

D. Ah, je venais juste de trouver

M. Ah oui, tu as compté sur tes doigts. Vous vouliez faire une division tout à l'heure. Revenons à la division. Vous avez fait une division mais sans la poser, en faisant des multiplications. Quand on divise 560 par 12, qu'est-ce que l'on cherche ?

D. Les centaines .... les dizaines

M. Là aussi vous avez cherché des dizaines, 56 c'est des dizaines, on cherche combien de dizaines de boîtes, on dit en 56 combien de fois 12.

D. Mais on ne sait pas la table des 12

M. Si on ne sait pas la table des 12, le meilleur moyen c'est de l'écrire à côté, combien de fois 12 dans 56 ?

D. On va dire 40

M. Oui, 4 dizaines, 40, on peut l'écrire.

On écrit 10 X 12 .... 50 X 12 et on constate que

480 < 560 < 600. Didier fait la soustraction.

M. Il faut maintenant chercher en 80 combien de fois 12 ?

On continue la table, ils trouvent et je leur refais la division comme à l'école en disant qu'on peut s'aider en écrivant la table à côté.

D. Oui, c'est-ce que dit la maîtresse.

12 mars

Après du calcul mental de multiplications, Didier propose un problème qu'il a inventé.

D. J'ai des billes, 36 billes dans 20 sacs. Combien y aura-t-il de billes en trop ?

M. Qu'est-ce que ça veut dire ?

D. Je crois que j'ai trouvé

M. Quelle est la question que tu te poses ?

D. Combien me restera-t-il de billes ? pour les ranger dans d'autres boîtes ? Il faut que je trouve le nombre de billes qu'il reste. Et si je les trouve, je les mets dans des boîtes. Disons qu'il y en a 20 qui restent et j'en mets 10 dans une boîte et 10 dans une autre boîte.

M. Tu avais combien de billes, explique-moi, je n'ai pas très bien compris.

D. J'avais 36 billes et je veux les mettre dans 20 sacs, combien m'en restera-t-il?

M. Et comment tu les mets dans les sacs ?

D. Comment ? vous voulez dire une par une ou bien 4 par 4 ? Dans des petites boîtes d'allumettes et je dois avoir 20 boîtes remplies, combien il me reste ?

M. Combien tu as mis dans les boîtes ?

D. J'ai mis 36 billes et j'avais 20 boîtes

M. Est-ce que tu peux dessiner ? Dessine-moi ton problème

D. ça va être fastoche

Il dessine 20 ronds et écrit 4 dans chaque.

M. Alors qu'est-ce que tu en penses ?

J'en pense... je crois que je vais essayer une multiplication pour voir combien il y a en tout.

M. Vas-y.

D. Je vais la faire de tête.

M. Très bien, dis-moi quelle multiplication tu fais.

D. 80, ça fait.

M. Dis-moi quelle multiplication tu as faite ?

D. 20 X 4 = 80

M. très bien, et ça te donne quel renseignement ?

D. Combien j'ai de billes

M. Combien tu as de billes où ?

D. dans les boîtes

M. Tu as mis 80 billes dans les boîtes, et alors quelle est la suite de ton problème?

D. J'essaie de trouver combien il me reste

M. Et tu en avais combien au départ ?

D. 36

M. Ah ! qu'est-ce que tu en penses ?

D. Je crois que je vais faire une soustraction 36 - 20

M. Mais tu m'as dis que tu avais mis 80 dans les boîtes.

D. Ah oui c'est vrai, donc j'écris 80 là, mais si j'écris 80 là, ça ne marchera jamais

M. Oui, tu voulais 36 - 80 mais 36 - 80

D. ça n'existe pas

M. Redis-moi ton problème depuis le début

D. Il y a un enfant, disons Jacques Chirac, qui a 36 billes qu'on place dans 20 boîtes 4 par 4. Il obtient 80 boîtes.

M. Qu'est-ce que ça veut dire ?

D. ça veut dire qu'il les garde dans les boîtes. Donc que c'est bien

M. Il a mis 80 billes dans les boîtes et au départ il en avait 36, que penses-tu de ça ?

D. Je pense que c'est faux

M. C'est pas que c'est faux, mais est-ce qu'il a pu mettre 80 billes dans des boîtes s'il n'en a que 36 ?

D. non

M. Donc il faut essayer d'arranger ton problème pour que ça marche. Tu vois, on ne peut pas prendre n'importe quels nombres pour un problème. Admettons que tu gardes ton problème, tu veux qu'il range des billes 4 par 4. On veut mettre des billes dans 20 boîtes. Si on veut qu'elles soient remplies .... 36.

M. Si tu as 36 billes et 20 boîtes et que tu mets déjà une bille dans chaque boîte qu'est-ce qui se passe ?

D. ça y est, j'ai trouvé, je crois savoir combien il va en rester 16

M. Mais il aura mis combien de billes dans chaque boîte ?

D. 16

M. Non, il va lui en rester 16 quand il aura mis une bille dans chaque boîte

D. 10 billes dans chaque boîte.

M. Il lui faut combien de billes ?

D. 100 billes.

M. Disons qu'il y a 100 billes et 20 boîtes, combien il va mettre de billes dans chaque boîte ?

D. Non, j'ai dit une bêtise, c'est pas 100, ça fait 1000. il y a 20 boîtes, il va en mettre 10 dans chaque boîte, donc ça va faire 1000 billes . Oui, j'en suis très sûr même.

M. Explique-moi pourquoi ?

D. Parce que j'ai très bien réfléchi, j'ai pas fait de mathématiques

M. Imagine que tu aies un copain à côté de toi et qu'il n'a pas compris

D. Il n'avait qu'à comprendre, il faut qu'il comprenne !

M. Si je te disais ça, qu'est-ce que tu en penserais ?

D. Je comprendrais

M. Tu dis que tu as 20 boîtes et 10 billes dans chaque boîte.

D. Disons que j'ai 1000 billes. 1000 c'est 20 x 10

M. 20 x 10 ça fait combien ?

D. Non, j'ai dit une bêtise .

M. Dis-moi déjà 20 x 10, c'est combien ?

D. 3000

M. Didier, allez

D. Je trouve 3000

M. 20 x 10, tu trouves 3000 tu es sûr de toi

D. Oui ... ah non ... 20 x 10 D. 2000

M. 20 x 10 ?

D. 2000

M. 10 x 10 ?

D. 1000

M. 10 x 10 ?

D. 100

M. Alors 20 x 10 ?

D. 1000

M. Non, si 10 x 10 fait 100, donc 20 x 10 ?

D. 120

M. Non, 20 c'est 2 x 10 donc 20 x 10 ?

D. 2000

M. Pas 2000

D. Attendez ... 20 000

M. Calme-toi un peu et réfléchis

D. J'y arrive pas

M. Si tout à l'heure tu l'as bien fait. C'est facile de multiplier par 10.

Didier compte 10, 20, ... 170 et dit "vous m'arrêterez ?"

M. Non, je ne t'arrêterai pas, c'est à toi de t'arrêter.

D. Mais vous m'arrêterez quand je serai tout près, hein?

M. Non, regarde 20 x10 c'est comme 10 x 20, d'accord?

D. Mais une fois 2 c'est bien 2 ? Voilà, eh bien, ça doit faire 200. Je l'avais bien dit !

M. Mais non tu avais dit 2000. Donc si tu mets 10 billes dans chaque boîte, ça fait 200 billes. On va prendre un nombre de billes plus grand. On prend 240 billes que tu avais rangées dans tes 20 boîtes.

D. J'ai trouvé, il faut faire une division.

M. Par la méthode que tu veux pourvu que tu puisses l'expliquer.

Il pose la division, prend le 24 et dit "dans la table de 20, je cherche ce qui se rapproche le plus de 24, comme je ne connais pas la table de 20, je cherche ce qui se rapproche le plus de 2 dans la table de 2, c'est 1, ça fait 20, je fais une soustraction, ça va faire 4, ensuite j'abaisse mon zéro, qu'est-ce qui se rapproche le plus de 4 dans la table de 2, c'est 2, ça fait 40, il reste 0. Il va lui rester 0 billes.

M. Et il en aura mis combien dans chaque boîte ?

D. 12

M. Et comment tu pourrais vérifier que tu ne t'es pas trompé ?

D. Je fais ça + ça + ça

M. Non, essaye de réfléchir

D. La maîtresse l'avait dit

M. La maîtresse t'a expliqué quelque chose et tu t'en souviens plus exactement, essaie de retrouver. On t'a dit que tu avais 240 billes que tu as rangé dans 20 boîtes, tu as trouvé 12 billes dans chaque boîte. Maintenant tu as 20 boîtes et 12 billes dans chaque boîte, tu sais comment trouver combien ça fait de billes en tout ?

D. Jamais la maîtresse ne nous a fait cette soustraction

M. Comment tu peux vérifier ?

D. En faisant 12 x 20

M. Bien sûr

D. J'ai dit au hasard

M. Non tu n'as pas dit au hasard !

D. Ah ben oui, puisqu'il nous reste rien sinon j'aurais fait ça, ça, et ça

M. Non, tu aurais fait 12 x 20 et ajouté le reste

D. Mais comme il n'y a pas de reste, oui j'ai trouvé

M. Avec un dessin, on peut comprendre. Tu as les boîtes, tu écris 12 au lieu de 4. 12 x 20, essaie de tête.

D. 280

M. Non, comment tu fais ?

D. Non, 240

On prend un autre exemple : 340 billes.

D. Je prends 2 chiffres au dividende. En 34 combien de fois 20 ? je connais pas la table de 20, alors je calcule qu'est-ce qui se rapproche le plus de 3 dans la table de 2, c'est 1, ça fait 20, il reste 14, j'abaisse mon zéro et ce qui se rapproche le plus de 14 dans la table de 2 c'est 7, il reste 0.

M. Conclusion ? Tu peux répondre au problème ?

D. Il reste

M. Quelle était la question ?

D. Avec 20 boîtes, est-ce que j'aurai assez de billes pour mettre 340 billes ?

M. C'était pas ça la question.

340 c'est quoi ?

D. Des billes

M. et 20 ?

D. Des boîtes

M. Qu'est-ce que tu faisais ?

D. Je rangeais des billes dans des boîtes.

M. Oui, et quelle était la question ?

D. Est-ce que j'aurai assez, non ce n'était pas ça. Combien me restera-t-il ?

M. Mais 17, c'est la réponse à quelle question ? que représente 17 dans ton problème ?

D. Il représente ce que ça donne, le résultat.

M. De quoi ?

D. Ben de ma division

M. Mais qu'est-ce que ça veut dire dans ton problème ... si je te demandais de faire encore un dessin (D. en même temps : j'ai trouvé). Fais un dessin qui représente ton problème.

Il dessine 17 billes qu'il partage en 2 paquets.

M. Où est 340 ?

D. là, les paquets c'est les 340.

M. Je ne comprends plus. Tu avais 340 billes

D. Que je range dans des boîtes de 20

M. Dans des boîtes de 20 ou dans 20 boîtes ?

D. Dans 20 boîtes

M. Tu avais fait tout à l'heure un dessin

D. Oui, mais ça va être embêtant.

M. Dessine tes 20 boîtes. (Il le fait). Et alors qu'est-ce que c'est 17 ? ... Tu as 20 boîtes et 340 billes. Je vois les boîtes mais je ne vois pas les billes.

D. Voyons, combien j'en ai ? 17

M. Qu'est-ce que c'est 17 ? Des billes ou des boîtes ?

D. Ce qui restera en trop ..... Bien sûr tout à l'heure il en restait 16 et 12.

M. Il en restait 16 et 12 ?

....

M. Tu as donc 17 billes dans chaque boîte, écris-le.

D. Je ne vais pas écrire 17 partout

M. Ecris 17 dans chaque boîte, enfin quelques fois, et quand tu en as marre, tu t'arrêtes.

Il en écrit 5 et s'arrête

D. Voilà ça fait 340 billes.

Je lui demande de prévoir le résultat de la division de 340 par 17, il prévoit bien 20. Il fait la division puis celle de 340 par 14.

Grille d'entretien pour les élèves de CE1.

1. Compte de 10 en 10 en reculant à partir de 138. Explique comment tu fais pour trouver vite le résultat dans ta tête.
Compte de 9 en 9 à partir de 40 jusqu'à ce que tu aies dépassé 120. Explique comment tu fais pour trouver vite le résultat dans ta tête.

2. Dans une classe, on organise un goûter.
On a décidé d'acheter des croissants et des tablettes de chocolat.
Les croissants sont vendus par sachets de 10.
Les tablettes de chocolat sont vendues par boîtes de 5.
Dans cette classe, il y a 25 élèves.

Invente des problèmes à partir de cette histoire et essaie d'y répondre.

3. Au jeu de nain jaune, il y a des jetons de différentes formes : des ronds, des carrés, des rectangles.
Un rectangle vaut 5 carrés et un carré vaut 5 ronds.
Pierre a 42 jetons ronds ; il voudrait les échanger de façon à avoir le plus possible de rectangles. Quels jetons aura-t-il à la fin des échanges ?

Dans une classe, la maîtresse distribue des bons points, des images et des cahiers : pour 10 bons points, on peut avoir une image ; pour 10 images, on a un cahier.
A la fin de l'année, Jean a collectionné 187 bons points. Combien peut-il avoir de cahiers ?

4. Comment sais-tu qu'on fait une leçon de mathématiques ? qu'est-ce qu'on y fait ?
A ton avis, quand on fait des mathématiques, on fait (jamais, quelquefois, souvent, très souvent)
- du calcul mental
- des opérations
- des dessins, des figures
- des exercices, des problèmes
- on fait autre chose ? Explique.

Parmi les activités du cours de mathématiques
Qu'est-ce que tu préfères ?
Qu'est-ce que tu aimes le moins ?
Qu'est-ce qui te paraît le plus facile ?
le plus difficile ?

5. Penses-tu que pour être bon en mathématiques, le plus important c'est
- de bien écouter le maître (ou la maîtresse)
- de bien apprendre ses leçons
- de se faire expliquer ce qu'on n'a pas bien compris
- de faire beaucoup d'exercices ou de problèmes
- autre chose (explique).
Et à ton avis, qu'en pense la maîtresse ?

6. Si tu n'as pas très bien compris, que fais-tu ?
- je demande à la maîtresse (ou au maître) de réexpliquer
- je demande à un camarade
- je demande à mes parents ou à mes grands frères et grandes sœurs
- autre chose (explique) :

7. T'arrive-t-il de faire des mathématiques quand tu n'es pas en classe ni en train de faire tes devoirs ? A quel moment ? Donne des exemples.

Penses-tu que les grandes personnes se servent des mathématiques dans la vie ? Pourquoi ?

8. Quel métier aimerais-tu faire plus tard ?
Penses-tu que tu te serviras de mathématiques dans ton métier ? Pourquoi ?
Quel métier font tes parents ? Penses-tu qu'ils se servent des mathématiques dans leur métier ?
A part professeur de mathématiques ou instituteur, penses-tu qu'il y a des métiers où on fait beaucoup de mathématiques ? lesquels ?

DOCUMENT ANNEXE AU CHAPITRE 5.

Entretiens avec des élèves de CE1.

Classe de CE1 de 21 élèves, 13 nés en 1980 (âge normal), 6 nés en 1979, 2 nés en 1978. Les entretiens ont été enregistrés. Nous résumons les réponses aux questions 4 à 8, nous donnons de larges extraits (une transcription abrégée de l'entretien oral) pour les questions 1, 2 et éventuellement 3. Selon le cas, l'interrogateur est désigné par M. ou J., l'élève par l'initiale de son prénom.

E1. Est 10 ans (née en 1978)

4. Comment tu sais qu'on fait une leçon de mathématiques en classe ?

E. La maîtresse le dit, elle donne une feuille, elle nous explique des fois ou alors on commence tout seuls.

Elle sait qu'on "fait des calculs, des fois qu'on doit poser nous-mêmes, des fois qui sont sur le papier". Elle aime les calculs et elle aime tout dans les mathématiques en général, et à l'extérieur elle aime le plus les dictées.

5. Pour être bon en maths, qu'est-ce qu'il faut faire ?

E. Bien apprendre ses leçons. Si on les sait vraiment bien, on n'a pas de problème pour les faire .

M. Pour faire quoi ?

E. des mathématiques.

M. Qu'est-ce qu'on fait en mathématiques ? des exercices ?

E. oui, des fois .

M. et des problèmes ?

E. oui, des problèmes, on en fait des fois.

M. Qu'est-ce que c'est des problèmes ?

E. Si on nous dit 100, c'est moins que 50, on doit trouver le résultat qui est vers le milieu.

M. Tu crois que 100, c'est moins que 50 ?

E. Non, 50, c'est plus petit que 100, on doit trouver un résultat vers le milieu.

Sur question, il trouve que c'est important aussi d'écouter la maîtresse et de faire des exercices. La maîtresse en donne des fois et elle en fait aussi avec sa mère.

6. Si tu n'as pas compris

E. Je demande à la maîtresse et elle explique.

M. Et à quelqu'un d'autre ? E. non.

7. Elle ne sait pas si les mathématiques servent aux grandes personnes, mais dit "des fois, dans les études, on leur pose des additions plus dures que nous".

8. Elle n'a pas d'idée du métier qu'elle fera plus tard ni de métier où les mathématiques servent. Sa mère est aide soignante, elle ne sait pas si les mathématiques lui servent.

2. Je lis le texte et dis : tu vas inventer des problèmes.

E. Je sais pas.

Elle relit le texte.

E. Donc, il y aura pas assez s'il y a que 10 croissants et 5 boîtes de chocolat.

M. Qu'est-ce qu'on peut faire ? Est-ce que c'est un problème, tel que c'est écrit là ?

E. Oui, parce que c'est nous qui devons répondre.

M. Oui, et tu dois répondre à quoi ?

E. Il faut que je regarde s'il y aura assez pour les 25 élèves.

M. Est-ce qu'on t'a posé une question ?

E. Non.

M. Alors, qu'est-ce que tu en penses ?

E. C'est pas vraiment un problème.

M. Pourquoi ?

E. Parce qu'il y a pas une question.

M. Est-ce que tu peux en faire un qui soit vraiment un problème ? ... Est-ce que toi, tu peux poser une question ?

E. Je sais pas.

M. Tu m'as dit qu'avec le sachet de 10 croissants, il n'y en a pas assez pour tous les élèves, est-ce que tu peux poser une question avec cette idée là ?

E. Dans une classe, il y a 25 élèves, et puisqu'on a décidé d'acheter des croissants en sachets de 10 et des boîtes de chocolat par 5, il y aura pas assez pour les 25 élèves.

M. Bien, je vais te poser une question. Combien on pourrait acheter de sachets de croissants pour qu'il y en ait assez pour les 25 élèves ? C'est une question. Si tu devais acheter les sachets de croissants, tu en prendrais combien pour les 25 élèves ?

E. Si je devais acheter des sachets de croissants, j'en achèterais encore 15.

M. Encore 15 croissants, c'est bien. Et si on est obligé de les acheter par 10, il faudrait acheter encore combien de sachets ?

E. Un paquet de 10 déjà, encore un paquet de 10, encore un paquet de 5, mais si on est obligé d'acheter par 10, on est obligé d'acheter 3 paquets.

M. Et il va t'en rester ? Si tu achètes 3 paquets ? ... Pour les plus gourmands .

E. On pourra les partager, ceux qui restent.

...

1. Maintenant, tu vas compter tout haut de 10 en 10 en reculant à partir de 138.

E. 138 ...120...

M.138, je veux reculer de 10 en 10, j'enlève 10.

E. 128. M. oui. E. 118. M. oui. E. 108. M. oui.

E. réfléchit 108... j'enlève 10... resterait 200...

M. Tu crois qu'en reculant, tu vas être à 200 ? tu es à 108. Comment, ça s'écrit 108 ? Tu as le droit d'écrire pour t'aider. (elle le fait). Oui, et tu retires 10. Tu peux faire un dessin pour t'aider.

E. 100... M. 100, oui, tu as enlevé combien pour arriver à 100 ? E. ...

M. Tu es à 108, tu veux retirer 10, quand tu es à 100, tu as retiré combien ? E. ...

M. Tu as retiré 8. Qu'est-ce qui est avant 100 ?

E. moins 2.

M. Oui, quel est le nombre qui est avant 100?

E. 90.

M. Pas tout à fait, 90, après 90 ?

E. 89, 99.

M. Avant 100, 99 d'accord.

E. 98, 97, 96...

M. D'accord, alors, qu'est-ce qu'il y a 10 places avant 108 ?

E. 199.

M. Pas cent quatre-vingt-dix-neuf.

E. 99

M. Pas 99, dessine les dizaines et les unités de 108.

Elle le fait.

M. Et tu veux enlever 10, qu'est-ce qu'il suffit de faire pour enlever 10 ?

E. des échanges.

M.Oui, comment tu fais des échanges ? Tu enlèves 10, que représente chaque rond ?

E. une dizaine .

M. D'accord. Qu'est-ce que tu enlèves ?

E. j'enlève (inaudible...) et après il faut des croix.

M. Mais non, quand tu enlèves 10, tu enlèves une dizaine tout simplement ! Enlève une dizaine, qu'est-ce qui te reste ?

E. 98.

M. Tu vois, quand tu enlèves 10, tu enlèves une dizaine. Avant 98 ?

E. 88 ... 78 ... 68, 58, 48, 38, 28, 18, 8.

M. Maintenant, tu vas compter dans le bon sens, mais de 9 en 9, tu vas commencer à 60.

E. 68 M. 60 et 9 E. 69 ... 78 ... 87 ... (je l'écris) ...

M. 87 et 9 ? Elle trouve 96 et continue oralement.

E. 105.

M. On va s'arrêter là. Dis-moi comment tu fais .

E. Je calcule dans ma tête.

M. Tu peux me dire tout haut ce que tu dis dans ta tête? Par exemple, là tu étais à 87, qu'est-ce que tu t'es dit ?

E. J'ai calculé, par exemple 7 + 9 après j'ai calculé comme ça.

M. Comment comme ça ? Dis-moi tout ce que tu t'es dit.

E. 9 + 7 = 15, à ;16 plutôt, je pose 6 et je retiens 1, 8 et 1, 9, ça fait 96 (elle la pose en le disant).

M. Tu poses l'opération dans ta tête ? E. oui.

3. Classe où la maîtresse distribue des bons points, des images et des cahiers.

10 bons points valent une image.

E. C'était comme ça en CP.

M. On peut échanger 10 images pour un cahier. Un enfant a gardé tous ses bons points depuis le début de l'année, et à la fin de l'année, il en a 187, alors, qu'est-ce qu'il peut avoir ?

E. Si on a 10 images, on peut avoir une image.

M. Si on a 10 bons points, on peut avoir une image.

Elle fait 197 + 10.

E. Il peut avoir 197 images s'il veut.

M. Ah, tu crois, il a 187 bons points, tu crois qu'il peut avoir 197 images ? E. Non. M. Tu crois qu'il peut avoir plus d'images que de bons points ? E. euh...

M. Qu'est-ce qu'il doit faire pour avoir une image ?

Elle dessine des rangées de ronds (une de 10, une de 8, une de 7).

M. Qu'est-ce que tu as dessiné là ?

E. 10 bons points, puis 8 bons points et 7 bons points.

M. Et pourquoi tu as dessiné 10 bons points et 8 bons points et 7 bons points ?

E. une centaine ça vaut une dizaine.

M. Une centaine, ça vaut une dizaine ?

E. centaine ... unité de mille ...

M. Tu en étais aux centaines et aux dizaines. Une centaine, ça vaut combien de dizaines ?

E. Une centaine... ça, c'est des dizaines ... Si j'en barre une, il aura déjà une image.

M. Chaque fois que tu barres une dizaine, il aura une image, oui. Et il y a combien de dizaines dans 187 ?

E. Euh... 17 ou 18...

M. Dis-moi, tu sais compter de 10 en 10 ? 10, c'est une dizaine, 2 dizaines, c'est combien ?

E. Oui, 10, en avançant ou en reculant ?

M. En avançant.

E. Donc, 10. M. 2 dizaines, 10 et 10 ? E. 20.

M. 3 dizaines. E. 30. M. 4 dizaines ?

E. 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100...

M. Et dans 100, tu as combien de dizaines ?

E. une dizaine.

M. Vas-y, on va les recompter sur les doigts en même temps. Une dizaine, ça fait ?

E. 20 M. Non. E. 10. M. 2 dizaines ? E. 20

M. 3 dizaines ? E. 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

M. Alors ? Combien de dizaines ? E. 10. M. 10 dizaines, 100, c'est 10 dizaines, tu as mis des ronds pour les dizaines, là tu as déjà 10 dizaines, et dans 80 ? E. 8 dizaines.

M. Donc, dans 180, tu as combien de dizaines ? E. 18.

M. 18 dizaines. Redessine tes 18 dizaines. Et il lui reste combien de bons points ?

E. Il lui en reste 7.

M. Avec ces 7 là, est-ce qu'il va pouvoir avoir une image ?

E. non.

M. Et avec les paquets de 10, il va pouvoir avoir combien d'images ?

E. 18.

M. oui. Il aura 18 images et il lui restera 7 bons points. (E. termine les phrases).

E2. Bil. 7 ans et demi. né en 1980

4. Comment tu sais qu'on fait une leçon de mathématiques ? A quoi tu reconnais ? ... Qu'est-ce qu'on fait en classe ?

B. On a appris hier à multiplier.

M. On ne fait pas des mathématiques toute la journée ? alors comment tu fais ?

B. C'est la maîtresse qui nous dit qu'on va faire des mathématiques.

M. Ah,... et qu'est-ce qu'on fait dans ces cas là ?

B. des additions...

Il aime les calculs, et d'une manière générale les mathématiques. Ce qu'il aime le moins, c'est la grammaire ou l'éducation civique. Il trouve que la multiplication, c'est le plus difficile mais que la numération est facile.

2. M. Qu'est-ce que c'est un problème ?

B. C'est ...

M. Je vais te lire quelque chose, tu vas me dire si, à ton avis, c'est un problème. C'est une petite histoire que je te raconte. (lecture du texte). Est-ce que c'est un problème ?

B. Oui.

M. C'est un problème, et que penses-tu de ce problème ? ... Pourquoi penses-tu que c'est un problème de mathématiques ? ou un exercice, comme tu veux.

Toujours le silence de B.

M. Est-ce que tu peux le faire ? On te donne des exercices comme ça en classe ?

B. Pas comme ça.

M. Alors, ils sont comment ceux qu'on te donne en classe ?

B. Sur la tricote, pour tricoter... M. Oui. Et alors ? Qu'est-ce qu'on fait pour tricoter ?

B. On croise la laine, y'a une épingle...

M. Vous avez peut-être fait un problème avec de la laine et du tricot, mais, cette histoire de goûter, si c'est pas un problème comme on fait d'habitude, est-ce que, toi, tu peux en inventer un ?

B. inaudible

M. Est-ce que tu pourrais poser une question ? ... Qu'est-ce qu'on pourrait se demander là ? ... Tu pourrais me raconter l'histoire ?

B. Il y a 25 élèves ... M. oui, 25 élèves dans la classe, un peu comme vous.

B. On est 21. ...

M. C'est une autre classe avec 25 élèves. Et puis ?

B. Ils achètent des tablettes de chocolat. ...

M. répète ... et des croissants ... Si j'achète une boîte de chocolat, est-ce que j'en aurai assez pour les élèves de la classe ? B. Non. M. Pas assez ... alors ... qu'est-ce qu'on pourrait faire ? ... Qu'est-ce qu'on pourrait chercher ?

B. De la boisson ...

M. Tu as raison, ils vont avoir soif, mais, pour l'instant, on s'occupe des croissants et du chocolat. Si on veut préparer le goûter, qu'est-ce qu'on peut se poser comme questions ?

B. ... Quelqu'un se lève et va dire "nous, on n'a pas eu de croissant et de tablette de chocolat !"

M. Ah ! Alors, ça, c'est vraiment pas juste. Donc, un sachet de croissants, ça ne va pas suffire. Qu'est-ce qu'on pourrait faire ?

B. Acheter 25 croissants.

M. Oui, mais, ils sont vendus par 10. Comment faire pour avoir 25 croissants ? Ils sont vendus dans des sachets de 10 et on n'a pas le droit d'ouvrir les sachets.

B. Alors, on achète 20 croissants du magasin et puis 5 croissants de la boulangerie.

M. D'accord, tu as raison. Et si on veut tout acheter là ? Ça ne fait rien s'il en reste, les gourmands en auront plus. Qu'est-ce qu'on peut faire encore ? Ça ne fait rien s'il en reste, il y en a peut-être qui ont un peu plus faim. Combien acheter de sachets pour être sûr que tout le monde en ait au moins un ?

Silence ... B. répète : combien de sachets de croissants ? et répond 2 sachets.

M. Est-ce que tout le monde en aura ? B. Non. M. Alors combien acheter de sachets pour que tout le monde en ait ? B. On achète 3 paquets.

M. Oui, et qu'est-ce qui va se passer si on achète 3 paquets ?

B. Ceux qui auront faim, ils en auront plus.

M. Et il y en aura combien en plus ? B. 10. M. 10, tu crois ? Si on achète 3 sachets, on va avoir combien de croissants ? B. 35 M. Ah, tu veux toujours acheter les 5 à la boulangerie, toi, non, on ne va que dans ce supermarché, la boulangerie est fermée. J'achète 3 sachets de croissants, comme tu m'as dit, j'en ai combien ? ... (long silence! ... B. 30. M. 30, oui, alors, si tu en donnes un à chaque enfant, qu'est-ce qui va se passer ? B. Il en restera 5.

5. Pour être bon en mathématiques, que penses-tu qu'il faut faire ?

B. ... M. Tu es bon en mathématiques ? B. oui.

M. Alors, comment tu fais ? B. ...

M. Est-ce que tu penses que le plus important, c'est de bien écouter la maîtresse...

B. oui M. continue à lire la liste ... qu'est-ce qui est le plus important ?

B. Apprendre ses leçons ...

M. Et la maîtresse, qu'est-ce qu'elle en pense ? qu'est-ce qu'elle dit qui est important?

B. Apprendre ses devoirs...

6. S'il y a quelque chose que tu n'as pas bien compris, que fais-tu ?

B. Je laisse, je fais les autres exercices, et quand j'ai fini, je fais l'exercice que j'ai pas compris.

M. Et si tu ne comprends toujours pas ? est-ce que tu demandes à quelqu'un de t'expliquer ? à qui tu demandes ? à la maîtresse ou ...

B. La maîtresse, elle veut pas.

M. Ah bon ! Quand c'est un exercice, mais quand c'est une leçon que t'as pas bien comprise ?

B. Elle veut pas.

M. Ah bon ! ...Tu ne demandes pas à la maîtresse de réexpliquer ? Est-ce que tu demandes à un camarade alors ?

B. oui. M. Et à tes parents, tu demandes des fois ? B. oui. M. est-ce que tu as des grands frères ou des grandes sœurs à qui tu demandes ? B. J'ai pas de sœur, j'ai 3 frères, un en Tunisie et 2 ici. B. Est-ce qu'ils sont plus grands que toi ? B. 5 ans et 11 ans. Le petit vient à la maternelle, et le grand, il est un peu handicapé, alors il va à l'école de ... Le frère qui est en Tunisie a 11 ans.

M. Tu ne peux pas lui demander. Tu ne demandes pas à la maîtresse ? tu n'oses pas? B. Non

M. Tu pourrais.

7. Il lui arrive de faire des mathématiques hors de la classe. Il fait toujours les mathématiques tout seul.

... B. Les mathématiques, je les fais tout seul !

Il pense que ça sert aussi aux grandes personnes.

8. Il pense que ça sert dans certains métiers mais il ne sait pas lesquels. Lui, il voudrait être docteur et il pense que les mathématiques ne lui serviront pas. Sa mère est malade et ne fait pas de métier et il ne sait pas ce que fait son père.

1. On part de 138 et on recule de 10 en 10

B. réfléchit longtemps au départ, enfin annonce 128.

M. Comment tu as fait ?

B. J'ai compté. M. Tu as compté comment ? ... ça ne fait rien, continue, tu m'expliqueras après.

B. (temps 2 fois moins long) 118 ... 108 ... 98 ... 88 ... 78 ... 68 (à partir de 98, ça s'accélère).

M. explique-moi comment tu fais, je vois que tu vas de plus en plus vite !

B. J'ai fait les deux nombres en premier, après je sais que c'est toujours le 8 en dernier, et j'enlève 1.

M. Et où tu enlèves 1 ?

B. à les dizaines. M. Très bien.

M. Je vois que tu vas vite, alors je vais t'en poser un autre. Tu vas compter de 9 en 9, en augmentant cette fois-ci, à partir de 50.

B. 59, 69

M. De 9 en 9, j'ai dit.

B. 68, ... 67...

M. 68 + 9, tu crois que ça va faire 67 ?

B. 77, ... 86, ... 95, ... 104, ... 113.

M. Tu vas 'arrêter là et me dire comment tu fais.

B. Jusqu'à 86, j'ai pas compris, et après j'ai vu que ça faisait 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3,

M. Ah bon ! et puis ? et tu dis que jusqu'à 86, t'as pas compris, alors comment t'as fait jusqu'à 86 ?

B. J'ai compté dans ma tête.

M. Comment ?

B; 50, après 59.... M. oui, et de 59 à 68, comment t'as fait ? B. J'ai compté.

M. Comment ? B. dans ma tête. M. Comment tu as compté dans ta tête ? 59, 60, 61... comme ça, ou tu as fait une addition dans ta tête ?

B. J'ai compté 61, 62...

M. Et tu m'as dit que ça faisait 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 ... pourquoi ça fait ça, à ton avis ?

B. ... M. Et qu'est-ce que ça fait pour les dizaines ?... là il y a deux 5 et après ?

B. 6, 7, 8, 9, 1, 0...

M. 10, oui, 0, mais il y a une centaine, alors, ça fait 10 dizaines... puis 11 dizaines. Alors qu'est-ce qui se passe, c'est magique ?... B. on a numéroté

M. On a ajouté 9. Qu'est-ce qui est facile ? Si je t'avais dit d'aller de 10 en 10, ça aurait été facile ? si je t'avais dit de 10 en 10 à partir de 59, tu aurais dit quoi ?

B. 60... M. A partir de 59, oublie le 50, 59 et 10, ça fait ? B. 70 M. Tu m'avais dit tout à l'heure ... 69. Pourquoi c'est facile à trouver ? Pourquoi c'est facile de rajouter 10 ? Tout à l'heure tu m'as dit que c'était très facile d'enlever 10. 59 et 10 ? B. 69.

M. Oui, mais tu voulais ajouter 9 et pas 10, donc àa faisait un de moins d'accord ? Tu ajoutes 10 et tu enlèves 1.

E3. Bec. 9 ans. né en 1978

4. M. Comment tu reconnais qu'on fait des mathématiques en classe.

B. parce qu'il y a des chiffres, et on reconnaît très vite, comme 9 + 6, comme ça...

M. Comment ça s'appelle ?

B. de la numération. M. et on fait des additions aussi ? B. oui, et des multiplications.

M. et des dessins ? B. oui, des fois. M. quel genre ?

B. des oiseaux, des voitures.

M. en cours de mathématiques ? B. non, en cours de dessin. M. Ah, et en cours de mathématiques ? B. des petits ronds comme ça, on doit les compter, et après on écrit.

Il aime la numération qu'il trouve facile. La multiplication est plus difficile que l'addition. : B. 9 + 6, c'est facile mais 9 multiplié par 6, ça doit durer 1 minute pour trouver le résultat.

5. M. Qu'est-ce qu'il faut faire pour être bon en mathématiques ? Tu es bon en mathématiques, toi ? B. oui. M. Et qu'est-ce que tu fais pour être bon en mathématiques .

B. J'apprends mes leçons, et puis quand on nous donne un contrôle, je comprends tout !

M. Comment tu fais pour comprendre tout ?

B. C'est trop facile, je peux pas résister ! Je fais vite, vite, vite !

M. Qu'est-ce qui est le plus important (liste) ?

B. écouter la maîtresse.

M. Et la maîtresse, qu'est-ce qu'elle dit qu'il faut faire ?

B. je sais pas... de fairre ça... de trouver des choses.

6. Si tu n'as pas bien compris

B. Je dis à la maîtresse que j'ai pas compris.

M. et alors, elle t'explique ? B. Ben, oui !

M. Est-ce que tu demandes quelquefois à quelqu'un d'autre ?

B. oui, à mes copains, des fois à Est. (1er élève interrogé) et des fois à ...

M. Elle est forte, Est. ? B. oui, elle est forte aussi.

M. Et chez toi ? B. des fois à ma sœur (15 ans, 4ème)

7. Il lui arrive de faire des mathématiques hors de la classe.

B. Je fais des fois des mathématiques pour m'entraîner, pour avoir bon à un exercice.

M et dans la vie, ça sert ?

B. à être plus fort, à comprendre !

8. Métiers où on s'en sert ?

B. oui, comme électricien, capitaine d'un bateau qui dirige. Il calcule où il va.

M. Comment tu sais ça ?

B. Je l'ai vu à la télé !

Plus tard, il aimerait être vétérinaire mais il ne sait pas si les mathématiques servent pour cela. Il pense qu'il devra en faire quand même.

Son père est homme de service et sa mère ne travaille pas. Il pense que son père se sert des mathématiques pour calculer de l'argent.

2. Qu'est-ce que c'est un problème de mathématiques ? Tu peux me donner des exemples ?

B. oui, comme 6 + 6 + 6 + 9.

M. Je te propose une histoire et tu vas me dire si, à ton avis, c'est un problème, ou bien comment on pourrait faire un problème avec ça. (je lis)

B. redit l'histoire... il faut multiplier...

M. Est-ce que tu penses que c'est un problème ?

B. Oui, c'est un problème.

M. Pourquoi ? Qu'est-ce qui te le fait penser ?

B. Parce qu'il dit que les croissants sont vendus par sachets de 10F.

M. Pas 10 F, 10 croissants (je commente la présentation des croissants et du chocolat dans le supermarché). Qu'en penses-tu ?

B. Je pense que c'est un problème..., un problème moyen, quoi ! facile et dur.

M. Qu'est-ce que tu penses qu'il faut faire avec ce problème ?

B; Eh, ben, il faut calculer tout, les croissants et les chocolats.

M. Et calculer quoi, alors ?

B. Euh...

M. Est-ce qu'on t'a posé une question dans ce problème ?

B. Non, on nous a pas posé de question !

M. Est-ce que c'est comme ça, d'habitude dans les problèmes ?

B. Non, on doit dire : combien vont-ils dépenser ? combien il y aura ?

M. Là, est-ce qu'on peut savoir combien ils vont dépenser ? B. Non. M. Pourquoi ?

B. Parce qu'il y a pas la somme !

M. Mais peut-être qu'on peut se poser une autre question ? Est-ce que tu as une idée de question ?

B. J'en ai pas trouvé.

M. Je t'en propose une

B. Combien faut-il acheter de chocolat pour être sûr que chaque enfant ait une tablette? Est-ce que c'est une question à laquelle on peut répondre ?

B. Oui. M. Est-ce que ça peut faire un problème ?

B. Oui, ça peut faire un problème .

M. Et qu'est-ce que tu en penses ? On peut trouver la réponse ?

B. Je crois que oui.... (silence) ... Alors là, pour les tablettes de chocolat, pour chaque enfant... il faut 20 tablettes de chocolat.

M. Pour chaque enfant ? Chaque enfant, on décide qu'on lui donne une tablette de chocolat... B. Oui ...

M. Si on t'envoie faire les courses, combien tu vas acheter de boîtes ?

B. S'il y a 25 enfants, il faudra ... 20... 20... euh... des tablettes de chocolat il faut en ramener 2...

M. Peux-tu faire un dessin qui peut t'aider ?

B. Oui. Les tablettes de chocolat sont rangées par ...

M. Dessine une boîte. Qu'est-ce qu'il y a dans la boîte ? B. Du chocolat.

M. Et il y a combien de tablettes dans la boîte ? B. 5.

M. Vas-y, dessine les 5 tablettes. Il le fait

M. Est-ce que tu auras assez si tu achètes une boîte ?

B. Non. M. Alors, combien tu vas acheter de boîtes si on t'envoie faire les courses ?

B. 4 boîtes, il faudra.

M. Tu peux les dessiner pour vérifier ?

B. Oui. Il dessine les 4 boîtes avec les tablettes à l'intérieur.

M. Il y en a combien là ?

B. 20, il y a 4 boîtes, et dans chaque boîte, il y en a 5.

M. 20. Est-ce qu'il y en aura pour tous les enfants ? Il y avait combien d'enfants dans la classe ?

B. Il y en a 25. Il en manque encore une. Il la dessine.

M. Et maintenant, il y en a pour tout le monde ? B. oui.

1. Compter dans sa tête de 10 en 10, en reculant, à partir de 138.

Long silence...

M. Qu'est-ce que tu fais là, dans ta tête.

B. Je compte de 10 en 10. Si c'est bon, ça fait 120, oui 120.

M. On était parti de quoi ?

B. de 138.

M. 138, quand tu recules de 10, ça fait 120, tu crois ?

B. Non, ça fait 137, 136, 135, 134, 133, 132, 131, 130 et 129.

M. Comment tu sais de combien tu as reculé ? Comment tu sais où tu en es ?

B. Parce que j'ai calculé, tous les chiffres que j'ai passés, je les ai mis dans ma tête, et j'ai continué.

M. Dis donc, c'est fatigant ça ! Et si je te disais 138 - 10?

B. ... silence M. Tu peux écrire 138. Ça fait combien 138 - 10 ? (Je l'envoie un peu en récréation et repose la même question à son retour).

B. On n'a pas encore appris les moins.

M. Ça ne fait rien. Tu peux imaginer. Comment on peut aller vite pour faire en reculant?

B. Je pense que c'est 128.

M. Pourquoi tu penses ça ?

B. Parce que 138, j'ai compté, j'ai dit 130, il manque 2, alors j'ai mis 128.

M. C'est bien. Tu peux continuer ? Ecris 128.

B. 118. ... ... 108 ... puis il écrit très vite 98 et 88.

Je l'arrête : Comment tu fais pour aller si vite ?

B. Parce qu'il y a 8 et pour 10, il faut enlever encore 2, ça fait 108, euh... qu'est-ce que je dis ? A chaque fois, il y a 8 et on enlève encore 2, comme 98, après ça fait, 78 et 68.

M. Maintenant, tu vas compter en augmentant, mais en ajoutant 9, et tu vas commencer à 50.

B. Moins 9 ?

M. Plus 9. B. répète, écrit 50, 59 et réfléchit longuement puis dit 69.

M. Tu penses que 59 et 9, ça fait 69 ? B. Non.

M. Comment tu fais pour trouver ? Et si c'était 59 et 10 ? B. ça fait 69.

M. Oui, alors, 59 + 9, est-ce que ça fait aussi 69 ?

B. Ça fait 58. M. Tu veux dire B. 68 ... ... M. 68 + 9 ... B. Ça fait 77 ... 77 + 9 ... 86 ... M. 86 + 9 ... 94 ...euh 95 ... ... 104.

M. Comment tu fais ?

B. J'ai compris parce que de 50 à 59 jusqu'à 68, on augmente une. M. oui, une quoi ?

B. une centaine. M. Plutôt une dizaine. B. oui. M. Et pour les unités ? B. ça descend.

3. M. Une dernière question. Dans une classe une maîtresse donne des bons points et des images. Quand on a 10 bons points, on peut les échanger contre une image. Un enfant a gardé tous ses bons points depuis le début de l'année et à la fin, il en a 187. Tu peux l'écrire ?

Bec ponctue le discours de oui pour montrer qu'il connaît ce système. Il écrit 187.

M. Il décide maintenant de les échanger. Combien peut-il avoir d'images ?

B. 166, il en aura.

M. Comment tu as fait ?

B. J'ai calculé dans ma tête.

M. Qu'est-ce que tu as calculé dans ta tête ? ... Combien donne-t-il de bons points pour avoir une image ? Comment il peut faire pour prévoir quand il a tout son tas de bons points devant lui, pour savoir combien il peut avoir d'images ?

B. Il les met en rangées; il compte et il les donne à la maîtresse.

M. Oui, d'accord, en rangées de quoi ? comment, en rangées ?

B. En rangées de 10.

M. D'accord, et il va en faire combien des rangées de 10 ?

B. 166.

M. Tiens, prends cette feuille et tu vas dessiner les paquets de 10 qu'il fait, et compter en même temps. 10...

B. 10, 20, 30... 100.

M. Ça, ça fait 100, et il a encore des bons points ?

B. Oui. M. Alors, continue... B. 101. M. C'est encore un paquet de 10 que tu dessines

B. Ah, oui! 110, 120, 30, 40, 50, 80, 90, ...

M. Il peut encore en faire autant ? B. oui. M. Il a utilisé combien de bons points jusque là ? B. 10. M. Tu m'as dit que c'était des paquets de 10. B. non, non...100.

M. Et jusque là ? B. encore 100. M. ça fait combien donc, en tout ? B. 200.

M. Et il en avait 200 ? M. Non, 187 M. Enlève les paquets qui sont en trop.

Il efface les 2 derniers paquets.

M. Il a fait combien de paquets là ? B. 187 -2.

Je répète la question.

M. Tu as dessiné les paquets. Tu en as combien là ?

B. 100.

M. Tu as 100 bons points, mais tu n'as pas dessiné 100 paquets. B. 10

M. Et là ? B. encore 10. M. Mais tu en as enlevé 2. B. 7

M. non, 8, vérifie.

Il recompte : ah, oui, 8.

M. Il a fait 18 paquets. Il fait des paquets de 10 et met un élastique. B. Ah !

M. Il fait 18 paquets comme ça, donc il aura combien d'images ?

B. (après réflexion) 18

E4. San, 7 ans 1/2. née en 1980

4. Comment tu sais qu'on fait une leçon de mathématiques en classe ?

S. Je sais pas.

M. Tu ne sais pas ?

S. Si, aujourd'hui...

M. Comment tu sais que tu en as fait ce matin ?

S. Parce qu'on en a fait.

M.C'est la maîtresse qui l'a dit ? S. oui

En classe de mathématiques, on calcule, on entoure et on compte. Elle ne peut pas donner d'exemple d'exercice ou de problème. En mathématiques, elle aime dessiner mais pas compter. Dans les autres matières, San préfère lire, et aime le moins écrire.

5. Pour être bon en mathématiques.

S. Il faut bien compter.

San est "un petit forte" en mathématiques.

M. qu'est-ce qui est le plus important pour devenir bon en mathématiques ? ... de bien écouter la maîtresse ? S. oui. M. de bien apprendre ses leçons ? S. oui.

M. Et de faire beaucoup d'exercices pour s'entraîner. S. oui.

M. T'en fais des fois, toi ? S. oui M. Tu fais les exercices que la maîtresse donne ?

S. oui. M. Est-ce que tu en fais d'autres ? S. non

M. Tu fais quelquefois des mathématiques quand tu n'es pas à l'école ? S. non

6. Si elle n'a pas bien compris, San demande à la maîtresse et à personne d'autre, sauf quelquefois à sa copine A.M.. A la maison, elle peut demander à sa mère et à son frère de 8 ans.

7. Elle pense que les grandes personnes ne se servent pas des mathématiques dans la vie... Elle accepte les courses sur suggestion. en disant "ils calculent"

8. Elle pense que ça sert peut-être aux gens qui servent dans les magasins mais elle voudrait être danseuse et qu'elle ne se servira pas des mathématiques. Son père "charge" et sa mère est infirmière. Elle pense qu'ils ne se servent pas des mathématiques dans leur métier.

2. Je lis le texte.

M. Est-ce que tu penses que c'est un problème ?

S. oui.

M. Pourquoi tu penses que c'est un problème ?

S. Parce que... non, je sais pas.

M. Comment on peut reconnaître un problème ?

S. Parce que il y a des problèmes... il y a des pièges.

M; Et là, il y en a ? S. non. M. Qu'est-ce que c'est des pièges ?

S. Par exemple, on met des trucs là et on tombe dans un piège. (En fait elle fait sans doute allusion à un jeu de calcul proposé dans le Ermel où il faut faire sauter un pion sur une droite numérique en évitant des pièges qu'a placés l'adversaire).

M. Et, là, tu peux inventer un problème, avec cette histoire ?

S. non

M. Est-ce qu'il y a une question dans cette histoire ?

S. non

M. Est-ce que tu peux en poser une ?

S. oui, est-ce que tu aimes le chocolat ?

M. Oui, est-ce qu'on peut répondre à cette question ?

S. Oui

M. Est-ce que c'est un problème de mathématiques de répondre à cette question ?

S. non

M. Peux-tu trouver une question qui ressemble à un problème de mathématiques ?

S. non.

M. Et moi, si je te pose la question suivante... Tu vas me dire si ça ressemble à un problème de mathématiques. Combien est-ce que je dois acheter de sachets de croissants pour en avoir pour tous les élèves ?

S. 2.

M. Pourquoi ?

S. Parce qu'ils sont 25.

M. Si tu achètes 2 sachets, tu auras combien de croissants ? S. 20

M. Est-ce que ça te suffira ? S. non.

M. Qu'est-ce que tu vas faire ?

S. Je vais demander au monsieur d'ouvrir un sachet et de m'en mettre 5 dans un sachet.

M. D'accord, et s'il ne veut pas ouvrir les sachets ? il ne vend que des sachets comme ça.

S. Je sais pas.

M. C'est pas grave si on en achète plus, les gourmands en auront plus.

S. 3 sachets.

M. Et il en restera ? S. oui. M. Combien ? ...

S. 20 (après un silence assez long).

M. Tu en as acheté combien dans tes 3 sachets ?

S. 30.

M. Oui, tu en donnes un à chaque élève... ... Tu en auras trop ? S. oui

M. Combien ? S. Je sais pas.

M. Tu peux faire un dessin qui t'aide ? S. non

M. Est-ce que la question que je t'ai posée ressemble à un problème de mathématiques ? S. oui.

M. Pourquoi ? S. je sais pas.

1.Compter de 10 en 10 à partir de 47.

S. 57. (...) 68.

M. Comment tu as calculé ? S. Dans ma tête.

M. Dis-moi tout haut ce que tu t'es dit dans ta tête.

... 47 + 10 = 57 et 57 + 10 = 68.

M. Et comment tu as fait ?

S. J'ai compté dans ma tête.

M. Il y a combien de dizaines dans 57 ? S. 5.

Je lui demande de dessiner les dizaines et les unités, elle fait 5 rangées de 10 ronds et une rangée de 7, et dit "j'ai fait 5 paquets de 10 et 7 paquets de 1.

M. Maintenant, je te dis +10, qu'est-ce que tu vas faire ? tu peux dessiner ? S. non.

M. Tu ne peux pas dessiner 10 ? S. si

Elle commence à recompter la dernière rangée, mais je lui suggère d'ajouter les 10 en dessous. Elle peut maintenant annoncer 67, mais ne peut répéter que "j'ai compté" quand on lui demande ce qu'elle a fait.

M. Tu as combien de paquets maintenant ?

S. J'en ai 7.

M. Oui, mais des paquets de 10 ? S. 6.

M. Donc, ça fait 67, d'accord. 67 et 10 ?

Elle ajoute en comptant un à un sa rangée de 10 avant d'annoncer 77, fait de même pour 87, 97 et 107. En ajoutant ses petits ronds, elle compte un à un tout bas.

S. J'ai dessiné les paquets de 10 et j'ai compté.

M. Une autre question 45 - 10.

S. Je sais pas . M. Tu peux peut-être dessiner pour trouver. E. non

M. Alors, tu peux peut-être compter en reculant à partir de 45.

S. oui, 45, 46... M. en reculant. S. 45, 44, 43, 42, 41, 40, 39, 38, 37.

M. C'est bien, maintenant, compte en reculant à partir de 107.

S. 107, 106, 105, 104, 103, 102, 101, 100, 99, 98, 97, 96.

Je l'arrête là, son rythme s'accélérait nettement, le passage de la centaine n'a posé aucun problème.

M. Maintenant, peux-tu dire ce que fait 107 - 10 ?

S. non.

M. Tu ne sais pas quand tu as reculé de 10 ? Dans 107, tu as combien de paquets de 10 ? S. 10. M. Et si tu enlèves un paquet de 10 ?

S. Ça fait 90. M. Et les 7, ça fait 97. S. oui.

M. Tu vois que tu peux le faire. Et 68 - 10, ça fait combien ? S. Je sais pas.

M. Mais si, tu sais, tu as combien de paquets de 10 dans 68 ? S. 5

M. Oui, et tes 8 unités ? S. 58. M. Tu vois que tu sais !

M. Est-ce que tu sais ajouter 9 ? S. 79. M. 79 + 9. S. 98.

M. Vérifie, c'est presque ça, comment tu as fait ? S. J'ai pas compté

M. Alors comment tu as fait S. j'ai calculé

M. Tu n'as pas compté mais tu as calculé. Ah! Quelle est la différence ? Explique-moi.

S. Je sais pas. M. Tu sais bien comment tu as calculé. ... Et puis, ne mange pas ton pull, il va y avoir un trou dedans touà l'heure, ta maman ne sera pas contente.

M. 79 +9 ... Comment vérifier ? S. je sais pas.

M. Comment tu fais pour ajouter 9 ?...... si c'était 10 ? S. ça ferait 80

M. Oui, mais j'avais dit 79, attention S. ça ferait 90.

M. ça ferait 89, parce que 79, tu as combien de paquets de 10 ? S. 7.

M. 7, oui, et tu ajoutes un paquet de 10, ça te fait bien 8 paquets de 10, mais tes unités il ne faut pas les oublier, ça fait combien finalement ? S. quatre-vingt-dix... 89

M. Mais, je ne voulais pas ajouter 10, je voulais ajouter 9, combien ça ferait ?

S. 88... parce que j'ai enlevé 1. M. C'est très bien.

M. 88 + 9 ? S. je sais pas. M. et 88 +10 ? S. je saurais ... 90

M. Et les 8, tu ne les oublies pas un peu ? S. 98.

M. Mais je ne voulais pas ajouter 10, je voulais ajouter 9. S. 97.

M. C'est très bien, tu vois que tu peux ! Tu me dis que tu ne peux pas, mais tu vois que tu peux, quand tu essaies.

E5. A. M. 7 ans 1/2 née en 1980

4. Comment tu sais qu'on fait des mathématiques en classe ? ... Tu en as fait aujourd'hui ? A. oui.

M. Comment tu sais qu'on en a fait ?

A. Je m'en rappelle .

M. A quoi tu as reconnu que c'était des mathématiques ?

A. J'ai entendu la maîtresse qui a dit qu'il y avait une dame d'arabe et puis elle nous faisait des petites choses sur les mathématiques, alors...

M. Pas d'arabe, dans la salle d'arabe, tu veux dire. D'accord mais en classe, tu en as fait aussi ? elle l'a dit ou comment tu l'as su ? A. Je l'ai entendu dire.

Elle ne sait pas dire seule ce qu'on fait en mathématiques mais répond à partir des suggestions (calcul, exercices, problèmes, numération)

Elle aime "faire des plus, des moins aussi", elle aime "un peu" ce qui se fait à l'école, mais ce qu'elle aime le moins c'est le calcul mental parce que c'est trop difficile. Ce qu'elle trouve plus facile c'est "les plus, les moins". Je lui demande si elle fait des moins en classe, elle me répond que non, mais qu'elle en fait à la maison avec sa maman.

7. Elle pense que les mathématiques peuvent servir dans la vie aux grandes personnes mais n'a pas l'air très convaincue et ne sait pas dire à quoi ça sert.

8. Elle pense que ça peut servir à certains métiers comme caissière. C'est ce que fait sa maman et c'est ce qu'elle voudrait faire aussi. Son papa travaille sur les machines, il se sert peut-être des mathématiques.

2. Je vais te proposer une histoire, tu vas me dire si c'est un problème ou pas. ...

A. oui, parce qu'on dit les croissants sont vendus par sachets de 10 et les tablettes de chocolat par boîtes de 5. Dans cette classe, il y a 25 élèves, ça sera pas assez, parce que 10 + 5, ça fait 15 et il y a 25 élèves.

M. Comment on va faire ? Si on veut donner un croissant à chaque élève, quelle question on peut se poser avant de faire les courses ?

A. Il y a pas assez de croissants.

M. Dans un sachet, il y a pas assez de croissants, mais on peut acheter plusieurs sachets, il y en a beaucoup à Cora (elle m'a dit qu'elle voulait devenir caissière à Cora comme sa maman).

A. On peut acheter 2 paquets de croissants ...

M J'en aurai assez ? A. oui. M. J'aurai combien de croissants ? A. 20F

M. Pas 20F, je ne t'ai pas dit que ça coûtait 10F. Tu as déjà vu à Cora des sachets de croissants ? 2 paquets, ça fait combien de croissants ... ... Tu peux dessiner les paquets de croissants ?

Elle dessine un rectangle avec quelques croissants à l'intérieur. Je lui fais remarquer qu'il y en a 10, elle complète.

M. Si tu as 2 paquets, ça fait combien de croissants ? A. 20.

M; Est-ce que ça te suffit ? A. oui.

M. Il y avait combien d'élèves dans la classe ? A. 25.

M. Alors, tu vas pouvoir donner un croissant à chaque élève si tu achètes 2 paquets ?

A. non. M. Il y a des enfants qui vont avoir faim. Alors qu'est-ce qu'on peut faire ?

A. Acheter des petits gâteaux.

M. Pour que tout le monde ait la même chose, il faut acheter combien de paquets ?

A. 25 paquets.

M. Là, ils vont avoir une indigestion. Si j'achète 3 paquets, j'aurai combien de croissants ?

A. 25.

M. Tu crois ? Dessine les paquets, tu ne mettras pas les croissants à l'intérieur, tu mettras seulement des petits traits pour que ça aille plus vite.

Elle dessine en comptant ses croissants dans chaque paquet.

M. Combien tu en as ?

Elle compte ses croissants un à un avant de répondre 30.

M. Tu en as assez maintenant ? A. oui.

M. Il va t'en rester ?

Elle compte sur ses doigts 26, 27, ... 30 et annonce 5.

1. Compter de 10 en 10 à partir de 58 et d'écrire les nombres qu'elle annonce.

Elle compte sur ses doigts jusqu'à 68, annonce assez vite 78, puis 98 mais écrit bien 88. Je lui rectifie sa lecture, elle écrit correctement 98 puis annonce 118 qu'elle écrit correctement. Je lui demande de vérifier 98 + 10. Elle compte sur les doigts, je lui demande de parler tout haut. Elle compte 98, 99 ... et s'arrête à 108 qu'elle écrit correctement. Pour 108 et 10, elle compte aussi un par un dit 118 puis annonce 209. Je rectifie.

Je lui demande comment elle a fait pour aller vite de 68 à 78.

A. Un jour ma maman, elle m'a fait apprendre toute seule parce que avant, j'avais pas des bonnes notes. On avait un exercice de 2 en 2, j'y arrivais pas, ma maman non plus, alors elle m'a appris et après j'ai su toute seule.

M. Comment tu as fait pour aller vite ?

A. Je me rappelais plus, après 50, 58, c'est 60.

M. Combien de dizaines dans 58 ? A. 5.

M. Si tu rajoutes une dizaine, ça te fait ? A. 6 M. Donc, ça te fait ? A. 68

M. Et si tu enlèves une dizaine, tu sais le faire ? On va dire 87, on enlève une dizaine, qu'est-ce que ça fait ? A. 88 M. Ecris 87.

Elle écrit 97. Je le lui dis, elle corrige.

M. Enlève une dizaine A. 97 M. répète la question.

M. Combien de dizaines dans 87 ? A. M. Une dizaine de moins A. 9

M. enlève une dizaine A. 7. M. 7 dizaines, alors comment s'écrit ton nombre ?

A. 78. M. 77. Pourquoi tu changes les unités ?

M. 25 + 9. A. Ça fait 24.

M. Tu crois que 25+9, ça fait 24 ? Il y a quelque chose qui ressemble, mais... Vérifie, comment tu as fait? A. 5 et 9, ça fait 14, et + 2, ça fait 24.

M. Pourquoi ? Plus 2 dizaines. 14... A. 26.

M. 14 d'accord, mais plus 2 dizaines. A. ça fait 16

M. 14 +2, ça fait 16 d'accord, mais dans 14, il y a combien de dizaines ? C'est pas +2 que tu ajoutes, c'est + 20. Dans 25, tu as pris 5, 5 + 9, ça fait 14, d'accord, mais ,c'est pas +2 que tu dois rajouter, c'est + 20.... +20, ça fait combien ? 14 + 20 ? A. 61

M. 14 +20, tu crois que ça fait 61 ? Tu as combien de dizaines dans 14 ? A. 4.

M. Non, 14... A. 1

M. 1 dizaine. Et tu ajoutes 2 dizaines, ça t'en fait combien ? A. 3

M. 3 dizaines. Et combien d'unités ? 14 + 20...

A. Ça fait 34, parce que j'écris 14 + 20. Je fais un arbre. (Elle écrit l'opération avec ses doigts sur la table), après je fais 0 + 4, ça fait 4 et 1+2, ça fait 3, alors ça fait 34.

E6. **Fri 8 ans** née en 1980

4. Elle déclare ne pas savoir quand on fait une leçon de mathématiques, mais n'hésite pas pour dire qu'on y fait des additions, des multiplications.

Elle préfère les additions, qu'elle trouve faciles mais n'aime pas les multiplications et les additions mystère qu'elle trouve difficiles pour elle. Le calcul mental n'est pas facile non plus.

5. Elle déclare ne pas savoir ce qu'il faut faire pour être bon en mathématiques. L'interrogateur commence à lire la liste, alors elle dit "oui, il faut bien travailler, après on va dans d'autres classes, après on fait un métier."

J. Qu'en pense la maîtresse ?

F. Il faut bien travailler, bien écouter.

6. Quand tu n'as pas bien compris, que fais-tu ?

F. Quand elle a mis la note, je comprends de plus en plus, je m'entraîne.

J. Est-ce que tu demandes quelquefois des renseignements ?

F. Non, je ne demande jamais de renseignements.

J. Tu te débrouilles toute seule ? F. oui

J. Même à un copain ou une copine ? F. non

J. A ton papa, à ta maman ? F. Si de temps en temps.

J. Tu as des grands frères ou des grandes sœurs ?

F. oui, ils m'aident si j'ai pas compris.

7. Fais-tu quelquefois des mathématiques quand tu n'es pas en classe ou en train de faire tes devoirs ?

F. Oui, je m'entraîne. ... Je fais des additions de temps en temps, des calculs.

Elle ne sait pas si les mathématiques servent à quelque chose mais elle pense que les grandes personnes s'en servent, mais elle ne sait pas qui.

8. Elle voudrait être infirmière comme sa maman mais elle ne sait pas si les mathématiques servent. Elle ne sait pas ce que fait son papa. Elle ne pense pas qu'il existe des métiers où il faille savoir beaucoup de mathématiques. Ça sert pour les courses et pour l'école.

1. Sais-tu compter de 10 en 10 ?

F. non

J. Ajouter 10 à 138, tu sais faire ou non ?

F. Je sais pas faire .

J. Dans 138, tu peux me dire s'il y a des centaines, des dizaines ou des unités ?

F. des centaines... des unités, des dizaines, des milliers...

J. Dans 138, tu as entendu des milliers ?

F. Ah, non !

J. Combien il y a d'unités dans 138 ? F.8

J. Et combien de dizaines ? F. 3

J. Qu'est-ce qu'on fait quand on ajoute 10 à ton avis ?

F. Je sais pas

J. Par exemple, si tu fais 11 et 10, combien ça fait ?

F. Je sais pas

J. Mais si, tu sais F. 21 J. Tu vois bien que tu sais ! Encore 10 ?

F. 30 J. 30 et... 21 et 10 ? F. 31

J. 31 et 10 ? F. 40 après c'est 41

J. 41 et 10 ? F. 50, 51

J. Tu vois bien que tu sais ! 33 et 10 ? ... Tu vas y arriver, il n'y a pas de problème...

Comment ça s'écrit 33 ?

F. 3 et 3 J. si tu ajoutes 10 ? F. quarante... quatre

J. 44, tu crois ? F. 43

J. 43, très bien, tu vois que tu sais faire !

2. Je vais te raconter une histoire et tu vas me dire si c'est un problème ou non. (Elle raconte le texte). Est-ce que c'est un problème ?

F. oui

J. Est-ce qu'il y a des questions dans un problème ?

F. Il y a des moments où il y a des questions dans un problème.

J. Et dans ce problème là, est-ce qu'il y a des questions ?

F. non J. Est-ce que tu pourrais inventer une question pour ce problème ?

F. Combien y a-t-il d'enfants ?

J. Est-ce que tu crois que c'est une bonne question ?

F. non

J; Pourquoi tu penses que ce n'est pas une bonne question ?

F. On sait qu'il y a 25 enfants.

J. Oui, on sait qu'il y a 25 enfants. Si on sait lire, on peut répondre. Est-ce que tu peux poser une question où il sera plus difficile de répondre ?

F. Combien coûte le prix ?

J. Combien ça va coûter. Est-ce qu'on pourra y répondre à cette question ?

F. Je sais pas.

J. Est-ce que toi, tu pourrais y répondre ? F. Non

J. Pourquoi tu ne pourrais pas y répondre ? F. Je sais pas.

J. Parce que tu ne veux pas te creuser la tête ou parce qu'il y a quelque chose qui te manque ?

F. Il y a quelque chose qui manque.

J. Qu'est-ce qui manque ? F. Je sais pas

J. Tu ne sais pas mais il manque quelque chose ? Il manque le prix, je ne te l'ai pas dit, alors tu ne peux pas savoir.

E7. Nac. née en 1979

4. On sait qu'on fait des mathématiques en classe parce que la maîtresse le dit, après elle donne des feuilles et on sait que c'est des mathématiques.

Nac ne sait pas dire ce qu'on fait en mathématiques, mais quand on lui propose le mot calcul, elle réagit et oui "oui, des calculs, des fois je fais 16 + 16, 6 et 6, 12, je mets 2, et 2 et 2, 4". L'interrogateur intervient "16 et 16, tu m'as dit" N. "ça fait 3, 32".

Elle ne sait pas ce qu'on fait d'autres, accepte les problèmes "des fois" mais ne réagit pas aux dessins ni au calcul mental.

Elle préfère les additions et aime le moins les abaques et puis 16 + 16.

ce qui lui paraît facile, c'est 16 + 16 et ce qui lui paraît difficile, c'est 99 + 99.

5. Pour être bon en mathématiques, elle pense qu'il faut bien travailler. D'après elle, la maîtresse pense que pour être bon en mathématiques, il ne faut pas faire de bêtise, rester calme et être gentille, travailler bien et être poli. "C'est comme ça qu'on travaille bien et qu'on est gentil. Et après qu'on est mort on verra, ceux qui sont méchants, ils restent au diable et ceux qui sont gentils ils montent au paradis."

J. Et si on est bon en mathématiques, on va au diable ou en paradis ? N. En paradis.

6. Si tu n'as pas bien compris qu'est-ce que tu fais ? ... Tu demandes à un copain ou à une copine ?

N. oui, ils m'expliquent. Des fois quand je suis pas là comme aujourd'hui, ... quand je vais au CMPP... après je reviens, Estelle m'explique.

J. Est-ce que tu demandes aussi à la maîtresse de t'expliquer ? N. oui

J. Et à ton papa, ta maman, tes grands frères ou tes grandes sœurs ?

F. seulement à mon frère qui a 9 ans.

7. Il lui arrive de faire des mathématiques chez elle. Des abaques.

Elle pense que les grandes personnes se servent des mathématiques mais ne sait pas pourquoi.

8. Plus tard, elle veut être coiffeuse mais elle pense que les mathématiques ne lui serviront pas. Sa maman ne travaille pas, son papa ne travaille plus mais il était jardinier. Elle ne sait pas si ses parents s'en servent mais elle pense qu'il y a des métiers où on doit s'en servir, par exemple maîtresse. Pour le reste, elle ne sait pas.

Elle demande à plusieurs reprises si on enregistre et si elle pourra écouter la cassette.

2. As-tu une idée de ce qu'est un problème de mathématiques ? Est-ce que tu en fais à l'école ?

N. Compter de 9 en 9 en arrière par exemple.

J. Ça, c'est un exercice, un problème, il y a une histoire. Je vais te raconter une histoire et tu vas me dire si on peut faire un problème avec ça ou pas. (Elle lit l'histoire en disant qu'on fait un goûter pour l'anniversaire d'un enfant). Est-ce que c'est un problème ?

N. oui

J. Est-ce qu'il y a des questions dans un problème ?

N. Non.

J. On pose un problème et l'enfant n'a rien à faire ?

N. si

J. Qu'est-ce qu'il faut qu'il fasse alors, l'enfant, quand on lui pose un problème ?

N. Quand il a un problème, il demande à la maîtresse et elle lui explique, et sinon, il demande à son camarade.

J. Est-ce qu'il y a des questions dans l'histoire que je t'ai racontée ? ...... Est-ce qu'on pourrait chercher quelque chose ? N. oui. J. qu'est-ce qu'on pourrait chercher ?

N. C'est l'anniversaire par exemple.

J. oui, alors qu'est-ce qu'on peut se poser comme question ?

N. Par exemple, lui, il sait pas que c'est son anniversaire et on lui dit "aujourd'hui, c'est ton anniversaire et on va acheter du chocolat et des croissants.

J. On peut s'en poser d'autres, des questions ? ...

J. Est-ce que tu pourrais inventer un problème, toi ?

N. C'est quoi des problèmes ?

J. C'est des histoires où il y a des questions.

Nac ne peut pas en inventer.

E8. Alee né en 1980.

4. Il sait quand on fait des mathématiques parce que sur la feuille, il y a écrit en haut mathématiques. Et des fois la maîtresse le dit.

J. Quel genre d'activités on fait en mathématiques

A.Sur le cahier de mathématiques, on écrit des chiffres, on recule...

Sur suggestion de l'interrogateur, il reconnaît qu'on fait des opérations... Il sait faire des petites opérations, plein de choses, des additions où on donne le résultat...il ne sait plus le nom... J. des additions mystère?

C'est cela mais il les trouve un peu dures, il cite aussi les devinettes mais pense que c'est plutôt en orthographe. Il accepte des exercices et des problèmes sur suggestion, mais pense qu'on n'en fait pas beaucoup.

Il préfère les additions et aime presque tout mais ne se trouve pas très très bon en mathématiques. Parfois il se trompe "dans les chiffres en reculant". Ce qui est facile, c'est les additions.

5. Pour être bon en mathématiques, "il faudrait donner des trucs pas trop durs, mais parfois quand on donne du travail dur j'y arrive. Mais je suis pas très bon en problèmes."

J. Qu'est-ce que tu penses qu'elle pense qu'il faut faire pour être bon en mathématiques ?

A. Il faut apprendre plus les leçons. Elle dit aussi qu'il faut pas trop regarder la télé quand on travaille. Parce que j'ai un copain dans la classe (yan), il regarde trop la télévision et il dit n'importe quoi en classe.

6. Si tu n'as pas bien compris quelque chose en mathématiques, qu'est-ce que tu fais? A. J'essaie de comprendre.

J. Si tu n'y arrive pas ?

A. La maîtresse, elle redit, parfois j'entends pas bien...

J. C'est la maîtresse qui t'explique ?

A. Non. Elle dit ce qu'il faut faire

J. Est-ce que tu demandes à quelqu'un de t'aider parfois ? A. non

J. Ni aux copains, ni à ton papa, ni à ta maman ?

A. Si, parfois à mon père.

7. Il lui arrive de faire des mathématiques tout seul pour bien travailler en mathématiques. Il fait des trucs un peu plus durs qu'à l'école, des opérations mystère par exemple.

8. Plus tard, il voudrait être policier et il pense que les mathématiques ne lui serviront pas. Il pense qu'elles servent peut-être à sa maman parce qu'elle travaille dans une école. Son papa a été policier, maintenant il travaillle dans un bureau. Il pense qu'il y a des métiers où ça sert comme maîtresse, mais ne sait pas s'il y en a d'autres.

1. Tu m'as dit que tu comptais en reculant, peux-tu compter en reculant de 10 en 10 à partir de 138 ?

A. Ah, non pas 138.

J. C'est trop grand ? 45 alors

A. Je pense que je peux. 45, 35, ...25 ... 15 ... 10, euh, 5.

J. Et après, on peut encore ?

A. non, on peut plus.

J. Alors, on va le faire à partir de 138, on aura de la place.

A. non parce que... (changement de cassette)

J. à partir de 38.

A. Alors, 138, je vais essayer... c'est pas 128 ?

J. Mais si, c'est 128 !

A. 118 ... 110 J. Réfléchis, on enlève 10 A. 108... 98 ... 88 ... 78 ... 68 ...

Le rythme s'accélère.

J. Comment tu fais pour aller si vite ?

A. Je compte dans ma tête vite.

J. Et qu'est-ce que tu fais exactement quand tu enlèves 10, tu m'as dit 98, 88, 78, 68, ça allait vite là ... pourquoi tu peux aller si vite ?

A. J'en sais rien.

J. Est-ce que tu pourrais compter de 9 en 9 à partir de 40 ? 40, tu ajoutes 9...

A. 39

J. Tu ajoutes cette fois

A. ah ! 49, 59

J. combien tu as ajouté à 49 pour faire 59 ?

A. on était à 49 ? 48... 58, non...

J. Tu es sûr ou tu es pas sûr ?

A. Je sais pas.

J. Tu ne vois pas un moyen d'ajouter 9 qui soit pratique ? 49 et 9 ?

A. 49 ... 58 J. et après ?

A. 69, non ?... J. C'est pas vraiment ça. A. 67

J. Oui, mais tu ne vois pas un moyen pour aller vite et ne pas se tromper ?

A. non, pas là.

J. Pour 10, tu avais des idées mais pour 9, tu n'en as pas ?

A? oui, mais 10, c'est plus facile.

J. Pourquoi ?

A. Parce que déjà 10 et 10, ça fait 20, et 20 et 20, ça fait 40.

J. Tu n'as pas ajouté 10 là.

A. J'ai ajouté 20. 10 et 10, 20, après si on rajoute 10, ça fait 30, après 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

2. Je vais te lire ce qui est sur ma feuille et tu vas me dire si c'est un problème ou non.

A. Peut-être, oui.

J. Qu'est-ce qu'il faut répondre ? ...Est-ce qu'il y a une question ? ... A. oui

J. Est-ce que je t'ai posé une question ?

A. Vous pouvez répéter parce que je me rappelle plus.

Après relecture... J. est-ce qu'il y a une question à laquelle on peut répondre ?

A. Est-ce qu'il y a 25 élèves ? J. Non, il y a 25 élèves, c'est pas une question, ça, moi je te dis qu'il y a 25 élèves dans cette classe, c'est un renseignement que je te donne.

A. Est-ce qu'il y a une question ? J. Oui, est-ce qu'on peut se poser une question ?

A. non J. Non, on ne peut pas se poser de question ? ... Est-ce que tous les enfants vont avoir un croissant ?

A. Oui, mais on achète combien de croissants ?

J. Ah, ben, c'est peut-être une question qu'on pourrait se poser. Alors combien il faut acheter de croissants ?

A. 25.

J. Oui, mais on peut seulement les acheter en paquets de 10, alors comment on va faire ? A. Je sais pas là...

J. Combien tu en achèterais, toi, de paquets de 10 pour la classe ? pour être sûr que chaque enfant en ait ?

A. En paquets de 10, on pourra pas.

J. On pourra pas faire qu'ils en aient exactement un chacun.

A. des paquets de 5, oui.

J. Combien il en faudrait de paquets de 5 ? A. 5.

J. Et là, comment on peut faire alors, combien on va prendre de paquets de 10 pour être sûr que chaque enfant ait au moins un croissant.

A. On peut prendre 2 paquets de 10.

J. Si on prend 2 paquets de 10, il y a pas des enfants qui vont être embêtés ?

A. Si parce qu'il en manque 5.

J. Alors qu'est-ce qu'on pourrait faire ? on aurait une solution pour en avoir trop ...

A. Ben oui, on prend 3 paquets de 10.

J. Et il y en aura combien en trop ?

A. 5.

J. Et les tablettes de chocolat ? elles sont vendues par paquets de 5, alors combien on va en acheter ?

A. Ben 5.

J. Est-ce que tu en inventerais un toi, de problème.

A. Je sais pas, j'ai jamais fait ça.

J. Est-ce que tu pourrais le faire ?

A. Non, je pense pas, peut-être que je peux mais ... je réfléchis.

3. J. Je vais t'en poser un (problème des bons points). Un enfant a 75 bons points, combien il peut avoir d'images ?

A. Oui, mais il lui reste 5 bons points alors.

J. Oui, il lui reste 5 bons points mais il aura combien d'images ?

A. 65 c'était ? J. 75.

A. Je me rappelle plus ce que vous avez dit.

J. Je veux bien que ça soit 65 bons points. Et puis il a une image pour 10 bons points. Tu m'as dit qu'il lui restera 5 bons points, mais il aura combien d'images ?

A. 6.

J. Et s'il avait eu 75 bons points ?

A. 75... 7

J. Il aurait 7 images , et il lui resterait combien de bons points ? A. 5

E9. Pat née en 1980.

4. Elle sait qu'elle fait des mathématiques parce qu'elle est en train de calculer des additions et des additions à trous. On calcule en ligne et en colonne. Sur sollicitation elle reconnaît qu'on fait des problèmes et, rarement, des dessins et des figures.

Rien ne lui semble difficile, sauf les dictées, mais ce n'est pas des mathématiques.

En mathématiques, tout est facile. Le plus facile, c'est les lignes et les colonnes et le plus difficile, "les pièges à trous". Elle aime mieux les opérations tout court et n'aime pas les pièges à trous.

5. Pour être bon en mathématiques, "il faut apprendre bien ses leçons et être sage pour aller plus vite, ... et rien d'autre"
Elle ne sait pas ce que la maîtresse pense qu'il faut faire pour être bon en mathématiques, mais elle sait qu'elle a une idée.

6. Quand il y a quelque chose qu'elle n'a pas bien compris, elle demande à la maîtresse, et chez elle, elle demande à sa maman.

7. En plus de l'école et des devoirs, des fois elle s'entraîne sur des cahiers de mathématiques, de grammaire et d'histoire.

8. Plus tard, elle veut être "bétonnière", construire des maisons, elle pense que les mathématiques lui serviront "pour savoir combien de trucs il faudra, par exemple si c'est un hôtel, il faudra savoir combien de briques et de fenêtres il faudra." Sa maman ne travaille pas mais se sert des mathématiques les jeudi et vendredi "parce que c'est ses jours préférés" "pour s'entraîner encore un peu parce qu'à 14 ans elle a quitté l'école".
Elle pense que son papa qui travaille à l'usine ne se sert pas des mathématiques mais qu'il y a beaucoup de métiers où on s'en sert : à l'école et puis ceux qui font démarrer les bateaux, les marins.

1. Est-ce que tu sais compter ? P. Oui J. De 10 en 10 ? P. Pas trop
On essaie...
P. 20, 30, 40, 50, 60...
J. C'est trop facile dans ce sens là...
P. Après je me rappelle plus.
J. Là, c'est trop facile, maintenant tu comptes de 10 en 10, mais en reculant, tu commences à 50.
P. 50, 40, 30, 20, et 10.
J. Oui, et si tu commences à 55 ?
P. Ah, j'y arriverai pas ... 54, 53, 52, 51, 60, non
J. On en était à 51.... tu en es à quel doigt ?
P. 49, 48, 47, 46, 45, 44, 43, 42, 41 et 39.
J. Avant 41, il y a 39 ? P. 40
J. Ah, oui, tu m'as dit tout à l'heure aussi 51 et avant 51, tu m'as dit 49. Avant 51, il y a quoi ? P. 50
J. Est-ce que tu saurais compter de 9 en 9 ? P. Je sais pas
J. Essaie 9 et encore 9 P. 9... J. Tu crois ? P. 18 J. et encore 9 ?
P. ...24, 25, 26 , 27. (elle compte sur ses doigts). J. et encore 9 ?
P. 28, ... 36.
J. Et tu ne peux pas trouver une manière plus rapide que de compter sur tes doigts?
P. non
J. Pour toi, c'est le plus facile ?
P. oui

2. Maintenant, je vais te raconter une histoire et tu vas me dire si c'est un problème.
P. oui
J. Quelle réponse on va donner au problème ? Qu'est-ce qu'on va chercher ?
P. Je sais pas.
J. Est-ce que je t'ai demandé quelque chose ? Est-ce que je t'ai posé une question?
P. non
J. Est-ce qu'on peut en inventer une de question ?
P. Oui
J. Essaie d'en inventer une
P. Il y a 25 élèves et comment on va faire pour acheter... pour tout le monde... je sais pas.
J. Comment faire pour en acheter pour tout le monde ? C'est une bonne question. Alors, tu vas au supermarché faire les courses; les croissants sont vendus par sachets de 10 et les tablettes de chocolat sont enveloppées 5 par 5, alors combien tu vas acheter de sachets de croissants et de chocolat pour que tous les enfants aient un goûter.
P. 15 paquets.
J. Il y a combien de croissants dans chaque paquet ?
P. 20
J. non, il y en a 10 et il y a 25 enfants.
P. J'achète 1 paquet
J. Combien il y a de croissants dans ton paquet ? P. 10
J. Et combien il y a d'enfants ? P. 25
J. Alors, ça ne te suffit pas, qu'et-ce que tu vas acheter encore ?
P. 2 J. 20 croissants. P. 25 paquets.
J. Pas 25 paquets, tu as combien de croissants dans un paquet ? P. 10 J. Si tu achètes 25 paquets, tu vas avoir plein plein de croissants. Combien il aura de croissants, chaque enfant si tu achètes 25 paquets ? P. 1
J. 1 paquet, il aura 10 croissants, chaque enfant, c'est peut-être un peu beaucoup... et les tablettes de chocolat qui sont vendues par 5, combien tu vas devoir en acheter des paquets de 5, pour les 25 enfants ?
P. 10 ... 20

E 10. Mic 1 né en 1980

4. Il sait qu'on fait des mathématiques "parce qu'il y a des nombres des fois" et "qu'il faut écrire son nom sur la feuille". (en français on écrit sur le cahier). En mathématiques, on fait "des calculs, des exercices sur les nombres et des additions". Il reconnaît, sur sollicitation qu'on fait parfois des dessins et des problèmes.
Les mathématiques lui paraissent faciles, le plus facile, c'est les additions, et c'est ce qu'il préfère. Le plus difficile, c'est les problèmes et il n'aime pas beaucoup.

5. Pour être bon en mathématiques "il faut corriger" et "on doit bien vérifier si on n'a pas de faute".
A son avis, la maîtresse pense qu'il faut écouter ce qu'elle dit, et puis relire.

6. S'il n'a pas bien compris, il relit "ce qu'il y a écrit". S'il ne comprend pas encore, il laisse, il ne demande pas à la maîtresse, et à la maison, il ne demande à personne non plus "je fais moi-même". Il fait d'autres mathématiques que ce qu'on demande en devoirs ; "des additions posées, du calcul en tableau".

7. A son avis, les grandes personnes ne se servent pas souvent des mathématiques. Ça peut servir "à écrire des nombres quand il y en a besoin"... "on en a besoin pour verifier les carnets... combien on a dépensé".

8. Les mathématiques lui serviront peut-être dans son métier, il ne sait pas ce qu'il fera. Sa maman se sert parfois des mathématiques parce que "dans son boulot, elle a des grandes feuilles et elle écrit des nombres". Son père fait la patinoire (?), il croit que les mathématiques ne lui servent pas. Il pense que ça sert dans beaucoup de métiers mais ne voit pas lesquels.

1. Compter de 10 en 10 en reculant à partir de 138.

M. 138...

J. On recule de 10, ça fait combien ?

M. Il y a toujours un 8 à la fin.

J. oui, pourquoi il y a toujours un 8 à la fin, tu sais ?

M. Parce qu'on a commencé avec un 8.

J. On va ommencer à 38 si 138 est trop difficile, on enlève 10, on arrive où ?

M. 132

J. Ah ben, tu m'as dit qu'il y avait toujours un 8 à la fin ... Il y a combien de dizaines dans 138, tu sais ?

M. 8 J. non, ça s'appelle comment le 8 ? les unités. Combien de dizaines ? M. 7

J. Pourquoi 7 ? si tu as 50 et que tu enlèves 10, ça fait combien ? M. 40

J. oui, si tu as 58 et que tu enlèves 10 ? ....

M. J'arrive pas tellement à le dire.

J. Quand c'est 50, tu sais enlever 10, mais quand c'est 58, tu ne sais plus ? Pourquoi, ça te gêne qu'il y ait un 8 à la fin ? Tu m'as dit pourtant qu'il ne changerait pas, ce 8.

M. C'est les dizaines qui posent des problèmes.

2. Je vais te lire une histoire et tu vas me dire si c'est un problème, un problème comme on en fait en mathématiques.

M. oui.

J. oui ? Est-ce qu'on peut se poser des questions ?

M. Oui J. quelle question, par exemple ?

M. Combien il faudrait des autres ?

J. Des autres ? des autres quoi ?

M. tablettes de chocolat et croissants.

J. Combien il faudrait de tablettes de chocolat et de croissants ? Combien il en faudrait pour quoi faire ?

M. Pour le goûter.

J. oui, pour que chaque enfant ait un goûter. Est-ce que tu saurais répondre à cette question ? M. non

J. non ? tu ne sais pas combien il y a d'enfants, tu as oublié ?

M. non, j'ai pas oublié.

J. alors tu sais qu'il y a 25 enfants, combien il faut de tablettes de chocolat.

M. 5 tablettes de chocolat encore, et 5 croissants.

J. Pour 25 enfants, tu leur donnes, 5 croissants ? ils vont se battre.

M. Il faudrait 25 tablettes de chocolat et 25 croissants.

J. Mais dans le supermarché, les tablettes de chocolat sont vendues par 5, alors on va prendre combien de paquets de 5 tablettes de chocolat ? M. 1

J. Mais si on achète un paquet, on aura 5 tablettes de chocolat, il y a plein d'enfants qui n'en auront pas. Ça va pas, un seul paquet, ça suffit pas

M. on n'a qu'à acheter quelque chose où il y en a pas 5.

J. oui, ça serait plus malin, mais s'il y en a pas, on peut pas se débrouiller autrement quand même ? Si on achète 2 paquets, on aura combien de tablettes ?

M. 10. J. Bon, alors, combien il faut qu'on en achète de paquets pour que chaque enfant ait une tablette ?

M. 10. J. si on achète 10 paquets, ça en fait combien des tablettes de chocolat ?

M. 20 J. Tu crois ? Il y en a combien dans chaque paquet des tablettes ? Combien on a dit qu'il y avait de tablettes par paquet ? 5 tablettes par paquet, hein ?

M. oui.

J. Tu as 5 tablettes par paquet et tu as 10 paquets, ça t'en fait combien des tablettes ?

M. Je sais pas

J. Quand tu as 10 paquets avec 5 tablettes par paquet, tu ne sais pas combien ça fait? 5 paquets de 10, ça ne te dit rien ? M. si J. Tu vois pas combien ça fait ?

M. non J. 5 paquets de 10, 50, ça te dit rien ?

M. si.

E11. Yan né en 1979.

4. Il ne sait quand on est en cours de mathématiques. C'est la maîtresse qui le dit. Il ne sait pas ce qu'on y fait. Sur suggestion, il accepte le calcul, et pense qu'on ne fait rein d'autre, il refuse le terme de problèmes. Il aime le mieux faire le calcul, et il n'y a rien qu'il aime moins, il ne trouve rien facile ni difficile.

6. Quand il n'a pas compris, il demande à la maîtresse. A la maison, il ne demande à personne, il sait toujours le faire.

7. Il pense que les mathématiques ne servent pas aux grandes personnes.

8. Il ne sait pas ce qu'il voudrait faire plus tard et ne sait pas quel métier fait son papa, sa maman est hôtesse. Il ne sait pas si les mathématiques lui servent. Il pense qu'il y a des métiers où les mathématiques servent, mais il ne sait pas lesquels.

1. Sais-tu compter de 10 en 10 en reculant ?

Y. de combien jusqu'à combien ?

J. A partir de 138 jusqu'à ce qu'on en ait assez.... Non ? A partir de 138, tu sais pas reculer de 10 ?

Y. non ... rien qu'à 100... et à 200.

J. de 138 jusqu'à 88, il y a pas beaucoup à reculer... recule déjà une fois de 10

Y. 128 J. oui. Encore une fois de 10.

Y. 118 J. oui, encore une fois

Y. 98 J. Tu as reculé d'un grand coup là, 118 et tu recules d'un coup... (retournement de cassette)

J. Est-ce que tu peux compter de 9 en 9, à partir de 40, jusqu'à ce que tu dépasses 120 ? 40 et 9 ?

Y. 49 J. oui, et 9 ? Y. 58 J. 58 et 9 ? Y. 69

J. je crois que tu t'es trompé

Y. 68. J. 58 et 9 ? Y. 67 J. 67 et 9 ? Y. 76 J. 76 et encore 9 ? Y. 89

J. attention, 76... comment ça s'écrit 76 ? Y. 7 et 6.

J. oui, alors 76 et encore 9 ?

Y. 85 J. oui 85 et 9 ? Y. 94. J. 94 et 9 ? Y. 103.

J. oui, 103 et 9 ?..................

J. 103 et 10, ça fait combien ? Y. 113 J. oui, 103 et 10, ça fait 113, alors 103 et 9 ?

Y. 112 J. 112 et 9 ? ...... Alors 112 et 10 ? ... tu vois 112 et 10 ? Y. 114

J. Réfléchis, tu as 112, tu vois ? 112, comment ça s'écrit ? Y. 1, 1, 2

J. D'accord, alors tu as 112 et 10 Y. 121.

J. Tu m'as répondu à quoi ? à 112 et 10 ou à 112 et 9 ?

Y. Je sais pas

J. Oh, si tu sais ! Comment tu faisais pour ajouter 9 dans ta tête ? ... ...

2. J'ai une histoire qui est écrite, je vais te la lire et tu vas me dire si c'est un problème de mathématiques ou si c'est pas un problème de mathématiques.

Y. oui

J. Et si on te le donnait, ce problème de maths, qu'est-ce que tu ferais ?

Y. Je sais pas

J. Si tu l'avais comme devoir... Est-ce que tu pourrais poser une question ?

Y. Je sais pas

J. Est-ce que tu saurais inventer un problème ?

Y. non

3.. Alors, je vais t'en poser un de problème. (elle pose le problème des bons points).

Un enfant a eu 187 bons points, il peut l'échanger contre quoi ?

Y. des images.

J. oui, est-ce qu'il peut avoir un cahier ?

Y. oui.

J. S'il veut un cahier, il faut qu'il donne combien de bons points en échange ?...

Combien il faut d'images pour avoir un cahier ? Y. Je sais pas.

J. 10 images pour avoir un cahier et il faut 10 bons points pour avoir une image, tu es d'accord ? tu as compris comment ça marche ?... Alors, avec 187 bons points, il peut avoir combien d'images ?

Y. 187

J. Ah ben non, un bon point, ça ne donne pas droit à une image, il faut 10 bons points pour avoir une image. Et avec 87 bons points, il pourrait avoir combien d'images ?

Y. 7. J. Il lui resterait 7 bons points, mais il peut avoir combien d'images ? Y. 9

J. Comment ça s'écrit 87 ? Y. 8 et 7

J. oui, c'est 80 et 7, alors, avec 80 bons points, on peut avoir combien d'images ? ...

J. Avec 10 bons points, on peut avoir combien d'images ? Y. 1 J. avec 20 ? Y. 2

J. Avec 30 ? Y. 3 J. avec 40 ? Y. 4

J. Alors avec 80 ? Y. 9... (elle rit) Y. 8

E12. Fran né en 1979

4. Il s'aperçoit qu'on fait des mathématiques parce que c'est la maîtresse qui le dit. Qu'est-ce qu'on fait en mathématiques ? "elle nous donne des exercices où il y a des dessins ou des mots et il faut essayer de trouver le mot qui va avec le dessin et on l'entoure." Sur sollicitation, il reconnaît qu'il fait du calcul. Il décrit un travail fait en classe aujourd'hui "il y avait des points, il y avait des chiffres et il fallait faire 5 multiplié par 6 comme ça, et puis ceux d'en bas on avait déjà fait, il fallait mettre les points". Il décrit une opération qu'on fait en classe "on met 9391 et en bas on marque 3445, et puis on met... il faut calculer combien ça fait". "Quel signe tu mets aussi, tu mets les deux nombres et tu mets un signe " "oui, =" "et entre les deux nombres ?" "+". Il reconnaît aussi qu'on fait souvent des problèmes et quelquefois des dessins.

Il aime faire des mathématiques et trouve que c'est facile.

5. Pour être bon en mathématiques, il pense qu'il faut "réfléchir, ne pas mettre n'importe quoi, réfléchir et mettre les trucs qu'il faut, et quand on a terminé, il faut reprendre sa feuille et on écrit son nom".

Il pense que la maîtresse dit qu"il faut beaucoup travailler, durement et ne pas beaucoup regarder la télé.

7. Il pense que les mathématiques ne servent pas aux grandes personnes.

8. Son papa n'a pas encore de métier mais il va en avoir un. Sa maman est malade et reste à la maison. Il pense que ses parents ne se servent pas des mathématiques, même pour faire les courses.

Il pense qu'il y a des métiers où ça sert, comme directeur. Plus tard, il voudrait être policier et pense que les mathématiques ne lui serviront pas.

1. Il pense qu'il sait bien compter.

J. De 10 en 10 ?

F. De 10 en 10 ? Je sais compter jusqu'à 100.

J. De 10 en 10 jusqu'à 100, tu y arriveras ?

F. oui, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100. (assez lent)

J. Et si tu commences à 13 ?

F. 23, 34, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 103. (même vitesse)

J. Tu continues après 103 ?...

F. 203.

J. Tu as ajouté combien là ? Tu étais à 103, et tu es à 203 ?

F. 123

J. Après 123 alors ?

F. 133, 143, 153...

J. Tu sais compter de 10 en 10. Est-ce que tu saurais compter de 9 en 9 ? On part de 45.

F. 55

J. 45 et 10, ça fait combien ?

F. Je sais pas.

J. Si, tu as su pour 43, 43 et 10, tu as dit 53, alors pour 45 et 10 ?

F. 41 J. Non... F. 54 J. On va le faire 45 et 5 ? F. 50

J. 50 et 5 ? F. 55.

J. Alors, on ajouté 5 et 5, on ajouté combien ? F. 10

J. Donc 45 et 10, ça fait 55. Tout à l'heure, tu m'as dit 45 et 9, ça faisait 55, ça doit pas être ça puisque c'est 45 et 10 qui fait 55, alors 45 et 9, combien ça fait ?

F. 49. J. non, 45 et 9 J; 45 et 5, on va recommencer. F. 51.

J. réponds à la question, 45 et 5, tu sais ça ? F. 50

J. 50 et 4 ? F. 54.

J. Donc, 45, si tu ajoutes 5 et 4, ça fait 54, et 5 et 4, ça fait combien ? F. 5 et 4 ? 9

J. Tu as une autre idée de comment on pourrait faire pour ajouter 9 ? Tu ne peux pas te servir de 45 et 10 ? Je vais te dire un renseignement, moi... 45 et 10, ça fait 55, est-ce que tu savoir combien ça fait 45 et 9 ?

F. 54.

J. Je te donne un autre renseignement, 54 et 10, ça fait 64, est-ce que tu peux me dire combien ça fait 54 et 9 ?

F. 63. J. 63 et 9 ? F. 73...

J. 63 et 9 ?... 73, c'est 63 et 10, d'accord ? alors 63 et 9 ?

F. 69 J. 63 et 10, ça fait 73, alors 63 et 9, ça fait 72, d'accord ?

2. Je vais te lire une histoire et tu vas me dire si c'est un problème de mathématiques ou si c'en est pas un.

F. C'est un problème.

J. Qu'est-ce qu'on peut répondre à ce problème ? Si tu avais ce problème à faire, qu'est-ce que tu écrirais ?

F. Qu'il y en a pas assez pour les enfants.

J. Si on prend un paquet de croissants et un paquet de chocolat, il n'y en aura pas assez, alors combien il faudrait encore en acheter ?

F. encore 24.

J. 24 quoi ?

F. tablettes de chocolat

J. Comment elles sont vendues les tablettes de chocolat ? ...par paquets de 5. Combien il faut acheter de paquets pour que chaque enfant en ait ?

F. il faut en acheter encore...

J. On n'en a encore acheté aucune, on va les acheter, combien il faut en acheter pour que chaque enfant ait une tablette de chocolat ?

F. 24

J. Si j'achète 24 paquets, comme il y a beaucoup de tablettes de chocolat dans chaque paquet, j'aurai plein, plein de tablettes. Je veux en donner qu'une par enfant. Dans chaque paquet, il y a 5 tablettes, il y a 25 enfants, combien il va falloir acheter de paquets? Si j'achète un paquet, combien j'aurai ? ... un paquet, c'est 5 tablettes, si tu achètes un paquet, tu auras 5 tablettes, si tu achètes 2 paquets ? tu as 5 tablettes dans chaque...

F. 30

J. Tu crois ? 5 et 5 ? F. 10

J. Si tu achètes 3 paquets ? F. 9.

J. C'est pas une tablette par paquet, c'est 5 tablettes par paquet. F. 15

J. oui, et si on achète 4 paquets ? F. 14

J. Non, tu es encore en train de te tromper et de penser qu'il y a une tablette par paquet, il y a 5 tablettes par paquet. Tu as 15 tablettes et tu ajoutes un paquet. C'est combien un paquet ? ... 5 Tu as 15 tablettes et encore 5 en plus.

F. 20

J. Tu as 4 paquets, ça fait 20 tablettes, est-ce que ça suffit ?

F. oui. J. ben non, tu as 25 enfants, tu n'en auras pas assez

F. Il faut encore 5 paquets. J. non, il faut encore 5 tablettes

F. 5 tablettes de chocolat et ça fera 25, ça suffirait.

J. oui, et pour les croissants, il y a toujours 25 enfants, et au supermarché, les croissants sont vendus par paquets de 10. Si on achète un paquet, on en a combien ?

F. 20 J. non; si on achète un paquet on en a 10. Et 2 paquets ? F. 20

J. et 3 paquets ? F. 30.

J. Alors qu'est-ce qu'il faut acheter pour que chaque enfant en ait un ? ....Si on achète deux paquets, est-ce que chaque enfant en aura un ? F. non

J. Alors, qu'est-ce qu'il faut paire pour être sûr que chaque enfant en ait un ?

F. Il faudra encore en acheter 5.

J. Il faut encore acheter 5 croissants.

3. Problème des bons points. Un enfant a 57 bons points, combien peut-il avoir d'images ?

F. 10

J. Tu crois ? s'il avait 17 bons points, combien peut-il avoir d'images ?

F. 17... il aura

J. Combien il peut donner de bons points à la maîtresse pour avoir une image ? F. 10

J. Donc combien il peut avoir d'images avec 17 bons points ? F. que un.

J. que une, oui, et s'il a 27 bons points ? F. 2

J. 2, oui, et s'il a 57 bons points ? F. 5

E. 13. **Mic 2** né en 1979

4. Il reconnaît une leçon de mathématiques parce que "la maîtresse donne tout le temps des additions comme ça... ou faire des multiplications, ou sinon dessiner des points, ou des fois, elle nous donne des plus à faire". Sur question, il dit aussi qu'on fait des problèmes, et même "des contrôles - problèmes".

Il préfère les contrôles parce qu'on "doit apprendre très bien pour avoir des bonnes notes et il ne faut pas parler". Pour lui, le plus facile, c'est les additions, le plus difficile, c'est des fois le contrôle mais c'est ce qu'il aime le mieux faire. Il aime seulement un peu les mathématiques.

5. Pour être bon en mathématiques, il pense qu'il faut bien apprendre.

Il pense que la maîtresse dit qu'il faut bien travailler et être bien sage.

6. S'il n'a pas bien compris, il demande à la maîtresse, à la maison à sa mère. Il lui arrive de demander à des copains s'il est absent.

7. Il lui arrive de faire des mathématiques tout seul, des grands nombres, des multiplications.

8. Il pense que les mathématiques servent aux grandes personnes pour les courses, les caissières. Il pense que ça sert à sa maman qui est gardienne pour les loyers. Son papa est gardien aussi mais les maths ne lui servnt pas parce que c'est sa maman qui fait les comptes. Il ne sait pas ce qu'il veut faire plus tard mais il pense que les mathématiques lui serviront.

1. Il déclare qu'il sait bien compter, mais "pas tellement" de 10 en 10 en reculant. En réalité il le fait correctement à partir de 45. On lui demande maintenant à partir de 138.

M. 138... 98 J. oh, c'est beaucoup

M. non, 138... 128... 118... 108... 98... 88... 78...

J. Comment tu fais pour me répondre si vite ?

M. Parce qu'il y a toujours 8... 8

J. oui, et pour les autres, ceux qui changent ?

M. Par exemple s'il y a 85, après c'est 75,

J. Oui, qu'est-ce qui change alors ? M. C'est les unités

J. C'est quoi les unités, quand tu dis 85 ? M. C'est le 5

J. Oui, le 5, c'est celui que tu m'as dit qui changeait pas, comment il s'appelle celui qui change ? ...
Maintenant on ajoute 9, on part de 45.

M. 44, non 46.

J. Si tu pars de 45 et que tu ajoutes 9, tu dois aller plus loin que 46, non ?

M. trente euh, 34.

J. Il y a de ça, mais le nombre qui vient après 40, c'est...

M. 30. J. non, ça c'est avant, non, là tu recules, non, en avançant, après 40 ?

M. 50 J. Alors 45 et 9 ? M. 54 J. 54 et 9 ?

M. 64 J. Et 54 et 10 ? M. 65

J. ah, non, qu'est-ce tu m'as dit tout à l'heure, quand on ajoutait 10, ça changeait pas les unités ? Alors 54 et 10 ? 54 et 5 ?

M. 54 et 5 ? 60 J. Tu es sûr de ça ? Qu'est-ce que tu fais ?

M. Je pense dans ma tête.

J. Qu'est-ce que tu penses dans la tête ? ...

M. 54, 55, 56, 57, 58, 59...

J. Donc 54 et 5, ça fait 59... et 59 et 5 ?

M. 59, 60, 61, 62, 63, 64.

J. Donc, 54 et 5 et 5, ça fait 64, et quand on a ajouté 5 et 5, on a ajouté combien ?

M. 10.

J. Donc 54 et 10, ça fait 64, tu m'avais dit 65 tout à l'heure, tu t'étais trompé. Et 54 et 9?

M. 9, 10, 11, 12, 13. Ça fait 13, 9 et 4. Alors 5 et 5... ça fait 11, 5 et 5, 10, plus la retenue, ça fait 11.

J. Tu es perdu, là. 54 et 9 ? On a vu que 54 et 10, ça fait 64, tu es d'accord ? comment on passe de 10 à 9 ? M. de 10 à 9 ? J. oui. ...... on enlève... M. 1

J. oui, si 54 et 10 fait 64, si on enlève 1, qu'est-ce que ça fait ?

M. ça fait 63. J. 54 et 9, ça fait 63.

2. Je vais te lire ce qui est écrit sur le papier, tu vas me dire si c'est un problème de maths ou pas.

M. oui.

J. Qu'est-ce qu'on va répondre ?

M. On va répondre combien ça coûte les croissants

J. Est-ce qu'on peut répondre à cette question ?

M. oui, les croissants et les tablettes de chocolat.

J. Et comment on va trouver combien ça coûte ?

M. ça coûte 15 francs.

J. Ah oui, tu dis 10 et 5, 15. On pourrait se poser des questions sur ce que ça va coûter mais il faudrait avoir le prix d'un croissant, d'un paquet de croissants et d'un paquet de tablettes de chocolat. Mais combien on va acheter de paquets de croissants et combien on va acheter de boîtes de chocolat ?

M. 1 J. Si on achète un paquet de croissants, on aura combien de croissants ?

M. 10 J. Est-ce que ça suffit pour les 25 enfants ? M. non

J. Alors, combien on va acheter de sachets ? M. 10 J. 10 sachets ? M. non!

J. Si on achète 2 sachets, on aura combien de croissants ? M. 20

J. 20, ça suffit ? M. non J. Alors si on achète 3 sachets ? M. 30

J. Est-ce que ça suffit cette fois-ci ?

M. oui, mais y'en a trop J. Combien en trop ?

M. il y en a 10 en trop.

J. 10 en trop tu crois, il y en a 30, il y a 25 enfants et tu penses qu'il y en a 10 en trop ?

M. non, non J. Il y en a combien en trop. M. 5.

J. Et les tablettes de chocolat, c'est vendu par paquets de 5, alors il va falloir combien de paquets pour les 25 enfants ?

M. 5 et 5, 10, 5 et 5, 10 encore, ça fait 20 et si on ajoute encore 5, ça fait 25.

J. oui, et tu achètes combien de paquets là ? M. 25

J. Tu n'as pas acheté 25 paquets. ... Tu m'as dit 5, ça fait un paquet, ça M. oui

J. 5, ça fait un deuxième paquet, 10, encore la même chose, encore 2 paquets, 2 paquets et 2 paquets, ça fait 4 paquets ... M. oui J. Et encore un paquet...

M. ça fait 25. J. 25 tablettes, oui, 4 paquets et un paquet, ça fait 5 paquets. Tu as 5 paquets, ça fait 25 tablettes.

E 14. **Nab** né en 1980

4. Il trouve que "ça se voit" quand on fait une leçon de mathématiques parce qu'on fait "des additions, des multiplications, de la numération". Sur sollicitation, il reconnaît qu'on fait aussi des dessins, "des carrés de plusieurs couleurs"... "pour faire des échanges", il explique aussi que "il y a aucune couleur avant le carré jaune", "les couleurs sont jaune, bleu, vert pour l'instant, je ne connais que ça pour l'instant" et "le jaune représente les unités".

Il préfère les additions et les multiplications et aime moins la numération bien qu'il ne trouve pas ça difficile. Les additions lui paraissent plus faciles et rien ne lui paraît difficile.

5. Pour être bon en mathématiques, il faut "bien apprendre ses leçons, comment ça se passe". M. "qu'est-ce que tu veux dire par comment ça se passe ?" N. "Il faut bien regarder comment ça se passe par exemple si on voit qu'on dit d'en rajouter une et que parfois il peut y en avoir 2, eh ben il faut en rajouter 2, pas une ". Après lecture des propositions, il ajoute "je crois qu'il faut bien apprendre ses leçons et aussi écouter la maîtresse". M. "La maîtresse dit ça aussi ?" N."Non, mais si on apprend bien ses leçons, on sait directement, sans regarder plusieurs fois". Ce n'est pas la maîtresse qui le dit, c'est lui qui pense cela. "Dès qu'elle le dit, je regarde bien mes leçons et puis ça m'arrive et je fais ça bien".

6. S'il n'a pas bien compris, il essaie de comprendre ou sinon, il demande à la maîtresse. "De toute façon j'écoute et juste avant elle nous explique, si c'est facile, elle nous dit rien, on le fait tout seuls". Il demande quelquefois à son grand frère de 10 ans qui est au CM2.

7. Il lui arrive de faire des mathématiques pour s'entraîner.

Il pense que les grandes personnes se servent des mathématiques "pour le loyer, pour calculer combien ça fait pour payer le loyer, la lumière, il faut calculer tout ensemble pour voir ça fait combien".

8. Il croit qu'il y a des métiers qui se servent des mathématiques, par exemple informatique. Il ne sait pas ce qu'il voudrait faire plus tard. Son père construit des voitures chez Renault, il ne pense pas qu'il se serve des mathématiques. Sa mère ne travaille pas pour l'instant.

1. Compter de 10 en 10 en reculant à partir de 138.

N. 138, 128, 118, 108, 98, 88, 78, 68, 58, 48, 38, 28, 18, 8, après double 0.

Il va très vite, sans hésitation aucune et je lui demande comment il fait.

N. Je comprends, par exemple 8, il faut encore 2 pour que ça fasse 10, alors à chaque fois je compte 8.

M. Je n'ai pas très bien compris, tu peux réexpliquer?

N. Oui, quand on en a 8, pour avoir 10, il faut en mettre 2, alors dès qu'on a 138, on en rajoute 2, ça fait 10, alors après on connaît le résultat. On en a 8 et on enlève encore 2, ça fait 20 et après si j'enlève encore 2, ça fait 18.

Compter de 9 en 9 en augmentant à partir de 120

N. 120, 129, ... 138, 147, 156, 165, 174, 183,...92, 192, 101

M. Tu étais à 192 N. 102

M. non, tu veux dire 201, tu as oublié la centaine, après 92, c'est bien 101, tu étais à 192.

N. oui, j'ai oublié qu'on était à cent.

Il compte très vite, sans hésitation, avec un temps de réflexion très court et je lui demande comment il a fait.

N. A chaque fois j'ai reculé, par exemple, j'en étais à 7, après j'enlevais 1, 6, 5,...

M. Où tu enlèves 1 ? ... Par exemple tu étais à 129

N. si j'ajoute 9, si j'avais 10, ça ferait toujours 9, comme j'ajoute pas 10, il faut que j'en enlève 1, ça me fait 8. A chaque fois

M. Tu enlèves 1 aux unités tu veux dire. N. oui.

M. Mais tu ne fais pas que enlever 1, après 129, tu as dit 138, tu as pas dit 128, donc tu as pas seulement enlevé 1.

N. oui, j'ajoute une dizaine.

2. Je lis le texte et lui demande si c'est un problème.

N. oui, je crois.

M. Qu'est-ce qui te fait penser que c'est un problème ?

N. Il faut voir s'il y en aura assez pour les tablettes de chocolat et les croissants. Il en faudra plusieurs. Par exemple, à chaque fois on a 5 boîtes, si on fait la moitié, ça fera pas assez pour tout le monde, si on achète seulement 1 boîte. Il faudrait plusieurs boîtes. Et si on achète qu'une boîte de trop, il y en aura pas assez pour tout le monde, si on s'arrête à la moitié.

M. Est-ce qu'on t'a posé une question là ?

N. oui, je crois.

M. Il y a une question qui t'était posée, montre-moi.

N. non, on n'en a pas posé.

M. Est-ce que toi, tu peux poser une question ?

N. non

M. Tu ne peux pas poser de question à partir de cette histoire ? tu m'en as déjà posé plusieurs, presque, tu as commencé à y répondre... C'est pas vraiment un problème puisqu'on ne t'a pas posé de question, mais toi, tu vas faire un problème, tu vas poser une question.

N. Combien faut-il de paquets ? M. de paquets de quoi ?

N. de sachets de croissants et de boîtes de chocolat.

M. Bien, est-ce que tu saurais y répondre ?

N. Il faudrait 15 boîtes de chocolat. M. Pourquoi ?

N. Parce que 5 et 5, ça fait 10, encore 2 fois 5, ça fait 20, ça fait déjà 4 fois, et puis 5, ça fait 25.

M. Alors, combien il te faut de boîtes finalement ?

N. Il en faut 5. M. Très bien, il faut 5 boîtes de chocolat.

N. oui.

M. Et des sachets de croissants, il t'en faut combien ?

N. 2 et demi. Il faut couper un sachet en deux.

M. Oui, mais dans le magasin, ils vendent des sachets entiers, on est obligé d'en acheter ... N. en trop.

M. 3 sachets, oui, et on aura combien de croissants en trop ?

N. 5 en trop.

Autre problème : 187 bons points. Peut-il avoir un cahier ?

N. oui, 187, c'est plus que 10, il peut avoir plusieurs cahiers.

M. Attention, qu'est-ce que j'ai dit ? Qu'est-ce qu'on a avec 10 bons points ?

N. un cahier je crois.

M. non, je te répète, avec 10 bons points, on a une image, et pour avoir un cahier, il faut donner 10 images.

N. On pourra avoir qu'un cahier

M. Pourquoi ?

N. Il y a plusieurs fois 10 dans 187.

M. Oui, il y a combien de fois 10 dans 187 ? (il compte tout bas)

N. J'ai déjà 10 fois pour l'instant ... ... 16 fois je crois, non 17 fois.

M. On verifiera, alors, dis-moi, je te répète, il a 187 bons points, tu peux l'écrire 187? Combien il peut avoir d'images ? N. 16 ou 17.

M. D'accord, comment tu peux vérifier ?

N. A chaque fois, pour arriver à 100, on fait 10, 10X10 + 87, il suffit de regarder le premier nombre de 87, c'est 8, alors ça doit faire 18.

M. Finalement, quelle est ta réponse, combien il peut avoir d'images ?

N. 18. M. oui, tu m'as dit qu'il y avait combien de fois 10 dans 187 ? N. 18

M. Et il lui reste des bons points ? N. oui, ...7.

M. Avec ses 18 images, il peut avoir un cahier ? N. oui.

M. Il peut en avoir plusieurs ? N. non

M. Et il va lui rester des images ? N. oui

M. combien ? N. 7, je crois.

M. Il avait combien d'images ? N. 18, il en reste 8.

E15. Sha né en 1980.

4. Il sait qu'on est au cours de mathématiques parce "qu'on nous donne une feuille de mathématiques et la maîtresse nous explique et on le fait." Il reconnaît une feuille de mathématiques au fait "qu'il y a des x, des +". En mathématiques, on trouve des nombres pour les classer, et puis "on a des petits points, on doit les rassembler avec des +, les petits ronds, on les fait dans les cases, non, il y a des petits ronds autour et puis on fait des autres ronds qui entourent les ronds que je fais." (Il dessine des ronds alignés irrégulièrement). On fait ça "pour savoir quel nombre ça fait quand on fait de x ou des +". Sur sollicitation, il reconnaît qu'on fait des exercices et des problèmes mais ne sait pas dire ce qu'est un problème.

Il aime mieux les multiplier et les plus et ne sait pas ce qu'il aime le moins. Les maths lui paraisent plus faciles, et le français. Il ne sait pas ce qu'il trouve plus facile à l'intérieur des maths.

5. Il est parfois bon en mathématiques, et il pense que pour l'être, il faut travailler dur. Il ne faut pas faire de faute. Quand on voit qu'on fait une faute, on barre et on écrit le résultat qui est bon. Sur questionnaire, il trouve que le plus important est de bien apprendre ses leçons puis de bien écouter la maîtresse.

6. S'il n'a pas très bien compris... "c'est écrit ce qu'on fait et après je demande à la maîtresse qu'est-ce que ça veut dire". Il demande parfois à un camarade ou à ses parents.

7. Il ne fait pas de mathématiques hors de la classe, sauf s'il fait ses devoirs. Il pense que les grandes personnes "se servent parfois de mathématiques pour savoir quel nombre il faut mettre sur une feuille ... quand ils ont trouvé le résultat ... M. "de quoi ? qu'est-ce qu'ils font avec ces nombres ? S. "ils les classent" M. "pour savoir quoi?" S. "pour savoir quel nombre ça fait".

8. Il ne croit pas qu'il y ait des métiers où on se serve des mathématiques. Plus tard, il voudrait faire de l'informatique, mais il pense qu'on ne se sert pas des mathématiques pour faire de l'informatique, pourtant il déclare que son père en fait. Son père fait de l'informatique et sa mère travaille dans un hôpital, il ne sait pas s'ils se servent des mathématiques.

1. Compter de 10 en 10 à partir de 75.

S. 175, après 180.

Je lui demande d'écrire et lui répète la consigne. Après un assez long temps de réflexion, il annonce 87.

M. Comment tu fais ?

S. Je calcule dans ma tête.

M. Et comment tu calcules dans ta tête ? Tu peux me dire tout haut à quoi tu penses ?

S. Je pense que dans ma tête, il y a 75 + 10. Après je calcule.

M. Et comment tu calcules ?

S. J'ajoute une dizaine, une unité, attend... une unité, une dizaine.

M. Pourquoi ?

S. Parce que 5, c'est des unités et 7 c'est des dizaines

M. Oui, et tu veux faire quoi ?

S. Je calcule, je fais 75 + 10.

M. Et ça fait combien 75 + 10 ?

S. 85 M. oui, comment tu as fait ?

S. 0 + 5, ça fait 5 et 1 + 7, 8. M. D'accord. Après ?

Il écrit très vite ... je l'arrête à 155 et lui demande comment il fait pour aller si vite.

S. Je cherche dans ma tête, 1+1, non, 0+5, ça fait 5 et puis 5+1, ça fait 6 et 0+1 ça fait 1, de plus en plus vite.

M. En reculant de 10 en 10 à partir de 138.

Après un bon moment de réflexion, il écrit 148 qu'il remplace de lui-même par 128 et continue assez facilement et rapidement. A 8, il dit "c'est fini, je peux trouver en reculant 10".

M. Comment tu as fait pour aller vite ?

S. 10 + ... 0+8 ça fait 8, et en reculant 10 plus 3, ça fait 2, ça fait 20

M. Je suis sûre que tu ne t'es pas dit tout ça, sinon tu ne serais pas allé aussi vite. Tu as fait autre chose. Tu as été plus vite que ça. Tu ne peux pas dire comment tu as fait? S. non M. Tu n'as fait toutes les opérations dans ta tête, tu aurais été moins vite.

M. De 9 en 9 à partir de 40.
S. 40, 49, ... 30, 39
M. Non, tu repars de 49 S. en arrière ou en avant ? M. en avant.
S. 49, 50 M. attention, 49 + 9 S. ah oui, ça fait 59
M. Est-ce que ça fait 59, 49 +9 ? S. ah non ... ... ça fait 58 69
M. Tu crois ?58 + 9. Comment tu as fait pout trouver 58 ?
S. Je sais pas.
M. Tu repars de 58 et tu fais 58+9. (il compte un à un et écrit 68).
M. Comment tu pourrais vérifier pour être tout à fait sûr ?
S. Je sais pas ... en trouvant des fautes...
Je répète la question.
M. Tu n'as pas une manière, même en comptant sur tes doigts ou en dessinant ?
S. ça fait 68. En comptant dans ma tête, je vois des mains et après je compte.
M. Tu comptes sur tes doigts dans ta tête ? S. oui.
M. Et maintenant, si je te dis 58 + 10 ? ... tout à l'heure, tu avais trouvé une méthode très rapide
S ah oui, 58 + 10... ça fait 69 parce que 0... attendez... 1+5 ça fait 6 et 0+8, ça fait 8.
M. Donc ça fait ? S. 68
M. Oui, 58+10 ça fait 68, donc 58+9 ? ... (il chuchote)... Tu m'as dit que 58+10, ça faisait 68, est-ce que ça t'aide pour trouver 58+9 ?
S. oui, ... M. 9, c'est comment par rapport à 10 ?
S. 9 c'est plus petit et 10, c'est plus grand.
M. Tu es à 58, quand tu rajoutes 10, tu es à 68, est-ce que tu peux deviner ce qui se passe quand tu rajoutes 9 ?
S. 58 + 9...
M. Est-ce que tu peux dessiner 10 ? 10 croix, ce que tu veux. (Il dessine 10 croix).
M. Maintenant, je veux pas ajouter 10, je veux ajouter 9, qu'est-ce qu'il faut faire pour avoir 9 quand on a 10 ?
S. barrer une croix. (il le fait, je lui demande aussi de l'entourer.) ... 67
Il a compté en regardant les croix 59, 60... 67.
M. Tu n'aurais pas pu deviner ? Quand tu les ajoutes toutes, tu es à 68, si tu en enlèves une ? S. 69.
M. Non, tu en enlèves une, au lieu d'en enlever une, tu en as ajouté une.
Je lui demande de continuer. Il ne sait pas. Je lui propose 67+10...
M. Dans 67, il y a combien de dizaines ? S. 6
M. Oui, et combien d'unités ? S. 7
M. Très bien. Et, dis-moi, tu ajoutes 10, tu vas avoir combien de dizaines ? dans 10, il y a combien de dizaines ? S. 77
M. Comment tu as fait ?
S. J'ai mis 10 en dessous, et j'ai dit 0+7, 7, et puis 1+6, ça fait 7.
M. Moi, je voulais pas ajouter 10, je voulais ajouter 9
S. Ah, 9 !
M. Qu'est-ce qu'il faut faire pour ajouter 9, qu'est-ce qu'on a vu ? Si ajoutes 10, on en a en trop, combien de trop ?
S. 10 de trop.
M. 1 de trop, puisqu'on voulait ajouter 9. Alors qu'est-ce qu'il faut faire pour trouver le résultat ?
S. Il faut chercher.
M. Oui, mais chercher quoi ? Comment tu as fait tout à l'heure ? si tu ajoutes 10, tu vas avoir 77, si tu ajoutes 9, tu auras combien ? S. 76.
M. Ben, voilà ! Est-ce que tu peux le faire encore une fois ?
Après une longue réflexion où il chuchote, je lui demande s'il peut faire 76 + 10. Après un moment, il dit 86, puis assez vite, déduit que 76+9 = 85.

2. (à une autre séance)
M. Est-ce que tu penses que c'est un problème de mathématiques ?
S. oui M. Pourquoi ?
S. Parce qu'il y a 10 paquets et puis 5 paquets de barre de chocolat.
M. Comment on peut le faire, ce problème ? S. Calculer
M. Calculer quoi ?
S. Les 10 croissants et puis les 10 paquets de barres de chocolat.
M. Dans les boîtes, il y a 5 barres de chocolat. Et ça va te permettre de trouver quoi ?
S. un numéro M. Qui va servir à quoi ? ... silence...
M. Est-ce qu'on t'a posé une question ? S oui
M. Quelle question ? ... silence... M. Il y avait une question ? S. non
M. Pour que ce soit vraiment un problème, est-ce qu'il ne faudrait pas qu'on te dise de chercher quelque chose ? Qu'est-ce qu'on pourrait chercher? Est-ce que tu pourrais en poser une, toi, de question ? ... silence... Tu te souviens de ce que je t'ai dit ? Est-ce que tu peux répéter ? On veut acheter des choses ? S. oui
M. On veut acheter quoi ? S.10 croissants et 5 barres de chocolat.
M. On veut acheter des croissants et des barres de chocolat. Qu'est-ce qu'on nous donne comme informations ? C'est dans une classe, il y a combien d'élèves dans la classe ? S. 25
M. Oui, et qu'est-ce qu'on nous donne comme information sur les croissants et les barres de chocolat ? C'est vendu comment ? S. En payant.
M. Oui, mais est-ce qu'on a dit quelque chose sur le prix ? S. non
M. On a dit qu'ils étaient vendus comment ? Les croissants sont vendus dans des paquets S. de 10
M. Et les barres de chocolat ? S. des paqiuets de 5?
M. Voilà, alors qu'est-ce qu'on pourrait se poser comme question ? ...
M. T'as pas d'idée ? Alors je vais t'en poser une de question. Combien il faudrait acheter de boîtes de chocolat pour que chaque enfant ait une barre ? S. 5
M. Oui, pourquoi ? S. Parce que 25, alors, on a 20 et puis on ajoute 5.
M. Oui, et comment on a 20 ?
S. On prend 10 croissants encore 10 croissants et puis 5 barres de chocolat.
M. Ah, tu veux faire comme ça, mais je voudrais que chaque enfant ait une barre de chocolat quand même ! Rien qu'avec le chocolat, tu m'as dit que tu achetais 5 boites. Je voudrais qu'ils aient tous un croissant et une barre de chocolat.
S. 5 barres de chocolat.
M. (j'entends boîtes) oui, pourquoi ? ... Tu veux acheter quoi ?
S. 5 barres de chocolat.
M. Tu veux acheter 5 barres de chocolat et il y en aura pour tous les enfants ?

S. non M. Mais alors, il va y avoir des bagarres !

S. 25

M. Elle va faire comment, la maîtresse pour avoir 25 barres de chocolat ? elle va prendre combien de boîtes ? S. 25

M. Elle va prendre 25 boîtes ? Comment tu peux faire pour trouver ? Tiens, prends un papier. Combien elle va acheter de boîtes ?... Si elle achète 1 boîte, elle a combien de barres ? S. 8

M. Mais non, si elle achète une boîte, elle a combien de barres ? Dessine une boîte avec les barres de chocolat. Combien je t'ai dit qu'il y avait de barres dans la boîte ?

S. 5 M. Bon, alors est-ce qu'une boîte va lui suffire ? S. non

M. Alors combien elle va acheter de boîtes ? Si on t'envoie dans le magasin pour acheter le chocolat, comment tu vas faire pour que tout le monde en ait.... Tu peux faire ce que tu veux pour t'aider, tu peux écrire, tu peux dessiner, tu peux faire ce que tu veux... ... s'il ne te suffit pas d'une boîte, qu'est-ce que tu vas faire ?

S. En ajouter encore. M. Eh bien, continue, vas-y.

Il dessine les boîtes avec les barres en comptant tout bas "5, 10, y m'en manque plus que 5" Il s'arrête à 15

M. Y'a combien d'élèves dans la classe ? S. 25

M. Oui, alors vas-y. ...

M. Il y en a assez là ? S. oui M. Vérifie.

Il recompte un à un et trouve 15

M. Alors, tu vas acheter combien de boîtes en plus ?

Il continue à dessiner et s'arrête à 25.

M. Et là, t'en as assez maintenant ? S. oui M. Comment tu peux vérifier ?

S. Je fais... M. Là, y'en a combien ? S. 5, 5 M. ça fait ?

S. 10, 15, 20, 25.

M. Voilà, donc tu achètes combien de boîtes ? S.5

M. Et des sachets de croissants, tu vas en acheter combien ? S. 10 croissants.

M. 10 croissants dans un sachet. Ça te suffira pour la classe ? S. non

M. Alors, tu vas en prendre combien ? S. 10 M. 10 sachets ?

S. euh... non M. ça te fera combien de croissants avec 10 sachets ?...

M. Il y en a beaucoup, tu peux trouver ? S. 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

M. 100, il y en a peut-être un peu trop là ! on n'a pas besoin de 10 sachets. Combien il t'en faut ? S. 2

M. Dans 2 sachets, tu auras combien de croissants ? S. 20

M. Ça suffit ? S. non M. Donc, il faudrait en prendre ? S. Encore 5.

M. Oui, mais il se vendent par 10, donc tu prendras 3 sachets, ça te fera combien de croissants ? S. 30

M. Oui, et qu'est-ce qui va se passer ?

S. Y'en aura assez M. Oui, il va même en rester un peu. S. oui.

E 16. Nor née en 1979

4. Elle sait qu'on fait des mathématiques parce qu'on "prend le cahier de maths, le cahier rouge et on écrit mathématiques, et puis des fois, on fait des additions, des multiplications, des moins un". Sur question, elle reconnaît qu'on fait aussi des dessins "on fait des ronds et on les échange contre des dizaines."

Elle aime le plus les exercices, multiplications et les additions, elle ne sait pas ce qu'elle aime le moins, elle aime tout. Ce qu'elle trouve le plus facile, ce sont les additions et le plus difficile "les moins 5 et moins 10". C'est sa mère qui lui fait faire "les moins", on n'en fait pas encore en classe.

5. Elle est bonne en mathématiques puisqu'elle a eu 9 et demi au contrôle mais il y en a qui sont pas bons dans la classe, ils ont eu 6, 7, 4, 3.... Pour être bon, elle pense qu'il "faut apprendre nos devoirs" et puis "savoir bien les multiplications...". Pour cela il faut "notre maîtresse nous donne des feuilles pour bien les apprendre et on les apprend bien bien bien et c'est comme ça qu'on les saura... par contre si on est caissière, c'est bien pour les caissières". Sur la liste de questions elle choisit "bien écouter la maîtresse et faire beaucoup d'exercices".

6. Si on n'a pas bien compris "on le dit à la maîtresse et elle nous explique un peu mieux". Elle demande aussi quelquefois à sa mère et ses frères de lui expliquer. Elle fait aussi parfois des mathématiques au local où on peut faire les devoirs.

7. Les mathématiques, ça apprend à compter. Elle pense que les mathématiques servent aux grandes personnes dans la vie parce que sa mère fait toujours des calculs pour compter l'argent de son frère qui est dans la banque et puis pour s'amuser "quand elle a rien à faire, elle fait ça".

8. Elle pense que ça sert aux caissières. Elle voudrait être hôtesse de l'air et ne se servira pas des marthématiques. Ses parents sont en Algérie et c'est avec sa grand-mère qu'elle fait des mathématiques. Son père fait un magasin avec ses frères. Elle pense que ses parents se servent des mathématiques parce que sa mère fait caissière dans le magasin et son père après compte l'argent en tout pour pas qu'on lui vole. Un jour ils vont acheter un billet d'avion et venir en France.

1. Compter de 10 en 10 à partir de 65

N. 65, 75, 85, 95, 105, 115, 125.

Elle va vite "parce qu'elle a fait ça avec sa mère". Elle ne peut pas expliquer comment elle fait "elle calcule dans sa tête, elle sait dans sa tête".

Compter en reculant à partir de 138.

N. 128, ... euh 133 M. Pourquoi ?

N. parce qu'il y a 3 dans 8 et encore 2 pour faire... ah! de 10 en 10 ! ...

Elle recommence 128, 118, 108, 98, 88, 98.

Je lui fais écrire 88 et 98 et dire lequel est le plus grand, elle répond bien, je lui rappelle qu'on recule, elle continue 88, 78, 68, 58, 48, 38, 28, 18, 8 et c'est tout parce que on peut pas sinon on va dire zéro, obligé !

M. Comment tu fais pour aller vite ?

N. J'ai compris le système, changer le nombre des dizaines.

Compter de 9 en 9 à partir de 60

N. 60, 69, 79 euh... 78, 97...

Je lui demande d'écrire 78, elle écrit 98, puis 87. Je lui écris 78, elle annonce 67. Je lui répète 78 et 9 et lui demande d'écrire. Elle est perdue. Elle sait que 78 est plus grand que 67 mais dit toujours que 78 +9 = 67. Je lui demande de vérifier. Elle pose l'opération et la fait correctement. Elle pose encore 87 + 9, trouve 96 mais dit qu'elle ne peut pas le faire de tête, elle ne peut pas retrouver ce qu'elle faisait. Je la fais recommencer à 112.

N. 112 + 9, 121 parce que j'enlève 1, et plus 10, ça fait 21.

2. Je lis le texte et lui demande si c'est un problème

N. oui, parce qu'il y en a que 15 et il en faut encore 10, il faut encore acheter 10 croissants, ou sinon on partage les tablettes de chocolat.

M. Est-ce qu'on t'a posé une question là ?

N. oui... non, parce que quand on pose une question, y'a un point d'interrogation.

M. Alors, est-ce que c'est un problème quand on t'a pas posé de question ?

N. Oui parce que t'as fait un point normal au lieu d'un point d'interrogation.

M. Et toi, tu peux poser une question sur cette histoire ?

N. Il y a 25 élèves. M. C'est pas une question, ça. N. Si

M. C'est une question, ça ? N. Si, parce que y'a un point d'interrogation.

M. C'est pas une question si je dis "il y a 25 élèves", c'est une question si je dis "combien il y a d'élèves ?" il faut qu'on puisse répondre.

N. Qu'est-ce qu'il y a comme élèves ? non, il ya ..., non ...

M. Peux-tu poser une question à laquelle on pourrait chercher une réponse ?

N. oui. Manges-tu du chocolat ?

M. Est-ce que c'est un problème, ça ?

N. Non, parce qu'on met un point d'interrogation. Parce que "manges-tu ... tu manges... du chocolat.. On peut faire l'inverse pour une question. Si on regarde *Il y a* 25 élèves, c'est pas... on dirait que ça veut rien dire premièrement et deuxièmement qu'est-ce qu'on peut dire avec une phrase qui veut rien dire..

M. Je vais te dire quelque chose, tu vas me dire si c'est une question : Combien faut-il acheter de sachets pour que tous les enfants aient un croissant ?

N. C'est pas une question. Parce que regarde combien... biencom...

M. Est-ce que tu peux savoir combien il faut acheter de sachets pour que chaque élève ait un croissant ?

N. Oui, mais ça pourrait être ... 3, comme ça il y en aura un chacun et les 5, on les laisse pour un autre élève.

M. Oui, et des boîtes de chocolat, combien il faut en acheter pour que chaque élève ait une tablette ? Elles sont vendues par boîtes de 5.

N. 5 M. oui, pourquoi ?

N. Parce que il y en a 5, alors il y a une tablette chacun parce que 5+5+5+5+5 = 25 (elle écrit en même temps), et dit 10, 20, 25.

3. Problème des bons points avec 187, combien d'images ?

N. Là, il pourrait en avoir 10 d'images, là 8, et là il lui reste 7 bons points.

M. Donc il aura combien d'images ? N. 180

M. Non, tu m'avais dit là 10 et là 8 N. 18.

M. Et quand on a 10 images, on peut avoir un cahier.

N. un cahier ou un petit carnet.

M. oui, il peut en avoir ?

N. Il pourra en avoir et il lui faut encore 3 bons points et il aura 9 images et encore 10 bons points et il aura un autre cahier.

E17. **Lyn** née en 1980

4. Elle ne sait pas comment elle sait si on fait des mathématiques, mais elle reconnaît parce que la maîtresse dit "on va faire des maths". En mathématiques, "on écrit des choses" ; "on a une feuille et puis des fois on doit mettre des ronds".

M. on écrit des nombres ? L. oui

M. Et en français, on écrit des nombres ? L. des fois.

Elle dit oui à tout ce qu'on lui propose calcul, numération, addition, elle ajoute "des fois on fait des multiplier par 10, des fois 1 multiplié par 4, y'a des ronds, y'a 4 ronds et là y'a 5 ronds et là on doit faire la suite"

M. et comment on fait la suite ? L. on met des ronds

M. n'importe comment ? L. non, on met des ronds bien placés.

Dans le cours de mathématiques, elle aime le mieux écrire, il n'y a rien qu'elle n'aime pas. Les mathématiques lui paraissent faciles, en particulier les multiplications.

5. Pour être bon en mathématiques, "il faut travailler en écoutant la maîtresse". Dans la liste que je propose ensuite, elle choisit aussi apprendre ses leçons.

6. Si elle n'a pas compris elle demande à son grand frère ou à sa grande sœur, mais pas à la maîtresse "des fois, c'est elle qui vient m'aider mais moi je lui demande pas". Elle ne demande pas aux camarades mais c'est sa voisine qui lui demande.

7. Il lui arrive de faire des fois des mathématiques, des calculs avec son frère ou sa sœur. Elle ne sait pas si les grandes personnes se servent des mathématiques dans la vie.

8. Elle pense que les gens ne se servent pas des mathématiques dans leur métier. Plus tard, elle voudrait être maîtresse ou policière. Les maîtresses se servent des mathématiques, mais pas les policières. Son père "travaille les tapis" et sa mère reste à la maison mais elle travaille aussi chez le voisin.

1. Compter de 10 en 10 à partir de 72.

L.202 M. J'ai dit qu'on commençait où L. à 213

M. Tu vois, tu n'as pas bien écouté, essaie de retrouver ce que j'ai dit. L. 212.

M. C'est ça, tu n'as pas bien entendu, 72. Tu sais l'écrire 72 ?

Elle écrit 612 qu'elle lit 72.

M. On va commencer ailleurs, après on verra, on va commencer à 42.

Elle l'écrit correctement M. 42 et 10

L. 52 M. Comment tu as fait L. J'ai compté en 10

M. Tu as compté 43, 44, 45, tu as compté comme ça ?

L. oui M. Continue

L. 62, ... trente vingt deux M. Comment tu écris ça ? L. un 7 et un 2

Elle l'écrit, je lui demande de le lire L. quarante vingt deux.

M. Non, il se lit justement soixante douze. La langue française est un peu mal faite, ce nombre là tu l'obtiens avec 60 + 12. Les Belges et les Suisses, c'est plus facile, ils disent septante deux, donc on entend le 2... Je vais te l'écrire en lettres.

Je le fais et j'écris aussi 72 = 60 + 12 = 70 + 2, et lui demande de continuer.

L. 70. M. Tu es déjà à 72, plus 10, écris le nombre qui vient après.

Elle l'écrit correctement mais lit soixante douze.

M. C'était celui-là 72, celui-là, c'est difficile aussi, il a un drôle de nom, il s'appelle quatre-vingt-deux. (Je l'écris). En Belgique, on dirait octante deux, ça serait pus facile. Continue, écris-le et après tu le liras.

Après un temps elle écrit puis lit correctement 92, puis 102, mais très lentement. Ensuite elle écrit et lit 202.

M. Je t'ai dit d'ajouter 10. 102 + 10.

Je lui demande d'écrire 102. Elle écrit cent deux mais quand je lui demande en chiffres, elle écrit 202. Je corrige et repose la question : 102 +10 ?

L. 212 M. 112, pas 212. Ecris-le.

Elle le fait bien.

Compter en reculant de 10 en 10 à partir de 138.

Après un très long silence, elle dit 88 et écrit 98. Je lui demande 38 - 10.

Elle réfléchit longuement puis dit 27. Je lui demande d'écrire 38 et 27 et d'expliquer comment elle a fait.

L. J'ai compté en arrière 37, 36, 35, 34, 33, 32, 31, 29, 28, 27.

M. Tu n'as pas oublié ? avant 31, qu'est-ce qu'il y a ?

L. 30 M. Continue.

Elle reprend 30, 29, 28, 27 ...

M. Tu peux dessiner 38, montrer les dizaines et les unités ?

Elle écrit c d
3 8

M. Que veut dire le c ? L. centaine

M. Il y a des centaines dans 38 ? L. oui

M. Et où elles sont les unités ? L. Les unités, y'en a pas.

M. Ah, y'en a pas ? Alors dessine-moi 38, 38 ce que tu veux.

L. Elle réécrit la même chose en disant 8 dizaines et 3 centaines.

M. Non, je vais te dire, le nombre qui est à droite, c'est toujours les unités, ça , c'est les unités et ça les dizaines, et y'a pas de centaine dans 38. Alors combien de dizaines dans 38 ? L. 3 dizaines

M. Oui, et quand tu fais -10, ça va faire quoi ? C'est quoi une dizaine ? Tu peux me dessiner une dizaine ?

L. non

M. Tu ne peux pas ? Je vais te dessiner des tas de petits ronds (je le fais) et tu vas me dire si tu peux trouver une dizaine là-dedans.

Elle compte en barrant et s'arrête à 10 "voilà une dizaine"

M. Entoure la. ... Est-ce qu'il y en a encore

L. oui (elle fait la même chose avec une autre dizaine.)

M. Est-ce qu'il y en a encore ? L. Non

M. Alors est-ce que tu peux dire tout de suite combien j'avais dessiné de petits ronds ?

Elle compte ...

M. Sans les compter, tu ne peux pas me dire en te servant des dizaines ? L. Non

M. Combien il y en a dans une dizaine ? Tu en as déjà compté combien là ? L. 10

M. Oui, et là ? L. 20 M. Oui, alors ? L. 27

M. Tu vois que tu peux te servir des dizaines sans tout recompter ! Et si j'ajoute encore une dizaine, il y en aura combien ? L. 37 M. Très bien.

M. Maintenant, tu es à 37 et si je te dis 37 + 9, ça fera combien ? L. 47

M. Comment tu as fait ? L. J'ai compté de 10 en 10.

M. Tu as dit 37 + L. + 9 M. ça fait ? L. 47

M. Et 37 + 10 combien ça fait ?

L. 38 M. 37 + 10, ça fait 38 ? L. Ah non ! ....

L. 56...

M. 37 + quoi ? Redis-moi ce que tu as cherché

L. + 10, 37 euh...57

M. Attention à la dizaine, écris-le : 37 + 10, ça va faire ?

L. 57 M. Ecris-le.

M. 3 + 1, ça fait combien ? Tu as combien de dizaines dans 37 ?

L. Des unités, y'en a 7 M. oui

L. des dizaines y'en 3 M. Et là ?

L. 0 unité et 1 dizaine M. Donc en tout ? L. 57

M. Des dizaines, y'en a combien ? 3 et 1, ça fait combien ? L. 40

M. Oui, plutôt, 47. Et 37 + 9, ça fait combien ? L. 47.

2. Je vais te raconter une histoire et tu vas me dire si c'est un problème de mathématiques ou pas.

L. Oui, parce qu'ils sont 25 et puis y'a 10 croissants, 10 de chocolat et les tablettes de chocolat sont vendues par boîtes de 5, et puis ça fera 15.

M. Est-ce qu'il y a une question qui est posée ?

L. Non.

M. Est-ce que, toi, tu pourrais poser une question à laquelle on pourrait répondre ?

L. Non.

M. Non ? Tu ne peux pas chercher une question à laquelle on pourrait répondre ? On ne peut pas se poser de question à partir de ça ?

L. Il n'y a pas 25 croissants.

M. Il n'y a pas 25 croissants dans un sachet. Est-ce qu'on pourrait acheter plusieurs sachets ?

L. Oui, comme il y en a 10, il manque encore 10 + 5

M. Oui, il faut acheter combien de sachets ?

L. Encore un sachet et encore un autre sachet de 10, et puis l'autre moitié, il faudrait en avoir 5 parce que ... non, il faudrait acheter un paquet de croissants de 5.

M. Mais il n'y a que des paquets de 10, alors combien on va en acheter ? L. 3

M. C'est pas grave, ceux qui reste, on les partagera. Et du chocolat, il faut en acheter combien ? Dans une boîte, y'en a 5.

L. Encore une boîte, ça fera 10, encore une boîte, et encore une autre boîte.

M. Combien de boîtes finalement en tout ? L. 3

M. Vérifie. Tu auras acheté finalement combien de chocolats si tu as acheté 3 boîtes ? Est-ce qu'il y en aura assez pour tout le monde ? L. Non

M. Il y en a combien dans chaque boîte ? L. 5

M. Vas-y

L. J'en mets encore 5, j'en mets encore 5, ça fera 10, j'en remets encore 5, j'en remets encore 5, ça fera 25.

M. Finalement combien de boîtes ? L. 4

M. Vérifie, écris pour vérifier.

Elle écrit 4 puis 5 + 5 + 5 + 5 + 5 et dit "5 boites".

E 18. Ala née en 1980

4. Elle sait qu'on fait des mathématiques parce que "la maîtresse le dit, elle nous donne une feuille" ... "elle nous fait faire des numéros dessus et les numéros, on reconnaît que c'est des mathématiques." "On fait des leçons et des mathématiques", sur question, elle propose aussi "des opérations en colonne et des multiplications".

Elle aime le mieux le français et les contrôles. Il n'y a rien qu'elle aime le moins. Ce qui lui paraît le plus facile, ce sont les opérations. Elle ne trouve rien de difficile.

5. Pour être bon en mathématiques, "il faut travailler chez nous, il faut écouter ce que la maîtresse a dit". "Ma mère me fait faire des exercices". Dans la liste, elle trouve que tout est important.

6. Si elle n'a pas bien compris, elle demande à la maîtresse, et chez elle, à sa maman.

7. Il lui arrive de faire des mathématiques quand elle n'est pas en classe ou en train de faire ses devoirs, chez une orthophoniste. "Quand j'ai une mauvaise note

en maths, elle me les refait faire comme ça je sais après.".
Elle pense que les grandes personnes se servent peut-être des mathématiques dans la vie.

8. Pour le métier, elle pense que ça sert peut-être aux institutrices. Pour les autres métiers, comme vétérinaire qu'elle voudrait faire, elle ne sait pas si ça sert. Elle sait qu'il faut aller longtemps à l'école pour être vétérinaire. Sa mère sert les enfants au collège et son père travaille à ? mais elle ne sait pas très bien ce qu'il fait ni s'il se sert des mathématiques.

1. Compter de 10 en 10 à partir de 43.
A. 23 M. Comment tu fais ? tu vas l'écrire, d'où on part ?
A. 10 M. Oui, on compte de 10 en 10 et on commence à 43, écris-le, 43.
M. 43 et 10 ? A. 53 M. oui, écris-le. Continue
A. 64
M. Comment tu l'écris ?
Elle ne sait plus ce qu'elle a dit, recommence et cette fois dit et écrit 63.
M. Comment tu as fait ? A. J'ai compté
M. Comment, tu peux le dire tout haut ? A. J'ai compté dans ma tête.
M. Oui, comment tu as compté dans ta tête ?
A. 53 + 10 et puis on faisait l'opération M. Tu as fait l'opération dans ta tête ?
A. Oui M. Continue ... A. 73... 83... 93... 103... 113...
Je l'encourage entre chaque réponse, elle va très lentement mais, en écrivant, ne se trompe pas. Elle a une main posée sur la table et regarde ses doigts qui remuent légèrement. Je lui demande comment elle fait pour aller plus vite maintenant.
A. Quand il y a les cent, je vais plus vite.
M. Après 113, alors ? A. 114. M. Oui, mais de 10 en 10 ?
A. 123 (elle a mis aussi longtemps)
M. Tu te récites tous les nombres qui sont entre 113 et 123 ? Tu les récites dans ta tête? A. Oui.
M. Est-ce que tu peux compter de 10 en 10, mais en reculant ? à partir de 138
Je lui demande d'écrire 138, elle le fait. ... mais reste silencieuse.
M. Est-ce qu'il y a des dizaines dans ce nombre ?
A. oui, 3
M. Et dans 10 ? A. 0
M. Y'a pas de dizaine dans ce nombre ? C'est quoi une dizaine ? A. c'est un d
M.C'est un d, oui, mais ça représente quoi, une dizaine, tu peux dessiner une dizaine? A. Y'en a une.
M. Oui, dans 10, il y a juste une dizaine. Est-ce que tu peux enlever une dizaine à 138? A. oui
M. Ça va faire quoi ? Ecris le résultat A. 128.
M. Oui, et qu'est-ce que tu penses de 138 - 10 ?
A. On va enlever une dizaine.
M. Oui, et on trouve 128. Tu peux le faire encore ?
A. 118
M. Oui, encore A. 108, on peut plus.
M. On peut pas enlever une dizaine quand on a 108 ? Si tu as 108 billes, tu ne peux pas en prendre 10 ? ... Qu'est-ce que tu en penses ? Y'a pas des dizaines quand même dans 108, qui sont un peu cachées ?
A. Y'en a 0.
M. Oui, mais là, qu'est-ce qu'il y a ? Il y a une centaine. Tu ne peux pas faire des dizaines avec une centaine ?
A. Si M. Combien ? A. 10
M. Alors, tu vois, tu en as encore 10 des dizaines, tu peux en enlever une quand même, ça te fera combien ?
A. 198
M. Pas 198, puisque tu n'auras plus de centaine maintenant, tu auras 98. Vas-y.
A. 197 M. Il n'y a plus de centaine maintenant. 198, c'est trop grand. La centaine, tu ne l'as plus, tu l'as transformée en 10 dizaines, ça fait 98 et pas 198. Et attention, c'est une dizaine que tu enlèves maintenant. 98 - 10, qu'est-ce que ça va faire ? ... (elle barre le 1 de 197) Attention, là tu as enlevé une unité.
A. 78 M. Ecris-le. (elle écrit 78) Entre 98 et 78, tu ne crois pas que tu en as oublié une ? Tu avais combien de dizaines dans 98 ? A. 9 M. Et si tu en enlèves une ?
A. 8 M. Alors, tu peux écrire le nombre qui a 8 dizaines ? et 8 unités ?
A. (en même temps) 187 M. 8 dizaines, il n'y a plus de centaine A. 188.
M. 88, écris-le là (elle écrit 188) non, pas cent, on l'a enlevée la centaine. 88, 78, et si tu enlèves encore 10, ça fera combien ? A. 67
M. Pourquoi 67 tout à coup ? Les unités, tu ne les changes pas. A. 68, 58.
M. On s'arrête là, je vais te poser une autre question.

2. (Après lecture du texte) Est-ce que tu penses que c'est un problème, ça ?
A. Oui M. Pourquoi ?... (long silence)
A. Parce que un problème, c'est comme ça !
M. A quoi tu reconnais ?
A. Parce que la maîtresse, elle nous fait souvent des comme ça.
M. Est-ce qu'on a posé une question là ? A. Oui
M. Quelle question ?
A. On veut acheter 10 croissants.
M. Est-ce qu'il y a quelque chose à chercher là, qu'est-ce qu'on peut chercher ?
A. On fait une opération entre 10 et 25. M. Quelle opération ?
A. non, on fait une opération euh... avec 10, 5 et 25.
M. Quelle opération ? A. En ligne.
M. Moi, je vais te poser une question : si on veut que chaque enfant ait un croissant, combien il faut acheter de sachets de croissants ? A. 25
M. Il faut acheter 25 sachets de croissants ? Dans un sachet, il y a combien de croissants ? A. 2
M. Non, j'ai dit que, dans un sachet, il y avait 10 croissants, alors combien on va acheter de sachets pour que chaque enfant en ait un ?
M. Si tu achètes un sachet, tu vas avoir combien de croissants ? A. 10
M. Alors, ça te suffit ? Tu vas faire quoi ?
A. Il faut encore acheter 13 paquets.
M. Si tu achètes un deuxième paquet, avec 2 paquets, t'auras combien de croissants?
A. 20 M. Alors, est-ce que ça suffit ?
A. Il faut encore 5 paquets.
M. Il faut encore 5 croissants, pas 5 paquets.
A. Ah, oui !
M. Si tu achètes 3 paquets, tu en auras assez ? A. oui
M. Tu auras combien de croissants ? A. 25
M. Oui, mais il t'en restera. Si tu achètes 3 paquets, tu auras combien de croissants ?
A. 33 M.30. A. oui, 30. M. C'est bien, on va s'arrêter là.

E 19. Jam né en 1980.

4. Il sait qu'on fait une leçon de mathématiques parce que la maîtresse le dit et donne une fiche, ou bien des fois, elle dit qu'on va faire du calcul. Pendant la leçon de mathématiques, "on fait du calcul, par exemple, elle marque 10+20, après elle fait 3 petits points et on doit marquer le résultat". Sur question, il reconnaît qu'on fait aussi des problèmes.
Il préfère le calcul et il aime le moins les problèmes. Pour lui, le plus facile, c'est le calcul dans la tête, rien n'est très difficile.

5. Pour être bon en mathématiques, il faut "apprendre dans le classeur, ... quand elle nous dit de prendre le cahier de texte, si c'était pour jeudi qu'on devait apprendre, eh ben, on prend le cahier de textes à jeudi et après, elle marque d'apprendre les mathématiques." Pendant qu'on est en classe "quand t'as fini de faire quelque chose et que les autres ont pas fini, tu peux prendre ton classeur et tu révises". Dans la liste, il choisit "de bien apprendre les leçons.

6. S'il n'a pas bien compris, il cherche, et s'il ne trouve toujours pas, il demande à la maîtresse. Il demande parfois à un copain ou à ses sœurs, ou à sa mère.

7. Il lui arrive de faire des mathématiques à la maison en plus des devoirs. Il faut faire des mathématiques pour passer, par exemple en 6ème. Il ne sait pas si les grandes personnes s'en servent.

8. Il pense qu'il y a des métiers où ça sert "pour être docteur, il faut apprendre les mathématiques". Lui, voudrait devenir pharmacien et il pense que ça sert de faire des mathématiques pour cela. Sa mère travaille mais il ne sait pas ce qu'elle fait. Son père était électronicien mais maintenant il est au chômage.

1. Compter de 10 en 10 à partir de 56.

J. 10... M. Non, à partir de 56 ... silence... Tu sais pas faire 56 et 10 ?

J. J'trouve pas . M. Si c'était 50, tu saurais ? J. En reculant ou... M. En avançant

J. 50, 60, 70 M. Et avec 56, tu peux pas ? Si, essaie, 56 et 10 ? J. 16

M. 56 et 10 ? Tu peux écrire 56 ? ...(il le fait) Bon, li y a combien de dizaines dans 56? J. 5 M. Et 6, c'est quoi ? J. des unités M. Si tu ajoutes 10 ?

J. 10 unités M. Oui, dans 10, il y a des dizaines ? Qu'est-ce que c'est une dizaine?

J. C'est 10 M. C'est 10, d'accord, et tu peux pas ajouter une dizaine à 56 ?

J. A 6 ! M. 56, c'est un nombre, tu peux lui ajouter une dizaine ? J. 57

M. Non, ça c'est 56 et 1, 56 et 10 ? J. 65

M. Comment tu as fait ?

J. Je me suis dit, si dans 10, j'enlève 5, ça va faire 11, ça va faire 61, et après il me restait 5 et j'ai calculé, ça fait 66. M. Tu peux encore ajouter 10 ?

J. Oui, ça fait 76 M. Comment tu as fait ? Ecris-le.

J. J'ai vu qu'ici c'est un 6 et même là, mais ici, ça change.

M. Pourquoi ça change ?

J. Parce que une dizaine, c'est plus que 5.

M. Continue, tu en es à 76

J. 76, 86, 96, 106, 116, 126.

Maintenant, il va assez vite, sans erreur, et je l'arrête.

M. Maintenant tu vas compter de 10 en 10, mais en reculant, en commençant à 138. Tu peux écrire 138 ?... (silence)... Il y a combien de dizaines dans 138 ? J. 3

M. Moi, je t'ai dit de faire - 10. Tu ne peux pas enlever une dizaine ? Et si c'était 38?

En même temps que la dernière partie de ma question, il commence à écrire et à dire "ça fait 128".

M. Et c'est pas 138 - 10, 128 ? J. Non

M. Comment on peut faire alors pour trouver 138 -10 ?

J. Si j'avais 3 pièces de 10F, ça m'aurait fait 30F, et si j'aurais enlevé 10F, ça m'aurait fait 20F. M. C'est très bien comme ça.Tu peux encore le faire ? J. Oui

M. Vas-y

J. 118, 108, 98, 88, 78,

Je l'arrête là et lui demande comment il a fait pour trouver.

J. J'enlève à chaque fois une dizaine.

M. D'accord, et comment tu as fait pour passer de 108 à 98 ?

J. Là, c'est une dizaine, si j'enlève il y aura plus de dizaine, ça va faire 0.

M. D'accord, et quand tu en es à 108, comment tu fais après ?

J. Si j'en... à 90, on met 10, et si j'enlève 10, ça va faire 90, c'est 108 et puis j'enlève, ça va faire 98.

2.Est-ce que c'est un problème ?

J. Ah ben oui ! M. Pourquoi c'est un problème ?

J. Les calculs où on met des phrases, c'est des problèmes.

M. Est-ce qu'il y a une question qui est posée là, est-ce qu'il y a quelque chose à chercher ? J. Je sais pas.

M. Est-ce que tu peux poser des questions ? Tu peux chercher quelque chose là ? ...

M. Si tu veux, je vais te poser une question, et tu vas essayer d'y répondre. On voudrait bien que chaque enfant ait un croissant. Combien dois-je acheter de sachets de croissants ? C'est une question ça ? J. Oui

M. Alors, est-ce que tu peux essayer d'y répondre ? J. 25

M. 25 sachets ou 25 croissants ? J. 25 croissants.

M. Mais il y a combien de croissants dans chaque sachet ? ... Tu ne te souviens pas ? Je t'ai dit que dans un sachet, il y avait 10 croissants. Alors, combien on va acheter de sachets ? J. On va en acheter 3

M. On en aura combien si on achète 3 sachets ?

J. Dans un sachet, y'en aura 10, et dans un autre10, ça va faire 20, et 20 + 5, ça fait 25. M. Mais alors si j'achète 3 sachets, j'en aurai juste assez ou il m'en restera ?

J. Y'en aura assez. M. Il m'en restera pas ? Les sachets sont de 10. Je suis obligée d'acheter 3 sachets de 10. J'ai combien de croissants dans 3 sachets de 10 ?

J. Non, on achète un sachet... M. Ils en vendent pas des sachets plus petits....

J. Il faut en acheter 15 et dans l'autre 10.

M. oui, mais ils sont tous des sachets de 10, alors j'en achète 3 sachets, mais il va m'en rester un peu. Il va m'en rester combien ? J. 5.

M. Oui, ça fait rien, on les partagera.

E 20. Vin né en 1979

La première partie (questions générales) n'a pas été enregistrée.

4. Il sait qu'on fait des mathématiques parce que la maîtresse le dit. En mathématiques, on fait des additions et des multiplications. C'est ce qu'il préfère, il n'y a rien qu'il n'aime pas. Au questionnaire, il répond aussi oui pour numération, exercices, problèmes. Il trouve les additions faciles et les multiplications "quand même un peu faciles", il aime aussi les problèmes.

5. Pour être bon en mathématiques, le plus important pour lui, c'est de bien apprendre ses leçons. Dans la liste, il choisit aussi écouter la maîtresse. Il ajoute que la maîtresse dit de bien lire les consignes.

6. S'il n'a pas bien compris, il demande à la maîtresse mais pas à un camarade, chez lui, il demande à sa mère.

7. Il ne fait pas de mathématiques hors de la classe, sauf pour ses devoirs. Il pense que les grandes personnes ne se servent pas des mathématiques dans la vie.

8. Plus tard, il voudrait faire sauter les dauphins comme il l'a vu dans un livre. Il pense que les mathématiques ne lui serviront pas mais que ça peut servir dans les métiers où on vend des choses pour calculer les prix. Il vit avec sa mère qui est divorcée. Le mari de sa mère travaille dans un restaurant, son père vend des systèmes d'alarme. Il pense qu'ils se servent des mathématiques pour additionner les prix.

1. Compter de 10 en 10 à partir de 47

V. 54 ... M. 47 + 10, c'est 54 tu crois ? V. 57, 67, 77, 87, 97, 107, 207

M. 107 + 10 V. 117, ... 127, 137.

M. Tu vas t'arrêter et maintenant tu vas compter en arrière de 10 en 10 à partir de 138.

V. 138, 127 M. Comment t'as trouvé ? ... Comment tu peux vérifier ? 138 - 10

V. J'ai pas appris M. Il n'y a pas besoin d'avoir appris. Tu sais compter ? V. oui

M; De 10 en 10 à l'envers. Puisque tu sais compter à l'endroit, tu sais compter à l'envers. Ça t'aide de l'écrire ? Ecris 138...

V. 128, 118, 108, ...100 M. Comment tu as fait ?

V. J'ai reculé, j'ai enlevé 1 à 3 et j'ai mis 2 et après aussi.

M. C'est bien, maintenant tu es à 108, alors comment tu peux enlever 10 à 108 ?

V. Tu me proposes 100, pour aller de 100 à 108, il faut combien ? V.7

M. Comment tu as trouvé ? Dis-moi tout haut ce que tu as pensé tout bas.

V. 8 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108.

M. (en même temps) Tu as compté sur tes doigts ... (à la fin) ça fait 8, et toi, tu ne veux pas enlever 8, tu veux enlever 10. Alors qu'est-ce qu'il faut faire quand tu es à 100 ?

V. 89... M. quatre-vingt-... V. 99 M. Et encore 1 V. 98

M. Eh oui, regarde, il y a combien de dizaines dans 108 ? V. 1... euh 0

M. Oui, mais il y a des centaines V. oui, une

M. Et avec une centaine, tu ne peux pas faire des dizaines ? Combien on fait de dizaines avec une centaine ? V. 10

M. Oui, tu enlèves 10, tu enlèves une dizaine, donc il va te rester combien de dizaines... si tu en as 10 et que tu en enlèves une ? V. 0

M. Tu as 10 dizaines et tu en enlèves une, il t'en reste ? V. 9.

M. Oui, et ce nombre là (98), combien il a de dizaines ? V. 9

M. Et combien d'unités ? V. 8 M. Tu ne les as pas changées.

M. Maintenant, tu écris 57, et 57 + 9, qu'est-ce que ça fait ?

Il pose son addition en ligne et dit 15, ça fait, donc je mets 5

M. 9 et 7, ça fait 15 tu penses ? Dis-moi, si tu faisais 57 + 10, combien ça ferait ?

V. 67 M. Oui, 57 +9 ? V. 58

M. 57 + 9, ça ne va pas faire 58, tu as fait +1. Tu m'as dit 57 + 10 ça fait ? V. 67

M. Oui, alors 57 + 9 ? ...... V. 16 M. 66, tu veux dire, 9 et 7, ça fait 16, oui.

V. Je mets 6 et je retiens 1, ça fait 66, oui (il pose son addition en ligne en écrivant la retenue au-dessus du 5).

2. Tu vas me dire si c'est un problème.

V. C'est un problème M. A quoi tu reconnais que c'est un problème ?

V. Parce qu'il y a des questions.

M. Qu'est-ce qu'il y a comme questions ? ... silence

M. Est-ce que toi, tu peux poser une question ? ... Qu'est-ce qu'on pourrait poser comme question ... (silence)... Combien il faut acheter de sachets de croissants pour qu'on soit sûr que tous les enfants aient un croissant ? Tu te souviens de combien il y a de croissants dans un paquet ? V. 10

M. Combien tu vas acheter de paquets ? V. 20

M. 20 paquets ?

V. 2 paquets de 10. M. Est-ce qu'il y en aura assez avec 2 paquets de 10?

V. oui M. Il y a combien de croissants dans 2 paquets? V. 20

M. Il y a combien d'élèves ? V. 25 M. Il y aura assez de croissants ? V. non

M. Alors, qu'est-ce qu'on peut faire ? V (inaudible)

M. Il peut y en avoir trop, c'est pas grave, combien tu vas acheter de paquets ?

V. 2 M. Mais tu m'as dit qu'avec 2, il n'y en aurait pas assez. V.3

M. Tu auras combien de croissants avec 3 paquets ? V. 30. Il y en aura trop

M. Combien en trop ? V. 9 euh...10 M. Il y en aura 10 en trop ?

V. Non, 5

M. Il y en aura 5 en trop. Et des boîtes de chocolat, il faut en acheter combien ?

V. 2 ça fera 10, encore 1, ça fera 20 M. Non, il y en a 5 dans une boîte.

V. J'en achète une, encore une, ça va faire 20 et puis après j'en achète encore une seule et ça fera 25. M. Alors, tu en as acheté combien ? V. 5 M. Très bien

E 21. Eri né en 1980.

4. Il sait qu'on fait une leçon de mathématiques parce qu'on le dit. Il déclare qu'il ne sait pas comment il reconnaîtrait sinon. Il sait pourtant qu'on y fait de la numération, on compte, on calcule.
Il préfère la numération, mais il ne sait pas ce qu'il aime le moins. Il trouve plein de choses faciles et ne sait pas ce qui est difficile. D'ailleurs, il aime les mathématiques.

5. Pour être bon en mathématiques "il faut bien écouter et apprendre ses leçons". La maîtresse dit qu'on révise.

6. Si on n'a pas compris quelque chose, on lit, si on n'a toujours pas compris, on demande à la maîtresse. Il se fait aussi souvent expliquer par un camarade. Chez lui, il demande à ses parents. Il pense qu'il est bon en mathématiques, mais ne sait pas si c'est là qu'il est le plus fort.

7. Il lui arrive de faire de la numération, presque toujours quand il fait des devoirs et même tout seul.

Il pense que les grandes personnes se servent des mathématiques dans la vie mais ne sait pas pourquoi.

8. Il ne sait pas quel métier il voudrait faire plus tard, ni ce que font ses parents. Il pense qu'il y a des métiers où on se sert des mathématiques mais ne sait pas lesquels.

1. Compter de 10 en 10 à partir de 36.

E. 46, 56, 66, 76, 86, 96, 100,106, 116, 126.

M. Arrête-toi. Comment tu fais pour aller vite ?

E. Quand on sait, on va vite.

M. Oui, qu'est-ce que tu sais pour aller vite ?

E. 36 et 10, ça fait 46 et après, 56, 66.

M. C'est bien, et est-ce que tu peux compter à l'envers de 10 en 10, en reculant. A partir de 138.

E. 128, 118, 108, 88, 98, 88, 78, 68, 58, 48, 38, 28, 18, 8,0.

M. Pour 0, tu n'as pas enlevé 10.

Il va très vite, sans erreur, à part l'annonce, aussitôt rectifiée, de 88 à la place de 98, mais ne peut pas expliquer comment il fait.

M. Et de 9 en 9, tu saurais compter de 9 en 9 ? Commence à 50.

E. 59, 68, 77, 96 euh, 86, 95, 114, 104, 113, 122, 131, 140.

Là aussi, il va très vite, sans erreur, sauf deux lapsus qu'il rectifie aussitôt de lui-même. Il n'a pas besoin d'écrire. Je lui demande comment il a fait pour aller vite.

E. Parce que j'ai reculé M. Tu as pas reculé E. j'ai avancé

M. De combien ? E. De 9 en 9.

M. Mais tu n'as pas eu le temps de faire les additions dans ta tête, là, alors comment tu as fait ? E. Je sais pas comment expliquer.

M. Je devine comment tu as fait, tu vas me dire si c'est ça. Tu as ajouté une dizaine et puis tu as enlevé une unité E. Oui.

2. Je vais te raconter une petite histoire et tu vas me dire si à ton avis c'est un problème de mathématiques.

E. Oui, parce qu'on achète des croissants, du chocolat, on donne les prix.

M. On donne les prix ? E. non M. Est-ce que tu peux répéter ce que j'ai dit ?

Il ne peut pas. Je répète.

E. C'est pas un problème... parce qu'on donne pas l'argent qu'il fallait.

M. Comment tu ferais, toi, pour que ça soit un problème ?

E. On m'explique, on me donne l'argent, il faudrait que ça soit donné.

M. Là, on te dit rien sur l'argent, avec seulement ce que je t'ai dit, tu ne peux pas te poser de question ? ... On n'est pas encore allé dans le magasin, on n'a pas encore les prix, mais on sait quand même qu'on veut donner par exemple une barre de chocolat et un croissant à chaque enfant.

E. Ah, si ! Il y a des enfants et des croissants et des chocolats.

M. Peux-tu poser une question ? E. Non

M. Je t'en pose une. Combien faut-il acheter de boîtes de chocolat pour que chaque enfant airt une barre ?

E. Il y a 22 élèves ? M. 25 E. 25.

M. Il faut acheter 25 barres de chocolat, mais je t'ai dit que dans chaque boîte, il y avait 5 barres. Combien tu vas acheter de boîtes ?

Il compte de 5 en 5 jusqu' à 25 mais répond :

E. 1 boîte M. Dans une boîte, tu as combien de barres ? E. 5

M. Et tu as combien d'enfants ? E. 25. M. Tu en auras assez avec une boîte?

E. Non, 2. M. Dans 2 boîtes, tu auras combien de barres ? E. 45

M. Il y a combien de barres de chocolat dans une boîte? E. 5

M. Alors, si tu achètes 2 boîtes ? E. 10

M. Est-ce que tu en auras assez pour tous les enfants ? E. 4 et demi

M. Dans 4 boîtes, tu as combien de barres de chocolat ? E. (inaudible)

M. Tu crois ? vérifie. 1 boîte. Compte les boîtes. E. 5

M. 2 boîtes E. 10

M. 3 boîtes E. 15 M. 4 boîtes E. 20 ... 5 boîtes.

M. D'accord, et les sachets de croissants ? E. Y'en a combien ?

M. Y'en a 10 dans chaque sachet. E. 3.

M. Est-ce qu'il te restera des croissants ? E. Oui.

M. Combien ? E. 10.

M. 10 ? Quand tu en auras donné à chaque enfant ? Dans 3 sachets de croissants, tu en as combien ? E. 30.

M. Il y a combien d'élèves dans la classe ? E. 25, il en restera 5.

3. Problème des bons points, 187 bons points, combien d'images ?

E. 168 M. Tant que ça ? Il donne combien de bons ponts pour avoir une image ?

E. 10 M. Il peut avoir combien d'images ? E. 180

M. 180 quoi ? E. 180 images.

M. Tu crois, 180 images, ça fait beaucoup non ? Comment il peut faire pour savoir ? Il a tout son tas de bons points, pour savoir combien il va avoir d'images, il fait des petits paquets de 10 bons points. E. (inaudible)

M. Alors, il peut faire combien de paquets de 10, avec 187 bons points.

E. Il faut calculer. M. Vas-y, fais comme tu veux.

Il écrit 10 + 10+ 10 ... (une première colonne où il en met 10 et une deuxième où il en met 8, il doit compter en même temps mais ne dit rien)

E. Il en aura 118.

M. 118, tu crois ? Tu as fait combien de paquets de 10, là ? Comment t'as fait ? Raconte-moi un peu ce que tu as fait ?

E. J'ai compté de 10 en 10 jusque j'arrive à 10. M. Oui, ça fait quoi ?

E. 100 M. ça, ça fait 100, et puis après ? E. ça fait 180

M. Oui, bon, il va avoir combien d'images alors ? A chaque paquet de 10, il va avoir une image. Alors, il va avoir combien d'images ? E 180

M. 180, c'est les bons points. Tu as fait des paquets de 10 avec tes bons points, et il a une image par paquet de 10, donc il va avoir combien d'images ? E. 180

M. 180, c'est les bons points, ce que tu as écrit 10 + 10 +10 ... c'est les bons points et pour 10 bons points, il a une image seulement.

E. Ah... 18 M. Ecris-le. Et il lui reste des bons points ?

E. Non M. Et les 7 alors

E. Ah oui ! M. Et est-ce qu'il peut avoir un cahier avec les 18 images ?

E. Oui M. Il lui restera des images ? E. Oui, il en restera 8.

Questionnaires écrits utilisés en CM2

1. Compte de 10 en 10 en reculant à partir de 278 :

....

....

Explique comment tu fais pour trouver vite le résultat dans ta tête :

....

....

Compte de 9 en 9 à partir de 127 jusqu'à ce que tu aies dépassé 250 :

....

....

Explique comment tu fais pour trouver vite le résultat dans ta tête ?

....

....

2. Dans une école, on organise un goûter pour le carnaval. On a décidé d'acheter des croissants, des tablettes de chocolat, des oranges.
Les croissants sont vendus par sachets de 10.
Les tablettes de chocolat sont vendues par boîtes de 20.
Les oranges sont vendues par filets de 6.
Dans cette école, il y a 5 classes :
un C.P. avec 18 élèves
un C.E.1 avec 23 élèves
un C.E.2 avec 16 élèves
un C.M.1 avec 21 élèves
un C.M.2 avec 27 élèves.
Sais-tu combien il faut acheter de filets d'oranges pour être sûr de pouvoir donner au moins une orange à chaque enfant ?

Au dos de la feuille, invente des problèmes à partir de cette histoire et essaie d'y répondre.

3. A ton avis, quand on fait des mathématiques, on fait

	jamais	quelquefois	souvent	très souvent
du calcul mental	....	....	....	....
des opérations	....	....	....	....
des tracés de géométrie	....	....	....	....
des mesures	....	....	....	....
des exercices	....	....	....	....
des problèmes	....	....	....	....

Pour chaque ligne, mets une croix dans la case qui te paraît le mieux convenir.
on fait autre chose ? Explique :

....

Parmi les activités du cours de mathématiques
Qu'est-ce que tu préfères ?...
Qu'est-ce que tu aimes le moins ?..
Qu'est-ce qui te paraît le plus facile ? ....
le plus difficile ? ....

4. Arrive-t-il qu'un problème de mathématiques ait plusieurs solutions ?
jamais quelquefois souvent
Arrive-t-il qu'il y ait plusieurs méthodes pour trouver la solution ?
jamais quelquefois souvent

5. Penses-tu que pour être bon en mathématiques, le plus important c'est
- de bien écouter le maître (ou la maîtresse)
- de bien apprendre ses leçons
- de se faire expliquer ce qu'on n'a pas bien compris
- de faire beaucoup d'exercices ou de problèmes
- autre chose (explique) :

....

Mets une croix devant ce qui te paraît le plus important

6. Si tu n'as pas très bien compris, que fais-tu ?
- je demande à la maîtresse (ou au maître) de réexpliquer
- je demande à un camarade
- je demande à mes parents ou à mes grands frères et grandes sœurs
- autre chose (explique) :

....

mets une croix devant ta solution

7. T'arrive-t-il de faire des mathématiques quand tu n'es pas en classe ni en train de faire tes devoirs? A quel moment ? Donne des exemples.

....

Penses-tu que les grandes personnes se servent des mathématiques dans la vie ? Pourquoi ?

....

8. Quel métier aimerais-tu faire plus tard ?.......................................
Penses-tu que tu te serviras de mathématiques dans ton métier ? Pourquoi ?

....

Quel métier font tes parents ?...

....

Penses-tu qu'ils se servent des mathématiques dans leur métier ?

....

A part professeur de mathématiques ou instituteur, penses-tu qu'il y a des métiers où on fait beaucoup de mathématiques ? lesquels ?

....

ANNEE 1988-1989. ELEVES DE 6EME

Questionnaire sur les mathématiques

1. Quelles sont les matières que tu préfères à l'école ? celles que tu aimes le moins ? et à l'extérieur de l'école ?
Qu'est-ce que tu fais les jours de congé ? Y a-t-il autre chose qui te plaît, que tu aimerais faire ?

2. En quoi tu es fort à l'école ou hors de l'école ? Qu'est-ce que tu sais bien faire ?

3. Qu'est-ce que tu aimes en maths ? Qu'est-ce que tu n'aimes pas ?
Qu'est-ce qui te paraît facile ? Difficile ?

4. Est-ce qu'il t'est déjà arrivé de faire des maths dans les autres matières ? en dehors de l'école ? Par exemple ?
Penses-tu que ça arrive aux adultes ? est-ce qu'il y a des métiers où on se sert des maths ?

5. D'après toi, quel est le plus important à faire pour être bon en mathématiques ? On peut suggérer
- de bien écouter le maître (ou la maîtresse)
- de bien apprendre ses leçons
- de se faire expliquer ce qu'on n'a pas bien compris
- de faire beaucoup d'exercices ou de problèmes
- de bien tenir son cahier
- autre

6. Si tu n'as pas très bien compris, que fais-tu ? On peut suggérer :
- je demande à la maîtresse (ou au maître) de réexpliquer
- je demande à mes parents ou à mes grands frères et grandes sœurs
- je demande à un camarade
- je révise le cours
- autre

7. A l'école primaire, qu'est-ce que tu faisais en mathématiques ?
On suggère (jamais, quelquefois, souvent, très souvent)
du calcul mental .... des opérations ....
des tracés de géométrie .... Quels instruments as-tu utilisés : règle graduée, compas, équerre rapporteur
des mesures .... des représentations graphiques ....
des exercices .... des problèmes ....
Y-a-t-il un problème dont tu te souviennes ?

8. Qu'est-ce que tu penses de la 6ème ? Est-ce que ça te paraît facile ? difficile ? pourquoi ?

9. Est-ce que tu sais ce qu'on peut faire après la 5ème ? après le collège ?
Quel métier aimerais-tu faire plus tard ? Est-ce que tu sais quelles études il faut faire pour cela ?

10. Compte de 10 en 10 en reculant à partir de 278 : rapide hésitant erreurs
Compte de 9 en 9 à partir de 127 jusqu'à ce que tu aies dépassé 250 : rapide hésitant erreurs
Explique comment tu fais pour trouver vite le résultat dans ta tête?

11. Arrive-t-il qu'un problème de mathématiques ait plusieurs solutions ? jamais quelquefois souvent
Arrive-t-il qu'il y ait plusieurs méthodes pour trouver la solution ? jamais quelquefois souvent

1) Ecris en chiffres
deux mille deux .... un million quatre cent vingt quatre ....
Ecris en lettres et en chiffres tous les nombres que tu peux fabriquer avec trois, sept, cent, mille

2) Dans un magasin, on vend des billes par filets, boîtes ou cartons
dans un sachet, il y a 10 billes dans une boîte, il y a 10 sachets dans un carton, il y a 10 boîtes.
Pour la fête de l'école, on a besoin de 3512 billes. Combien doit-on acheter de cartons, boîtes, filets ?

3) Effectue les opérations suivantes :
4768 x 709 3227 : 47 47,68 x 70,9 322,7 : 47

4) Dans une école, on organise un goûter pour le carnaval. On a décidé d'acheter des croissants, des tablettes de chocolat, des oranges.
Les croissants sont vendus par sachet de 10.
Les tablettes de chocolat sont vendues par boîtes de 20.
Les oranges sont vendues par filets de 6.
Dans cette école, il y a 5 classes :
un C.P. avec 18 élèves un C.E.1 avec 23 élèves un C.E.2 avec 16 élèves
un C.M.1 avec 21 élèves un C.M.2 avec 27 élèves.
Sais-tu combien il faut acheter de filets d'oranges pour être sûr de pouvoir donner au moins une orange à chaque enfant ?
Invente des problèmes à partir de cette histoire et essaie d'y répondre.

5) Range du plus petit au plus grand 4,12 43,25 4,54 4,02 4,5 4,45 40,2 4,2 40,12 4,325

6) Sur l'autoroute, une voiture qui roule régulièrement fait 32 km en un quart d'heure. Combien parcourt-elle de km en 2 heures ?

7) J'achète un livre qui coûte 63,40 francs. On me fait une réduction de 5%. Combien vais-je payer ?

8) Dans un supermarché, on vend des cahiers par lots de 5 et les mêmes cahiers à l'unité.
Un cahier est vendu 4,60 F à l'unité et le lot de 5 cahiers est vendu 18 F.
Un professeur a besoin de 114 cahiers pour les élèves de ses classes.
Que doit-il acheter pour payer le moins cher possible ? Combien va-t-il payer ?

Précisions sur le déroulement :
Les élèves répondaient oralement aux questions de 1 à 11. Nous notions leurs réponses sur la feuille. Ils faisaient les exercices suivants par écrit (il y avait plus de place pour les réponses).

Questionnaire de Février 1989 en 6ème.

1. Impression générale, avant de poser des questions plus précises
* Es-tu content de toi ? de ton travail ? de tes progrès ? du fonctionnement de la classe ?

* Que penses-tu d'une classe comme celle-ci ? Es-tu content d'y être ou préfèrerais-tu être dans une classe comme la 6ème 1 ? Penses-tu que tu fais plus de progrès en étant dans cette classe que dans une autre ou le contraire ?

* Que penses-tu du travail en classe, pour toi est-ce mieux, moins bien, pareil qu'au début de l'année ? pour les notes ? la quantité de travail ? la compréhension ?

* Evaluation
Est-ce que les notes, c'est très important pour toi ? A quoi ça sert ?
Est-ce que ça te gênerait s'il y en avait moins souvent ?
Que penserais-tu d'un contrôle sans note où on te dirait seulement quelles erreurs tu as faites ? Est-ce que ça te servirait ?

2. Leur réussite
où penses-tu que tu réussis le mieux en général ? et à l'intérieur des mathématiques ?
Qu'est-ce qui t'a le plus intéressé dans le cours de mathématiques jusqu'à maintenant ?

3. Leurs difficultés
où sont tes principales difficultés en mathématiques
numération (écriture des nombres) proportionnalité
opérations décimaux
calcul mental informatique
géométie méthodes de travail
problèmes autres
Qu'est-ce qui t'a paru le plus difficile dans le cours de mathématiques jusqu'à maintenant ?

4. Méthodes de travail en classe et à la maison
* que penses-tu du travail en groupes, est-ce que tu travailles mieux, est-ce que ça t'aide à comprendre ? à apprendre ?
est-ce que ça te gêne ? pourquoi ?
* que fais-tu quand un camarade explique ce qu'il a trouvé, ce qu'il a fait ?
est-ce que ça t'intéresse ?
lui poses-tu des questions ?
est-ce que tu t'en sers ?
est-ce que tu aimes expliquer ce que tu as trouvé ?
Est-ce que tu écoutes les questions des autres à propos de ton travail ?
est-ce que ça peut t'aider ?

* est-ce que tu vérifies les résultats que tu trouves dans un problème en classe ?
pendant un contrôle ? quand tu fais un devoir à la maison ?
de toi-même ? si on te le demande ?
comment ? en refaisant les calculs ? en cherchant par une autre méthode ?
est-ce que c'est utile ?
est-ce que ça t'a déjà aidé à mieux comprendre ?
à retrouver des erreurs ?

* comment fais-tu pour apprendre le cours de mathématiques ?
est-ce que tu te le récites ou que tu le récites à quelqu'un ?
est-ce que tu essaies de refaire les exercices qu'on a cherchés en classe ?
est-ce que tu cherches d'autres exercices ?
est-ce que tu te sers du livre ?
est-ce que tu travailles avec quelqu'un à la maison ? qui ?

* comment fais-tu pour chercher un exercice de mathématiques ?
est-ce que tu essaies de te souvenir du cours ?
est-ce que tu cherches dans ton cahier de cours ?
est-ce que essaies de te souvenir d'un exercice que tu as déjà fait et qui ressemble ?
est-ce que tu cherches seul ou avec des camarades ?
quand tu ne trouves pas tout de suite, tu cherches pendant combien de temps ?
est-ce que tu y reviens ensuite quand tu n'as pas trouvé du premier coup ?

5. Aide individualisée
Qu'en penses-tu ? est-ce bien ? est-ce que ça te sert ?
penses-tu que le rythme est bon ? ou devrait-il y en avoir plus souvent ? moins souvent? dans d'autres matières ?
penses-tu que c'est mieux que l'aide soit faite par le professeur de la classe ou par un autre professeur ?
est-ce que ça t'aide ?
est-ce que tu poses des questions sur ce que tu ne comprends pas ?
aurais-tu des suggestions à faire pour cela t'aide davantage ?

6. Informatique
aimes-tu ?
préfères-tu le travail sur feuille ou sur ordinateur ?
pour toi, est-ce un travail ou un jeu ?
préfèrerais-tu travailler seul sur l'ordinateur ou aimes-tu travailler avec 1 ou 2 camarades ?
est-ce qu'on fait des maths pendant l'informatique ?
aimerais-tu que l'ordinateur corrige ton travail ?
est-ce que cela t'est déjà arrivé ?

Annexes du chapitre 6.

QUESTIONNAIRE 1.

QUESTIONNAIRE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Indiquez sur quelle(s) classe(s) vous vous basez pour répondre (quitte à remplir plusieurs questionnaires).

1) Qu'entendez-vous par avoir des connaissances en mathématiques (pour un professionnel, pour un élève) ?
2) Qu'est-ce qui manque à votre avis aux enfants en échec en maths ?
3) Que doit faire un élève (en classe, à la maison) pour progresser en mathématiques ?
4) Est-ce que selon vous tous les enfants peuvent acquérir les notions des programmes de maths jusqu'en 3° ? Jusqu'au niveau terminale B ?
5) Le travail collectif en petits groupes peut-il améliorer les résultats a) sur un exercice cherché en groupe ?
b) sur l'apprentissage individuel ?
6) Quelle partie du temps pensez-vous qu'il faille consacrer à la résolution des exercices et des problèmes en classe (précisez le cas échéant si vous distinguez différents types de problèmes) ?
7) Quel travail à la maison donnez-vous aux élèves ?
8) Quels types de devoirs à la maison donnez-vous (annales, réflexion...) ?
9) Quels types de contrôle donnez-vous ?
10) Quelles sont les principales qualités que vous cherchez à évaluer à l'écrit ?
11) Qu'est-ce que vous appréciez le plus chez les élèves (individuellement) ? Dans une classe ?
12) Qu'est-ce que vous essayez de valoriser le plus chez les élèves, dans la classe ?
13) Attribuez-vous un rôle important à la mémoire ? Pourquoi ?
14) Faites-vous un enseignement de méthodes (précisez) ?
15) Quels sont les conseils que vous donnez le plus souvent aux élèves, pendant la classe (en distinguant cours et exercices) ? pour le travail à la maison ?
16) De quoi dépend un apprentissage efficace des mathématiques ?
17) Si vous deviez "caractériser" les maths, que choisiriez-vous dans la liste suivante : théorie, outils pour résoudre des problèmes, langage, outils de calcul, formalisme, texte de savoir, autre ?
18) Etes-vous partisan d'un enseignement d'histoire des maths ? Pourquoi ?
19) Qu'est-ce que les nouveaux programmes changent dans l'attitude des professeurs et des élèves (y compris par rapport à l'évaluation) ?
20) Que pensez-vous des groupes de niveau ?

Quelles questions importantes manquent-elles à ce questionnaire à votre avis ?

Grille d'entretien avec les professeurs de 6ème

1. Qu'attendez-vous de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire ?
   - contenus
   - méthodes

Qu'est-ce qui d'après vous manque aux élèves qui ont des difficultés en mathématiques au collège?

2. Qu'entendez-vous par avoir des connaissances en mathématiques pour un élève qui sort du collège ?
et pour un professionnel ?

3. Qu'est-ce qui est le plus important pour la bonne réussite de la scolarité au collège.
(rapport famille-collège, attitude de l'élève en classe, travail personnel, rapport enseignant-élève).

4- Qu'est-ce qui manque à votre avis aux élèves en difficulté en mathématiques ? D'où viennent leurs difficultés, où se situent-elles ?

5- Que doit faire un élève (en classe, à la maison) pour progresser en mathématiques ? Quels conseils donnez-vous ?
Qu'est-ce qu'écouter ? Comment écouter ?

6- Quels sont d'après vous les critères d'un bon enseignement des mathématiques ? Y-a-t-il des différences suivant les élèves ?
Pouvez-vous mettre vos idées en pratique ? Si non pourquoi ?
Quelles sont les qualités d'un bon enseignant ?

7- Pensez-vous que tous les élèves puissent acquérir les notions des programmes de mathématiques jusqu'en 3ème ? jusqu'en terminale B ?

8- Le travail en groupes peut-il améliorer les résultats sur l'apprentissage individuel des élèves ?

9- Faites-vous travailler vos élèves en groupes ? A quelle fréquence ? pour quel type d'activité ? Quelle répartition du temps vous paraît la plus efficace entre travail en groupes, individuel, collectif, cours, évaluation, corrections.

10- Dans l'enseignement des mathématiques, quelle répartition vous paraît-il la plus adéquate en classe entre
   - résolution de problèmes
   - apprentissage de techniques
   - établissement de résultats (définitions, théorèmes)

et dans le travail personnel pour les élèves ?

11- Différenciez-vous des types de problèmes ou de situations mathématiques ? Quel usage respectif en faites-vous dans votre enseignement ?

12- Attribuez-vous un rôle important à la mémoire ? Pourquoi ? Quel est ce rôle ?

13- Quel est le rôle du travail à la maison ? Quel type de travail à la maison donnez-vous ?

14- Peut-on enseigner des méthodes de résolution de problèmes en mathématiques? Comment?

15- Quelle place faites-vous à l'évaluation des élèves ? Quel type de contrôle donnez-vous ? Quelle fréquence ? Que cherchez-vous à évaluer ? Les connaissances ? les méthodes ? autre chose ?
L'évaluation a-t-elle un rôle dans l'apprentissage des élèves ? Quelle correction faites-vous des contrôles ?

16- Qu'est-ce que vous appréciez le plus chez les élèves individuellement ? en classe ?
Qu'est-ce que vous essayez de valoriser le plus chez les élèves ?

17- Quels types d'actions vous paraissent efficaces pour réduire les difficultés des élèves en mathématiques au collège ?

18- D'où viennent d'après vous les difficultés des élèves en seconde? Que faire pour y remédier ?

19- Si vous deviez caractériser les mathématiques, quels termes choisiriez-vous : théorie, outils pour résoudre des problèmes, langage, outils de modélisation du réel, calcul, formalisme, abstraction, objet de savoir, autre ?

ENTRETIENS AVEC DES PROFESSEURS DE COLLEGE

1. LE PROFESSEUR A

L'interview de ce professeur n'a pas été enregistrée, les citations ne sont donc pas exactes, mais se réfèrent aux notes que nous avons prises.

Question 1

Attentes à l'entrée au collège :

"Mon but au niveau des 6ème est de restructurer ce qu'ils ont appris en primaire, même si c'est décousu". "Sur le contenu, il faudrait qu'ils n'aient pas de difficultés, ne serait-ce que sur les quatre opérations et qu'ils comprennent le langage en français, le langage mathématique est très restreint. La numération devrait être acquise aussi". "On passe la 6ème à restructurer, à remettre en place. Le contenu mathématique n'est pas énorme, on reprend les prérequis."

Ce qui manque aux élèves en difficulté :

"Ils ne comprennent pas le langage, ce qu'on leur demande. Ce n'est pas qu'ils ne savent pas faire, ils ne comprennent pas ce qu'on leur demande. A l'oral comme à l'écrit. A l'écrit, au niveau de la lecture des textes, mais aussi à l'oral."

Question 2

Ce que l'élève doit avoir acquis à la sortie du collège :

"Il y a deux domaines. Il doit avoir *acquis tous les calculs dans* $\mathbb{R}$*, et il faut qu'on arrive à lui donner le sens du raisonnement hypothético-déductif,* au niveau de la géométrie surtout, mais ça se retrouve même en algèbre.

"Quel que soit ce qu'on manipule au niveau mathématique, on a cela : utilisation des connaissances dont on dispose pour déduire autre chose. *C'est le raisonnement qui est le plus important dans l'activité mathématique.* Si on a ça, tout le reste passe."

Question 3

Les points fondamentaux pour la réussite de la scolarité des élèves

La première condition est *un travail personnel régulier avec un soutien de la famille, c'est-à-dire qu'ils y portent de l'intérêt, en réservant une plage horaire pour travailler,* par exemple de 5h à 7h, après le goûter, avant le dîner. Ici, les 3/4 des enfants n'ont pas cela : les parents ne rentrent pas avant 7h, alors, pour les garder, ils ont une activité extra-scolaire. Les enfants n'ont donc pas un travail régulier. Il faudrait des études dirigées". *"Pour permettre aux élèves d'avoir un travail régulier, "l faudrait des études dirigées."* Des PAE faits par les parents ont fonctionné pendant 3 ou 4 ans mais n'ont pas eu beaucoup de succès. Il faudrait une étude dirigée surveillée par des professeurs ou des surveillants (payés par la mairie par exemple). Il y a une expérience cette année. Pour les 140 élèves de 6ème, il y a des études faites par les instituteurs des SES, le Principal et un professeur, pour les élèves volontaires."

Question 4

Ce qui manque aux élèves en difficulté en mathématiques :

Il leur manque un rythme régulier de concentration.

"Il y a deux types d'élèves en difficulté. Certains n'ont jamais travaillé régulièrement, on ne leur donne pas la capacité de se concentrer, ce sont souvent des enfants intelligents. Il faut donner tôt la capacité de concentration. Souvent, ils ne voient pas ce qu'ils ne prennent pas la peine de regarder. *Il faut apprendre à se concentrer, à faire le vide dans la tête.* On n'a pas assez exigé d'eux en primaire, et ici non plus. *On ne donne pas assez le goût de la recherche, de l'intérêt.* Ils n'acquièrent pas de bases et les lacunes viennent comme ça.

L'autre type, c'est ceux qui ont une incapacité à abstraire. Par exemple, cette année, j'ai 3 ou 4 élèves de 4ème qui sont capables d'efforts puisqu'ils peuvent apprendre par cœur. Mais *il manque* dans la taxonomie *une partie entre les acquis et les applications. Ils sont capables de réciter le cours mais ne peuvent pas l'appliquer aux cas particuliers. Les applications, ce serait une partie à cultiver* du côté du CP.

La première partie est un travail de recherche, de concentration, trouver la règle, un acquis à utiliser, la deuxième partie est de pouvoir s'en servir."

Question : "les règles qu'ils ont n'ont pas de sens pour ces élèves ?"

Réponse : "oui, c'est ça, mais je ne sais pas pourquoi ça m'ennuie de dire qu'ils n'ont pas compris parce que *c'est mon travail de prof de leur faire comprendre."*

Question 5

Ce que peut faire un élève pour progresser :

"Les élèves qui progressent le plus sont ceux qui arrivent à avoir une certaine confiance, à participer, à s'intéresser. C'est un cercle vicieux." "On se heurte au problème des classes surchargées, à des problèmes sociaux d'acceptation (liés à la classe d'âge). *Ils ont souvent de tels problèmes familiaux qu'on est ridicules à côté de ça* : ils n'en ont rien à faire des équations quand ils ont des problèmes bien plus importants comme de se faire buter le soir en rentrant... Même si on leur dit que les maths, elles, ne feront pas de mal."

"A la maison, il ne doit pas se décourager, reprendre à la maison ce qui a été fait, refaire les exercices, apprendre les leçons, refaire les contrôles. A un moment ou à un autre le travail régulier est payant. Après une heure de cours de maths, il faut 20 à 25 minutes à la maison. Il faut s'installer pour une préparation de contrôle, resituer, simuler un contrôle. *La simulation est payante. Il faut s'imaginer, retraiter les exercices et se demander quelles sont les questions que le professeur peut poser.* Ma fille dit "c'est ça qui m'aide, que tu puisses prévoir ce qu'on peut me demander". On se met en situation de réussite si on simule ce qui peut se passer."

Pour écouter :

"Il faut d'abord participer au dialogue. On n'écoute pas, on doit participer au dialogue. Les élèves ont presque autant à apporter au professeur. Le mot écouter n'est pas juste, c'est plutôt participer. *Etre attentif, c'est participer au cours,* amener son matériel. Je leur dis "on est actif, vous jouez la comédie avec moi, ce n'est pas comme au théâtre. Il faut laisser les problèmes à la porte et venir avec l'intention de suivre le cours." On peut dire quand un élève s'est bien comporté en classe, mais je ne peux pas dire le pourcentage d'écoute."

Question 6

Ce qui gêne pour faire un bon enseignement en maths :

"ce sont les effectifs : j'ai 32 élèves en 6ème cette année, l'idéal c'est entre 20 et 25, *sinon j'ai toujours le regret en sortant de classe d'environ 10 élèves qui n'ont pas été sous mon contrôle.* On n'aurait plus besoin d'élever la voix, on pourrait les laisser travailler à 2 ou 3. On peut marcher à 30 mais je le vis mal. *Il y a aussi le problème du temps : l'année passe trop vite par rapport à ce qu'on veut faire."*

Un bon enseignement des maths

"c'est lié à la participation. Les bons élèves, quelles que soient les méthodes n'en subissent pas de conséquences. *Pour des élèves qui ont des difficultés, il faut leur apprendre l'intérêt des maths.* Même les adultes, quand on leur demande leurs plus mauvais souvenirs de l'école, beaucoup répondent les cours de maths. C'est difficile de dire qu'on est prof de maths, ça crée un froid. Les gens répondent "qu'est-ce qu'on a pu se barber, quel mauvais souvenir, on en a !". *Je souhaite que la nouvelle génération n'ait pas ça. Avec les nouveaux programmes, ça devrait s'améliorer. J'y crois. On va même pouvoir leur donner du sens. Je veux y croire parce qu'on ne peut pas faire marche arrière,* on n'était pas dans la bonne voie. J'ai débuté dans l'enseignement avec les maths modernes, ça ne me gênait pas à l'époque, mais je comprends que les enfants préfèrent ce qu'on leur fait maintenant."

Question 7

Tous les élèves peuvent-ils acquérir les notions jusqu'en 3ème ?

"Je l'aurais dit quand j'ai commencé, mais je ne peux plus le dire maintenant. Il y a des élèves qui ont de telles difficultés au niveau abstraction. Si on s'y prenait autrement depuis le départ, oui... *avec un enseignement plus individualisé, avec du temps,* en prenant plus souvent les élèves par petits groupes, *ils auraient plus d'exemples de situations réussies.* Les élèves n'ont qu'une idée relative. *Si quelqu'un réussit, ils ont envie de réussir. On n'a pas le temps de mettre les élèves en valeur. Il faudrait du temps."*

Il y a des très bons élèves qui ont des acquis et 15 jours après, ils ne savent plus, et d'autres ratent un contrôle et un peu plus tard, on s'aperçoit qu'ils savent. Les élèves qu'on signale en difficulté, ce sont ceux qui ne sont pas capables d'exécuter ce qu'on demande au moment qu'on a choisi. Il y a des élèves lents, des élèves qui ne savent pas, des élèves qui ne font pas ce qu'il faut au moment où on veut le leur faire faire, ils se retrouvent tous dans les enfants en difficulté. *On ne peut pas prendre en compte de façon institutionnelle un travail qui a été bien fait, mais 3 jours plus tard. Il faudrait plus de souplesse.* Ceux qui réussissent sont ceux qui acceptent les contraintes du système, c'est perdre un peu leur personnalité. Quand on y réfléchit, c'est même scandaleux."

En terminale B aussi, oui, *s'il y avait les conditions sur les effectifs et le temps." "Il faudrait un enseignement plus horizontal.* Si j'étais ministre, je ne ferais pas la structure que l'on a. Je ferais un groupe maternelle, CP, CE1, CE2, avec des progressions à l'intérieur, puis un groupe CM1, CM2, 6ème, 5ème où une évolution pourrait se faire avec une mise en place des méthodes et des contenus, avec des âges mélangés et des groupes de niveau. A partir de 4ème, 3ème, 2nde, on aborderait l'abstraction et des options, il faudrait qu'on leur présente ce que sont des options. En 1ère et Terminale, on aurait un bilan scolaire. Dans chaque groupe, on travaillerait de façon horizontale. Actuellement, on souffre des problèmes de passage et de redoublements.

Questions 8 et 9.

Sur le travail en groupes : peut-il améliorer l'apprentissage individuel des élèves ?

"plutôt sur le comportement individuel. Mais le mot apprentissage me gêne, l'apprentissage se fait individuellement. Cela peut apporter un meilleur comportement, des meilleurs résultats. Je demande que le travail à la maison soit fait à plusieurs sur certaines choses qui demandent une recherche sur une semaine. *En classe, je n'en fais pas beaucoup à cause du temps,* je fais par exemple des bilans de statistiques. Les jeux marchent bien en groupe, les jeux où il faut gagner, quand il faut trouver la réponse le premier, qu'il y a un enjeu, quelque chose à valoriser. Sinon, c'est souvent un élève qui décide de diriger les opérations, *ils ne travaillent pas tous.*

Je fais du travail en groupes dans 3 types de situations : une recherche à la maison, un jeu, exécuter une production avec partage du travail, par exemple en statistiques où il faut regrouper des résultats.

Le travail en groupes est bénéfique par les échanges.

Répartition du temps du point de vue organisation de la classe :

En 6ème, environ 1/3 du temps en travail individuel, 1/6 en travail collectif, 1/6 en vérification des connaissances. Dans le dernier tiers, une variété de travaux : groupes, commentaires, diapos, recherche de mesures dans la cour, activité physique, jeu, ce qui relève des motivations, de l'intérêt.

Question 10

Répartition du temps entre les différents types d'activités.

Dans le programme, tout doit venir d'un problème, mais on s'aperçoit que, pour résoudre un problème, à un moment ou à un autre, il faut une partie acquise. Il faut qu'on mette au point la partie acquisition. J'ai du mal à distinguer la répartition. Parfois, il faut 5 minutes pour faire un bilan de situation, mais il a fallu manipuler longtemps à l'avance. *Par exemple, mettre au tableau les acquis du programme de 4ème devrait prendre 1 heure en algèbre et 1 heure en géométrie, le reste du temps est consacré à savoir comment les utiliser.*

Question 12

Rôle de la mémoire

Un rôle important. C'est ce qui permet de faire des acquis, de retrouver ce dont on a besoin, dans quelle situation on est, si on a déjà vu cette situation. On peut l'exercer par un travail régulier. On est déséquilibré les semaines où on ne fait pas toujours la même chose. Il faut une plage horaire de travail à la maison. En classe, on peut exercer la mémoire visuelle par un travail au tableau, par exemple une figure dessinée puis effacée et il faut dire les éléments important.s Il faut faire évoluer pour rédiger en, français. On travaille en même temps la mémoire, la formulation, le vocabulaire.

Question 13

Rôle du travail à la maison :

Faire travailler la mémoire., apprendre un vocabulaire exact, précis. En mathématiques, on se heurte à un problème de langage, c'est comme une langue, par exemple, "ajouter", "calculer " ,"développer", "résoudre". Il y a plusieurs types de travail à la maison :

- des exercices d'application. Quand on a appris une leçon, il faut des exercices d'application. *Des élèves ne voient pas le rapport avec la leçon, le moyen, c'est de faire refaire les exercices après la correction*

- des exercices de recherche de plusieurs sortes : les devoirs, des productions notées, mais ils ont alors un certain temps, ou une recherche d'exercices qu'on a fait en classe oralement, là ils ont moins de temps, ou une recherche avec documentation pour démarrer une activité.

- préparer des contrôles de bilan : il faut 2 heures de concentration, de simulation du contrôle, réfléchir aux difficultés qu'on a pu avoir pendant les 3 semaines, à ce que peut demander le professeur.

Question 15

L'évaluation : ce qu'on cherche à évaluer, comment ?

- *Il faut évaluer les acquis proprement dits* : règles, vocabulaire... dans toutes les classes.

- *une production où le temps n'est pas limité,* on dispose de 8 jours pour un exercice, un travail de recherche. *Là interviennent le soin, la présentation, la personnalité.* Il faut rendre une production correcte. Je ne supporte pas les devoirs non terminés. Il faut oser venir demander si une question n'est pas claire.

- Il peut y avoir l'exécution d'une figure en 6ème, il faut un beau dessin.

- les contrôles proprement dits, contrôles de bilan. *Il faut voir comment ils appliquent les connaissances, comment ils raisonnent, comment ils comptent. Le problème c'est le temps, les contrôles sont trop longs alors on évalue la rapidité, ils ont des choix à faire.*

Question 16

Ce qu'il apprécie le plus chez ses élèves et cherche à valoriser :

Les élèves qui posent des questions, qui s'intéressent. J'essaie de les inciter à poser des questions, même si quelquefois, ça n'a pas de rapport.

Question 19

Caractérisation des mathématiques

1) outil pour résoudre des problèmes

2) un langage, mais il ne faut surtout pas se contenter d'un langage, un langage dans un but actif, d'agir

3) surtout pas un outil de modélisation du réel.

2. LE PROFESSEUR B

Question 1

Attentes à l'entrée au collège :

"Quand les élèves arrivent, j'espère qu'ils aient des connaissances bien sûr et une certaine indépendance, et j'espère leur en donner davantage et qu'ils se plaisent en venant au cours, qu'ils soient contents quand ils viennent en maths, que ça se passe bien"

Ce qui manque aux élèves en difficulté :

"Ceux qui ont des très grosses difficultés, c'est souvent parce qu'ils sont très perturbés chez eux, et c'est très difficile de les aider. *Je crois que c'est à cause de leurs préoccupations familiales essentiellement.* Il y en a qui ont des difficultés intellectuelles c'est vrai, mais au niveau 6ème, ce n'est pas tellement difficile, je crois que ça vient vraiment d'autre chose, et du milieu familial"

Du point de vue des maths, qu'est-ce qui leur manque ?

"Des notions fondamentales qui ne sont pas acquises et que je me vois difficilement leur faire acquérir... *quand ils n'ont pas le sens d'une opération, je suis vraiment très démuni pour les aider en fait... à part une manipulation...* mais quand la manipulation ne déclenche rien..."

"Les élèves *ne sont pas organisés mais c'est normal,* "ça se passe en général bien, ça"

"j'aime bien les 6ème, ils sont en général très spontanés"

Question 2

A la sortie du collège :

"Qu'il ait les connaissances incluses dans le programme bien sûr, qu'il sache se servir de son livre de maths et qu'il ait la possibilité de réagir devant les exercices ... je crois que c'est important pour la seconde ... s'il n'a pas les connaissances au sens propre, *qu'il soit capable de rechercher ou d'aller demander, de formuler certaines questions de façon à ne pas rester bloqué, l'aider à chercher en fait"*

Pour un professionnel :

"Quelqu'un qui a des connaissances en maths, c'est quelqu'un qui aurait une vue d'ensemble des mathématiques... qui aurait non seulement toutes les bases, bien sûr mais en plus cette vue d'ensemble et qui aurait peut-être fait une recherche sur des points plus précis."

Question 3

Le plus important pour la réussite de la scolarité des élèves sur un plan général

"Quand un élève a des difficultés, *je crois qu'il est fondamental qu'il y ait une coopération entre la famille et l'élève.* Cette coopération est toujours souhaitable, mais quand l'élève s'en sort tout seul, c'est pas trop gênant, tandis que quand l'élève a des ennuis, je crois que là, elle est fondamentale. *Il faut qu'il se sente aidé et soutenu par sa famille"*

Du point de vue de ce qui se passe dans la classe, attitude de l'élève, travail personnel, rapports avec l'enseignant :

"il faut une atmosphère de confiance. Quand on a une atmosphère de confiance, on peut espérer un travail valable. Quand l'atmosphère est tendue, je ne pense pas que ce soit tellement réalisable ... il faut arriver à un certain calme, à une certaine recherche et si on n'arrive pas à le faire on n'a pas le minimum pour effectuer une recherche convenable"

Question 4

D'une manière générale, pas seulement à l'entrée en 6ème, d'où viennent les difficultés des élèves :

"Je crois qu'il y a *un certain rejet de la part des enfants* et à partir de ce moment là, c'est très difficile parce qu'ils ont décidé qu'ils étaient mauvais en maths et finalement *on n'a pas tellement d'impact... Il faudrait essayer de leur faire jouer le jeu* mais c'est pas évident." "Effectivement, *le soutien c'est bien parce qu'en classe, ils se sentent isolés,* il y a des bons élèves qui répondent tout de suite. Il y a une démarche pour l'ensemble des élèves" *"et puis il y a des moments où ils n'écoutent pas... en fait on touche assez peu d'élèves"*

Qu'est-ce qui les fait décider qu'ils ne sont pas bons en maths ?

Il y en a qui n'aiment pas beaucoup, Il y a une question de tempérament qui joue, mais à partir de la 4ème, avant il n'y a pas cette restriction" Je le vois aussi un peu pour mon fils. A partir de 4ème, il y a des démonstrations plus difficiles, plus longues, donc il faut s'investir davantage"

"il faut quand même qu'ils fournissent un travail et quand ils n'ont pas ce travail, même de par coeur pour

apprendre les définitions, pour que ça ne pose pas de difficulté au niveau formel. S'ils refusent ce travail là, on n'arrive pas à faire démarrer"

"Je crois que c'est le manque d'investissement en fait"

Question 5

Ce que doit faire l'élève pour progresser :

"Je lui dirais de refaire les exercices et de poser des questions chaque fois qu'il a des ennuis... Les questions ne sont pas toujours formulées et c'est de là que viennent les ennuis... parce que l'enfant ne peut pas toujours situer où il a des ennuis, s'il formule la question, ça l'oblige à préciser les ennuis et après c'est au professeur de l'aider"

Quand il s'agit de chercher des exercices, ce n'est pas difficile mais *il faut bien cerner l'endroit où l'élève bute"*

"il faut reprendre à intervalles réguliers... quand l'élève a des difficultés laisser, puis reprendre, ça je crois que c'est très important, faire un petit peu par cycles. On oublie, on y revient ... et on peut espérer qu'à la fin de l'année il y a quand même quelque chose d'acquis"

La question "comment écouter pour les élèves ?" est retraduite par "ah oui, comment est-ce qu'ils peuvent avoir une part active?" *"qu'ils essaient de faire le raisonnement en même temps, qu'ils essaient de bien être disponibles* et de bien écouter les questions. Bien souvent, ceux qui sont en difficulté pensent à autre chose, quand ils écoutent, ils arrivent à répondre mais ils écoutent très peu de temps, et comme c'est très fluctuant d'un élève à l'autre, on arrive à ne plus avoir d'impact du tout"

"Un élève une fois m'a dit "au début c'est amusant ce que vous faites, mais après c'est pas amusant du tout". Quand on aborde une notion, on essaie toujours de mettre quelque chose d'amusant ou quelque chose de concret. Au début ça lui plaisait bien, mais après, on est bien obligé de revenir à l'exercice et ça ne lui plaisait pas. C'est vrai que c'est un jeu quand même, il faut accepter les règles"

Comment écouter ?

"Pour écouter, il faut qu'ils restent disponibles, il faut aussi une certaine immobilité, par exemple quand je relis le texte du problème, ils rangent leur trousse, ils n'écoutent pas.

Question 6

Un bon enseignement des mathématiques :

"pour moi, *c'est qu'ils aient assimilé le programme. L'idéal, c'est d'aller un peu au-delà et de leur faire aimer les maths,* ça serait mieux, mais s'ils ont des bases assez solides, c'est déjà pas mal.

Comment faire pour l'obtenir ?

"j'ai tendance à trop faire réciter par coeur, je le sais" "Mettre dans des cadres différents et diversifier les interrogations, ça, je crois que c'est très important, *mettre l'élève dans des conditions différentes, de façon que si l'élève est bloqué, il puisse se rattraper dans une autre série de devoirs. Comme ça, je crois qu'on en récupère beaucoup.* Il y en a qui travaillent au moment du devoir commun, il y en a qui travaillent au moment du "par coeur".

Différences suivant les élèves :

"Oui, bien sûr. *On est là pour voir le programme. Pour un élève qui suit bien, on a tendance à lui demander des choses où c'est plus difficile, où il aura une difficulté supplémentaire. Tandis qu'un élève qui est en difficulté, c'est peut-être d'ailleurs un tort, j'aurais plus tendance à faire ce qui est du pur programme.* Par exemple, il a un découpage qui faisait passer d'un rectangle à un carré, on trouvait qu'ils n'avaient pas la même surface 64 et 65... *Dans une bonne classe, je pense que je le ferais parce que c'est bien, tandis que dans une classe qui est faible, ça leur plairait peut-être mais j'ai peur de tout... de fausser le peu que je pourrais obtenir par quelque chose d'un peu répétitif. Alors c'est vrai que là, il y a un choix et je ne suis pas sûr de faire le bon."*

Avec les élèves faibles, on peut plus facilement obtenir quelque chose par quelque chose de plus répétitif ? Je crois.

Les contraintes : *"Je suis un peu réglé par l'attitude des enfants parce que quand, ça ne leur plaît pas, il faut que je change. Il faut que je m'adapte. C'est eux qui déterminent.*

Question 7

Tous les élèves peuvent -ils acquérir les connaissances de maths du collège ?

"Je crois mais à partir de la 4ème, il faut quand même qu'ils acceptent de travailler davantage. 6ème, 5ème, je crois, parce que vraiment, ce n'est pas très difficile, *mais à partir du moment où on fait des démonstrations, il y a vraiment des élèves qui ont des difficultés et qui se bloquent alors...* il y en a beaucoup qui ont quand même un blocage au niveau des maths, ça vient aussi souvent des parents". Mon fils est allé jusqu'en première S après, il ne voulait plus."

Pour la terminale B : "je crois, si l'élève accepte, c'est un refus de l'élève. J'ai des élèves de 3ème qui ont refusé. Je leur disais : si vous avez des lacunes, ce n'est pas grave. *A la limite, j'ai un rôle plus important s'ils ont des lacunes que s'ils n'en ont pas."*

Questions 8 et 9

Travail en groupes :

"Ils s'expliquent entre eux, ça c'est une partie qui est importante, mais moi, je le gère avec difficultés, je n'ai pas l'habitude de faire travailler des personnes en groupes." "Je l'ai découvert avec ... je le voyais faire, il me disait que ça marchait, j'ai eu envie d'essayer. C'est vrai qu'il y a des classes où ça marche bien, il y a vraiment une collaboration, une progression des élèves, et *je le vois même pour moi à la fac, parce que si je suis tout seul, je ne peux pas y arriver.* Avec un cours peut-être, mais uniquement avec le polycopié je ne peux pas, avec quelqu'un je progresse beaucoup plus. Je me rends compte qu'avec les enfants... ils peuvent avoir la même chose que moi. Avant je ne travaillais pas en groupe, *je n'ai pas tellement un tempérament à travailler avec d'autres."*

Quelles conditions pour que ça marche ?

"Pour que ça marche, *il faut qu'ils soient quand même assez disciplinés* parce que si c'est trop bruyant, à mon avis, on ne peut pas obtenir quelque chose de fructueux. *Il ne faut pas non plus qu'ils soient trop nombreux ou alors c'est difficile à recenser, il faut le refaire après, une synthèse après.* " (Dans la bonne classe) ils étaient nombreux mais ils arrivaient bien à travailler ensemble, je pouvais le faire sans problème, ça marchait bien, on arrivait bien à ce qu'on voulait, aux objectifs prévus. Ça plaisait aux élèves." "Ils ont moins l'impression de travailler que quand ils sont seuls Il ne faut pas le faire trop souvent je crois... enfin, il y a des situations, par exemple la situation des taxis, ça se prête très bien, chacun peut fournir un travail mais il faut bien préparer sa situation !

Pourquoi c'est difficile à gérer :

"pour intervenir dans un groupe et être efficace. Pour que ce soit rentable, je verrais assez donner des problèmes différents dans la classe *mais après, pour faire la synthèse, c'est difficile parce qu'il y en a qui sont obligés d'écouter* ou alors il faut trouver un même genre de difficultés dans plusieurs problèmes parce que sinon, ils restent passifs après, *il y a tout un* *moment où les enfants sont passifs et c'est ça qui me gêne ou alors, tous la même activité et on fait la synthèse après tous ensemble,* mais c'est pareil, il faut qu'ils soient bien disciplinés".

Quel type d'activité est appropriée au travail en groupes ?

"Les découpages de puzzles pour les fractions, c'est très bien pour le travail en groupes parce que seuls, c'est trop long, et à plusieurs, ils des réactions différentes, donc c'est très bien. Les taxis, ça marchait très bien aussi. *Des situations où il y a un petit peu de recherche et où chacun peut s'orienter différemment sans considérer que c'est un échec immédiatement parce qu'on peut vraiment opérer de façons différentes. S'il n'y a qu'une seule solution, il y en a un qui trouve et il l'impose aux autres, ça devient après sélectif, donc c'est au contraire gênant."*

A quelle fréquence, c'est raisonnable ?

"Les taxis par exemple, dans la classe qui était faible, ils ont mis du temps avant de se plonger dans la situation, la première heure, ça a été... il y en a qui n'avaient pratiquement rien fait mais, la deuxième et la troisième fois, ils ont vraiment tous cherché et il leur en est resté quand même pas mal puisque ils ont tous pratiquement reconnu la situation de proportionnalité, et il y en a pas mal qui l'ont formulé correctement dans la classe, alors c'est important". Un type (de situation comme cela) par mois, mais qu'on le fasse pour que ce soit rentable, que tous les élèves s'investissent, même s'il faut perdre une heure... *Ma première heure en 6ème... elle a été... pas perdue, mais disons, il y a deux, trois groupes qui n'avaient pas travaillé mais l'heure d'après, ils s'y sont mis et elle était nécessaire finalement, ils mettaient longtemps avant de démarrer, bon... mais après ils se sont tous investis quand même et, ça, je pense que c'est important.*

Proportion travail individuel - collectif, partie cours

"ça dépend beaucoup du contenu et des élèves, des situations posées".

Question 10

Répartition du temps pour le travail des élèves entre résolution de problèmes, apprentissage de techniques, cours, en classe et à la maison : "En classe, plutôt savoir faire et recherche, partie cours plus rapide. *Les techniques à mon avis, c'est ce qu'il faut donner très très régulièrement, ça prend du temps"* résolution de problèmes 45%, apprentissage de techniques (opérations...) 30%, cours 25%. A la maison cours 25%, reste 75%.

Question 11

Types de problèmes et leur usage. Pour ce professeur, cette question semble déconcertante et cette distinction lui paraît concerner plus les 3ème que les 6ème.

"En 6ème c'est plus mélangé, les exercices sont plus simples.

En 3ème, j'avais une classe pas mauvaise, par exemple, j'ai fait un dossier sur les courbes et à la fin on a fait une synthèse dans l'optique du programme de seconde. Là je ne m'attache plus au programme de 3ème même. *Ce qui m'intéresse, c'est de leur montrer quelques aspects qu'ils vont voir en seconde et qui pourraient, eux, les intéresser.* Des remarques à partir de ce qu'ils m'ont fait, l'exploiter plus à fond".

Question 12

Rôle de la mémoire :

"un rôle important, oui, parce qu'il faut quand même apprendre toutes les définitions et tous les théorèmes. *Je crois que c'est important d'apprendre les points clé des démonstrations pour l'utiliser, sans en être esclave bien sûr, parce qu'après on peut calquer pour voir comment la démonstration est utilisée, comment on reprend le théorème.*

Question 13

Rôle du travail à la maison ;

"Je le considère comme *important parce qu'on voit aussi si la famille considère que c'est important.* Elle lui laisse le temps de le faire. Quand l'enfant fait son travail à la maison, c'est une collaboration entre la famille et l'enseignant. Quand l'élève rentre chez lui et ne fait rien, c'est que la famille n'attribue aucune importance à l'école. Pour ces élèves là, on n'a pas grand impact."

A part, les relations avec la famille, est-ce que c'est important pour l'apprentissage ?

"Je crois aussi, c'est une très bonne discipline, il faut qu'ils puissent s'organiser, il faut donner des problèmes de types différents *de façon à ce qu'ils rencontrent certaines difficultés. Les devoirs à la maison, je les donne plus difficiles et je leur demande de poser des questions, c'est aussi un moyen de contact avec eux.* Ils cherchent de leur côté, posent des questions".

Question : "quel type de devoirs donner à la maison?"

"Je donne ou des devoirs qui sont longs mais faciles, par exemple du dessin en géométrie, les enfants aiment bien, en classe c'est fastidieux parce qu'on prend beaucoup de temps... ou des devoirs plus difficiles qu'on peut démarrer en classe, les laisser chercher à la maison et après ils ont tout le travail de rédaction qui est aussi un travail très long mais *en le guidant en classe (de façon qu'ils n'aient pas les vraies difficultés) parce qu'il ne faut pas que la famille se substitue à l'enfant...* Quand elle se substitue bien, c'est pas grave, ce qu'il faut c'est que l'enfant ait fait le travail en fait. Si elle le fait, c'est mauvais, si elle le fait faire... *ce qu'il faut c'est que l'élève ait franchi une difficulté.* Par exemple, pour un élève, le père lui fait faire des maths mais c'est pour lui montrer que, lui, sait faire des maths, ça c'est une catastrophe pour le gamin. Il arrive en classe, il en a assez parce qu'il en a fait plus qu'on en voulait, il n'a pas fait ce qu'on faisait en classe, donc il n'a même pas la satisfaction d'avoir une bonne note. Le gamin, c'est pas de sa faute, il est bloqué mais ça se comprend" "Ou alors un travail de recherche plus libre, par exemple sur les volumes, ils peuvent rechercher de la documentation."

Question 14

Peut-on enseigner des méthodes de résolution de problèmes

"Jusqu'au brevet, on a quand même des types de problèmes, donc on peut le faire. Plus loin, je n'en sais rien"

Question 15

Place de l'évaluation

"J'ai mes interrogations en général tous les 15 jours, donc je cherche à évaluer ce qu'ils ont compris pendant 15 jours. En fin de trimestre, j'aime bien faire une interrogation plus longue où je recense ce que j'ai fait sur les trimestre, *et puis les interrogations de leçon pure, et, ça, pour les mauvais élèves, ça marche bien... sur 5 points, très rapides, ils me donnent la définition, c'est le "par coeur".... ça peut être une fois par semaine, ça dépend des leçons, je la repose jusqu'à ce qu'ils réussissent... et pour des mauvais élèves, c'est là où ils gagnent des points le plus rapidement... j'arrive à en récupérer comme ça... seulement c'est pas pour autant qu'ils savent l'utiliser... mais c'est mon premier pas."*

"Je cherche à évaluer les connaissances et leur utilisation, sans oublier les mécanismes, j'en mets toujours un peu. *Je m'arrange toujours pour qu'un élève qui a écouté mais qui est un peu fragile ait la moyenne. Il y a quand même 10 points obtenus facilement mais j'aime bien aussi avoir 4 ou 5 points nettement plus difficiles. Entre 16 et 20, il me faut des exercices plus difficiles pour les stimuler, il faut que les bons se heurtent quand même à des difficultés.* Ce qu'il faut, c'est que les élèves jouent le jeu. Par exemple, dans une mauvaise classe, à partir du moment où ils disent non, je ne veux pas le faire ou ça ne m'intéresse pas, mon interrogation tombe à côté".

Question : "l'évaluation joue-t-elle un rôle, positif, ou négatif, dans l'apprentissage des élèves".

"*Je pense qu'en 6ème et 5ème, le rôle est très positif, mais c'est toujours à partir de ces démonstrations de 4ème, 3ème...* De toute façon, pour les leçons, c'est bon, ces petits moyens de contrôle rapides, à partir du moment où il y a des démonstrations, c'est beaucoup plus difficile à cerner. En plus, il y a des élèves qui sont quand même très émotifs, mais il faut les aguerrir aussi."

Pour son compte personnel, l'évaluation joue un rôle stimulant : "à partir du moment où j'ai la date du partiel, je travaille beaucoup plus les 15 jours avant le partiel. Je pense que pour les enfants aussi. Ceci étant dit, je n'aime pas du tout et je réagis très mal, je fais exactement ce que je dis aux élèves de ne pas faire." *"Je regarde mes 6ème en difficulté et je me dis "si j'y arrive, il n'y a pas de raison qu'ils n'y arrivent pas", seulement la grosse différence, c'est que je veux y arriver, et je peine, et je répète, c'est difficile... S'ils voulaient accepter de fournir le travail, je suis sûr qu'ils y arriveraient... C'est vrai que si on a des grosses perturbations, on n'est pas disponible,* et ce sont des gamins qui ont de grosses perturbations ; comment les rendre disponibles, je ne sais pas."

Question 16

Ce qu'il apprécie le plus, ce qu'il essaie de valoriser le plus chez les élèves. *"J'essaie de les rendre à l'aise en classe. Chaque fois qu'ils répondent, j'essaie de mettre en valeur ce qu'ils disent. J'aime bien avoir une atmosphère de confiance entre eux et moi." "J'aime beaucoup les 6ème". "J'aime bien quand il y a un élève qui démarre, un élève qui était bloqué et qui se met à répondre, ça me fait vraiment plaisir."*

Question 17

Pour réduire les difficultés des élèves

"Une classe homogène, c'est plus facile à gérer... Peut-être qu'un soutien, c'est bien, mais en fait, *il faudrait que eux le veuillent,* ce serait la condition idéale... On en arrive toujours là. Il faudrait arriver à les motiver."

Question 18

Les difficultés des élèves à l'entrée en seconde :

"On nous dit qu'on les materne trop. C'est vrai que quand on voit le système d'interrogations au niveau de la seconde où il y a 3 interrogations par trimestre". *Seulement, il faut dire que, nous, c'est l'enseignement obligatoire alors on arrange quand même plus les choses, tandis qu'en seconde, ce sont des élèves qui ont envie de le faire."*

"Cet enseignement est imposé aux enfants, qu'ils n'aient pas envie de travailler, ça ne me choque pas du tout. Seulement, il faut qu'ils comprennent que ça a quand même de l'importance et qu'ils vont apprendre des choses et que ce n'est pas désagréable d'apprendre".

"Tous les élèves viennent au collège, il y en a même qui relèveraient de l'éducation spécialisée. Alors, il y en a qui ne sont pas intéressés. En 6ème et 5ème, ils ne refusent pas nettement en général, tandis qu'en 4ème et 3ème, ils osent prendre position".

Question 19

Pour caractériser les maths :

"l'étude du raisonnement, dans différentes situations, les différentes façons de raisonner dans différentes situations".

Parmi les termes proposés, il retient : "c'est vrai qu'il y a tout un langage très difficile au départ, mais pas en 6ème ou 5ème... des structures. Pour les enfants, beaucoup de calculs et résoudre des problèmes." " ce qui est bien, c'est de faire le lien avec d'autres disciplines. L'histoire de maths, ça pourrait les intéresser aussi, ça les change complètement."

3. LE PROFESSEUR C

L'interview de ce professeur a eu lieu en deux temps : la première partie a été faite en 1988 sur un questionnaire légèrement différent (questionnaire 1 en annexe) et n'a pas été enregistrée – les citations correspondantes ne sont donc pas exactes mais se réfèrent aux notes que nous avons prises ; la deuxième partie a eu lieu en avril 1990 sur les questions qui n'avaient pas été totalement dans le premier questionnaire, elle a été enregistrée. Les réponses ont été regroupées suivant le plan du questionnaire 3 qui avait servi pour les professeurs A et B. Ce qui correspond à la deuxième partie est écrit en caractère `"Courier"`.

Question 1

Attentes à l'entrée au collège.

`Avoir une connaissance du nombre, c'est-à-dire qu'à travers des situations, le nombre avec toutes ses propriétés, cardinal, ordinal, c'est très important je pense. Toutes ses décompositions, ça j'aimerais que ça soit peut-être plus assimilé, c'est-à-dire sentir très vite que 300 c'est plus grand que 250, une notion d'ordre de grandeur. Et puis les nombres, ça va avec mesure. En géométrie, certaines images mentales, une légère initiation à l'habileté manuelle des instruments. Et puis ensuite, plutôt un plaisir du raisonnement, de la logique, de trouver quelque chose... de savoir répondre à des questions...`

`Ce qui leur manque le plus, pour les élèves en difficulté, c'est peut-être pour ça que j'ai commencé par là alors que ce n'est peut-être pas l'essentiel, c'est cette notion de nombre, d'ordre de grandeur, ils auront par exemple une technique opératoire impeccable, ils feront des multiplications extraordinaires mais les virgules disparaîtront parce qu'il n'y a pas l'ordre de grandeur ou bien parce que l'idée du sens de l'opération manque, et ils jongleront avec des choses abstraites qui n'ont pas d'intérêt pour eux, pour moi, ça, c'est le pire.`

Question 2

Avoir des connaissances en maths pour un élève :

- connaître des termes avec les idées sous-jacentes

- des théorèmes outils qu'ils peuvent utiliser pour comprendre quelque chose

- *un bagage assez petit du point de vue objets et théorèmes, plus de la logique, des façons de faire permettant de comprendre, d'agir de répondre à des questions.*

Question 3 bis et 6 bis

La question était différente, elle venait en fin de questionnaire et laissait la possibilité de se placer dans les réponses du côté de l'élève ou du côté de l'enseignant : **De quoi dépend un apprentissage efficace des mathématiques ?**

C'est une question trop ambitieuse...

- de *l'envie d'apprendre* (c'est lié au milieu familial, au professeur, au goût personnel).

- qu'ils aient *le goût de la logique, l'envie de comprendre pourquoi.*

- Un enfant doué et motivé apprendra avec n'importe qui. Pour un autre, *il faut des situations motivantes et à leur niveau ni trop faibles, ni trop fortes. Il ne faut pas trop formaliser. Il faut valoriser les différentes méthodes quand il y en a plusieurs, ne pas croire que si on dit quelque chose, le reste est faux.*

Question 3

Ce qui est le plus important pour la bonne réussite de la scolarité au collège, en prenant tout en compte

Pour l'élève, je voudrais une *qualité d'attention, d'écoute des autres, il y a souvent une très grande bonne volonté, mais très individualiste. C'est un individualisme qui peut être bon dans quelques cas, mais très gênant au niveau de l'apprentissage, surtout avec les méthodes qu'on veut maintenant.* Il faudrait d'abord qu'ils écoutent la question, avant de répondre. Eux, ce qu'ils veulent, c'est répondre sans savoir quelle question est posée. De la même façon, c'est ne pas écouter l'autre, mais quand on pose une question, ils ne s'occupent absolument pas de la réponse du voisin, c'est la leur qui comptera, alors que, *moi, ce que j'aimerais, c'est les 3 méthodes pour qu'on en discute par exemple. C'est normal, c'est à nous à leur apprendre : quand ils ont une idée, essayer de la mettre un petit peu de côté pour comprendre l'idée de l'autre et ensuite juger. Ça, c'est je pense un vrai problème psychologique naturel et normal et dont il faut tenir compte. Quand on travaille en 6ème, il faut les laisser aller au bout de leur idée à eux avant qu'ils puissent écouter celle du voisin, ça, ça me semble de plus en plus important. J'ai un objectif mais je sais que je ne peux l'atteindre qu'en acceptant d'abord de les laisser aller au bout de leur idée, sinon je n'y arriverai pas. C'est une contrainte au sens que si je voulais faire autrement, je ne pourrais pas.*

Question 4

Ce qui manque aux élèves en échec en maths :

Sur le plan psychologique, c'est parfois du désintérêt, souvent un refus par peur de l'échec, par manque de confiance en soi.

La vraie question, c'est celle des enfants faibles qui semblent comprendre au coup par coup et qui, 3 semaines après, ont tout oublié. Je n'ai pas trouvé d'enfant qui ne comprenne pas sur le coup, mais le problème, c'est qu'il n'y a pas d'assimilation, ni de réinvestissement possible. Par exemple, sur les symétries, ils savent tous faire en classe, mais *ils échouent dans un devoir où il n'y a plus de rapport humain avec le professeur. Ils ont peur de l'écrit, ils ont besoin d'avoir quelqu'un à côté d'eux.* Par exemple, dans la correction d'un devoir aujourd'hui, ils ont tous compris sans qu'on fasse la correction, en donnant seulement 2 ou 3 idées. Je ne sais pas si le coup de pouce est psychologique ou mathématique.

Pour les elèves faibles - j'ai un groupe d'élèves faibles en 3ème - il y a le problème des notations. *Les notes sont mauvaises dans un travail écrit où on n'intervient pas alors qu'il y a de la compréhension réelle. Jusqu'au niveau 3ème, avec les élèves qu'on a au collège, ils ont les connaissances et savoir-faire du programme malgré les apparences. Ils en ont au moins une partie, ils les ont mais ils ne peuvent pas le prouver par écrit, seuls en face d'une feuille.*

Question 5

Que doit faire un élève pour progresser en maths ?

En classe : - *écouter de façon active*, savoir ce qu'on demande, bien chercher à comprendre les consignes

- *être actif : qu'ils assimilent eux-mêmes, même si c'est un enseignement traditionnel.* Ils doivent participer à la fabrication des phrases du résumé, à la recherche de l'idée à trouver pour aboutir. C'est la même chose dans le cas d'un travail en groupes ou du bilan collectif.

A la maison, pour les enfants qui ne sont pas aidés, pour les plus faibles et les moyens :

- *reprendre la leçon : l'exemple typique*, avec éventuellement le dessin, et la phrase à retenir (définition, théorème).

- *reprendre les exercices - type* rédigés en commun et placés dans la leçon,

- *refaire des exercices qu'on a déjà cherchés*

- *en chercher de nouveaux.*

Pour les bons élèves, ce qu'on fait en classe suffit. Ils peuvent faire pour le plaisir des exercices d'approfondissement qu'ils choisissent dans le livre ou qui ont été proposés en classe (exercices facultatifs) et venir poser des questions. Il arrive que des élèves faibles le fassent. Il y a aussi des exercices facultatifs pour tout le monde (2 types d'exercices facultatifs).

Qu'est-ce qu'écouter ?

C'est se dire qu'il peut y avoir quelque chose de valable et de totalement différent dans l'idée de l'autre.

Question 6

Critères d'un bon enseignement des maths. Différences suivant les élèves.

Ce que je voudrais dans un enseignement des maths en 1er cycle, ce serait *leur donner le goût de résoudre des problèmes, avoir un esprit logique qui s'étendrait ensuite à la vie pratique*, c'est-à-dire, aimer quand on écoute un discours, quelqu'un qui pose bien ses bases et avance en raisonnant. *J'aimerais qu'ils sachent écouter un discours et critiquer un mauvais discours* ou une mauvaise propagande électorale et en voir une bonne. *J'aimerais leur donner le goût d'une certaine vérité scientifique* qui part de données admises ou non, enfin là le problème c'est de comprendre de quoi on parle, mais qui ensuite a un déroulement logique et non pas arbitraire, et ça, à travers presque n'importe quel programme. *Le programme me semble beaucoup moins* *important que ça.* Par contre, il y a quand même des difficultés et je pense que ça, c'est un rêve qui n'est pas le désir et le plaisir de tous les enfants et je pense que *pour toute une série d'enfants, il faut savoir leur demander des choses qui leur font plaisir, c'est-à-dire par exemple des choses répétitives.* J'ai un exemple d'une élève que j'ai revue, qui était avec moi en 3ème, qui était extrêmement faible. J'ai longuement hésité à la faire passer en seconde, finalement on l'a laissée passer parce qu'elle travaillait beaucoup et je l'ai rencontrée l'année dernière, elle avait été finalement admise en 1ère G, et j'en avais été surpris, même pour une 1ère G, parce que je la trouvais très faible, et elle m'a expliqué qu'en mathématiques, son professeur lui avait dit "laisse tomber la géométrie, tu n'y arriveras jamais, fais des fonctions", et elle m'a dit, "moi, les fonctions, je me régale, j'ai compris, je fais toujours pareil, moi, je suis faite pour faire des choses toujours les mêmes, et ça me fait plaisir", *et pourquoi ne pas admettre que des enfants ont ce plaisir. Je me sentais mal par rapport à tout ce qu'on raconte à l'IREM,* mais cette gamine m'expliquait son plaisir de faire toujours... elle sait étudier une fonction...

Faut-il s'y prendre de manière différente pour enseigner suivant les élèves qu'on a ?

C'est peut-être difficile de le dire si vite parce que c'est toujours facile pour l'extrêmement bon et l'extrêmement mauvais de voir que ce n'est pas pareil, mais alors après, il y a toutes les nuances au milieu, et *peut-être qu'il faut penser à différencier son enseignement* pour essayer, sans avoir décidé à l'avance pour tel et tel quel sera l'exercice qui lui plaît, par exemple *les exercices un peu répétitifs, il ne faut peut-être pas en abuser, mais dans une classe un peu hétérogène, il en faut, un peu plus pour certains, mais dans l'ensemble, ils se jugent très bien, les enfants.* C'est-à-dire que, moi, quand je fais des TD, des révisions, je mets toute une série d'exercices au tableau, je mets des étoiles suivant mon idée de difficulté et je les laisse faire ce qu'ils veulent, et, dans l'ensemble, chacun fait bien ce que j'attends de lui. Celui qui doit faire des "première étoile" reste dans la "première étoile" jusqu'au plaisir de réussir. Quelques-uns en veulent peut-être un peu trop mais je les laisse faire dans ce cas là."

Question : Est-ce parce que vous les connaissez bien ?

"J'ai l'impression qu'ils se connaissent bien. Je suis rarement surpris, mais quand c'est le cas, je me tais. *En général, l'enfant un peu faible préfère refaire l'exercice et en refaire un deuxième pareil et un troisième pareil parce qu'il se rend bien compte qu'il n'a pas bien saisi de la première façon ou parce qu'il a un certain plaisir, et il faut leur laisser ce plaisir de faire un exercice presque de trop, un quatrième alors que le 3ème est parfaitement compris pour avoir ce plaisir de se dire "ouf, ça y est, j'ai dominé".*

Question : Pensez-vous que l'envie de répéter vient des enfants?

Oui, je le remarque de plus en plus et *j'ai peur que notre enseignement actuel oublie ces enfants là.* J'y pense de plus en plus. *Quelquefois, j'aimerais faire un enseignement "intelligent" : une fois qu'on a factorisé 3 fois, on en a marre et ils n'ont plus qu'à continuer chez eux pour y arriver. Eh bien, non, il faut savoir que pour eux...*

Question : Ça dépend des enfants, donc ? Y-en-a-t-il d'autres que ça ennuie de faire des choses répétitives ?

Oui, je pense. Ceux-là, il faut essayer de leur proposer autre chose. Mais j'arrive assez à les différencier.

Q : Est-ce que ça coïncide avec les élèves forts ou faibles ?

En gros, cela correspond avec le jugement qu'ils ont sur eux-mêmes, forts ou faibles. *Peut-être que quand je donne ces exercices là, il y a l'enfant faible qui le fera l'un par par sécurité et par plaisir, l'autre peut-être un peu par devoir ; parce que c'est vrai que parmi les enfants faibles, il y a tous les enfants très intuitifs qui aimeraient faire des choses difficiles et qui ne s'en sortent pas. Ceux-là veulent parfois se lancer dans la difficulté.* On les laisse, quitte à leur rappeler de temps en temps de refaire un peu d'entraînement. C'est vrai qu'il y a des enfants faibles qui n'aiment pas la répétition. Je pensais tout à l'heure aux enfants faibles et "gentils" qui voudraient réussir scolairement, qui ont du mal et qui ont le plaisir de réussir avec un enseignement répétitif. Mais c'est vrai qu'il y en a d'autres types.

Q : Et chez les forts, n'y a-t-il pas aussi les 2 types ?

Oui, c'est moi qui pousse à avancer ceux qui voudraient rester un peu sécurisés, mais c'est vrai.

Question 7

Tous les élèves peuvent-ils acquérir les notions au programme jusqu'en 3ème ?

Oui, *ils sont capables de les acquérir, mais pas de le prouver par écrit.* Ces connaissances sont utilisables quand on les aide, et dans la vie, on est rarement tout seul. Au niveau de la formulation, il faudrait qu'on s'y prenne autrement, mais je ne sais pas comment, je suis assez désemparé face à ce problème. *L'esprit des nouveaux programmes est mieux : on peut espérer que les élèves auront acquis des choses de façon plus certaine, mais je ne pense pas qu'il y aura de miracle au niveau des problèmes écrits que les élèves doivent aborder seuls.*

Jusqu'en Terminale B ?

Je ne crois pas. Il y a des enfants qui s'essouflent en 3ème, qu'il faut porter à bout de bras, je crois qu'il faut leur ficher la paix. *Quand on lit le programme de seconde, ça paraît possible, mais quand on voit ce que font les collègues, ça ne paraît plus possible.* Quand même, en terminale, non.

Question 8

Le travail en groupes peut améliorer les résultats sur

- **un exercice cherché en groupes :** oui, parce qu'à plusieurs, on a davantage d'idées
- **sur l'apprentissage individuel :** *oui, parce que, même si c'est un autre qui a trouvé, il est bon de comprendre le cheminement de l'autre, de voir penser quelqu'un qui trouve tâtonner, se tromper. Quelqu'un qui n'a pas d'idée peut voir comment on cherche. Il y a peut-être un risque : celui d'avoir besoin d'un dialogue pour penser. A côté du travail en groupes, il faut donc du travail individuel.* En rédaction, on a du bon travail de groupe dans une classe faible : en groupe, ils arrivent à un résultat parfait alors qu'ils n'y arrivent pas

tout seuls ni avant, ni après. Peut-être voient-ils plus facilement les fautes de raisonnement des autres que les leurs. Ou alors, ils se concentrent plus à cause de l'émulation.

Question 9

Utilisation du travail en groupes :

Je n'ai pas d'idées très a priori, je le fais d'une façon presque intuitive, je n'ai pas de théorie. En gros, quand on fait ce qu'on appelle maintenant les activités mais que j'ai toujours fait, c'est-à-dire *quand on fait un démarrage de leçon, je suis tout à fait pour le travail en groupes à condition qu'il y ait quand même toujours un petit moment de réflexion personnelle pour au moins comprendre la question seul. J'y tiens beaucoup et je crois que si j'y tiens beaucoup depuis peu de temps, c'est parce que j'ai vu que les enfants y tenaient beaucoup.* Il y a quelques années, quand je lançais une activité de groupe, je disais simplement "allez-y" et j'ai réalisé que certains enfants étaient frustrés parce que "allez-y", c'était l'un des 3 ou des 4 qui y allait et l'autre qui n'avait même pas encore compris la question devait suivre. Maintenant, ils font ce qu'ils veulent mais ils savent que *le plus lent, qui n'est pas forcément le moins bon,* a tout le temps pour comprendre la question avant de se mettre à échanger ses idées. Et ça, je l'ai réalisé un peu lentement moi-aussi. *Ça me semble très important. Leur laisser le temps de comprendre ou de poser la question sur ce qu'ils n'ont pas compris.* Moi, en particulier, je me fais le même reproche que pour le travail en groupes. Trop souvent, je pose la question et il faut qu'ils l'aient comprise. J'ai la réponse d'un autre et je ne garantis pas qu'il y ait eu ce temps d'évocation mentale, comme on dit, où l'enfant doit avoir compris la question pour répondre. J'y fais de plus en plus attention.

Question : Le travail en groupes est-il plus efficace avec des groupes à peu près homogènes ou hétérogènes ?

J'aime mieux des groupes homogènes, parce que d'abord, ils ont confiance l'un dans l'autre, donc il n'y a pas de problème de complexes ou de laisser faire le plus fort. Ils vont au même rythme, ce qui fait que chacun bénéficie de la petite idée de l'autre parce que c'est juste à sa portée. Dans des groupes hétérogènes, je le fais quelquefois, un peu pour encourager dans ce cas là, il y a vraiment 2 rôles : celui qui donne les idées et celui qui va faire les opérations, le dessin ou autre, et cela, je n'aime pas beaucoup. C'est trop risqué. Quand je fais des groupes hétérogènes, c'est tout à fait autre chose. C'est des groupes acceptés, l'un venant aider l'autre, mais c'est fait pour ça. Je l'ai fait assez souvent, par exemple à l'occasion d'une correction de devoir. Je n'aime pas la correction de devoir type, donc j'explique 2 ou 3 erreurs, et les élèves corrigent vite leur devoir, et suivant les fois, soit ils font un exercice supplémentaire, soit ils vont aider à la demande un élève moyen ou faible. Et c'est vraiment le moyen ou faible qui se choisit l'enfant qu'il veut pour l'aider. Et, dans l'ensemble, ça se passe très bien et j'ai rarement vu l'enfant dicter, mais faire vraiment tout ce qu'il fallait pour que l'autre comprenne. C'est plutôt de ce point de vue que je travaille avec des groupes hétérogènes, autrement je préfère qu'ils soient plutôt du même niveau. En fait j'interviens rarement, *les groupes se font naturellement de manière homogène.*

Questions 10 et 11

Quelle partie du temps faut-il consacrer à la résolution de problèmes ou d'exercices en classe ?

En classe, je mêle le cours et les exercices. Je distinguerais plutôt la partie recherche (individuelle, par groupes ou collective) qui aboutit à quelque chose de nouveau mis au point collectivement, de la partie application.

Je fais le cours en questions-réponses. Le cours commence en général par un problème individuel ou en groupes avec mises au point périodiques puis mise au point collective. Mais certains cours sont faits directement de façon collective. Des exercices font partie intégrante du cours. Le cours avec ces exercices prennent moins de la moitié du temps, moins en 6ème et cela va en augmentant, disons de 1/4 à 1/2 de la 6ème à la 3ème. Les exercices d'application ou de réinvestissement occupent le reste du temps.

Question 12

Rôle de la mémoire

Pas un rôle important : *quand on quitte la classe, on doit tout savoir, mais certains ont besoin d'apprendre. Pour certains, il y a un problème de mémoire mais peut-être parce qu'il n'y a pas d'assimilation réelle. La mémoire peut peut-être pallier un peu, mais peut-être qu'on ne peut pas retenir ce qu'on n'a pas compris.* Il y a aussi le problème de ceux qui savent, par exemple $(a+b)^2 =$ et qui ne savent pas l'appliquer. Il faut la compréhension. La mémoire peut jouer un rôle pour soulager, mais *normalement, jusqu'en 3ème, la répétition en classe devrait suffire sans qu'on soit obligé d'apprendre.*

Question 13

Le travail à la maison :

Je donne des exercices d'application courts 3 fois par semaine. En 4ème et 3ème, un devoir de type brevet toutes les 3 semaines, à faire en 15 jours, en posant des questions, avec des questions hors barème et facultatives. Je donne en plus des problèmes facultatifs à partir de questions soulevées en classe.

Rôle du travail à la maison

Ça, c'est mon problème parce que je sens qu'il en faut, et peut-être de plus en plus. *Il y a quelques années, je n'exigeais pas qu'on apprenne ses leçons de maths,* il me semblait que les enfants, le lendemain ou le surlendemain savaient de quelle question on avait parlé, connaissaient l'unique théorème étudié et qu'on pouvait démarrer là-dessus. *Et depuis quelques années, est-ce moi qui suis plus exigeant ou est-ce les enfants qui ont changé, si je ne leur demande pas d'apprendre, ils ne savent même plus le titre de la leçon qui a eu lieu 2 jours avant.*

Question : Est-ce lié aux nouveaux programmes ?

Ah, non, c'est sûrement depuis plus de 4 ans. C'est une chose à dire parce que les parents ne sont pas habitués non plus et, aux parents qui viennent, il faut expliquer qu'en CM2, ils apprenaient une leçon d'histoire ou autre, mais jamais une leçon de maths, il faut que je leur explique qu'une leçon de maths s'apprend. *Ce que j'appelle apprendre une leçon de maths, c'est un peu compliqué. Je leur demande d'ouvrir leur cahier de cours et de relire* *ce que j'appelle l'exemple typique et quand par hasard, il y a une petite phrase à retenir... En sixième en particulier, ce qu'on a dans le cours, c'est des exemples type, et il faut qu'ils se souviennent de la méthode pour le refaire.* Et ça, il faut le demander de plus en plus.

Donc, il y a l'apprentissage des leçons, *et, au point de vue exercices, j'en donne assez régulièrement, des très courts, d'un cours à l'autre.* Par exemple, en 4ème et 3ème j'alterne algèbre et géométrie pour qu'ils aient les exercices à 2 jours d'espace pour la guitare et compagnie... et dans l'ensemble, je les corrige très rapidement. *J'ai une assez grande autorité je crois qui fait qu'il suffit que je jette un coup d'œil sur les cahiers pas régulièrement et c'est vraiment toujours fait.* Quand par hasard il y en a, ça va si mal que ça ne se reproduit pas.

Q : Et des devoirs à rendre ?

En 6ème, pratiquement pas. On y a renoncé parce qu'on travaille en groupes de niveau et on s'est mis d'accord : *on fait un contrôle commun tous les 15 jours en classe et on estime que le devoir à la maison n'est pas très significatif, parce que les parents savent le faire. En 3ème, ils ne savent plus, alors...*

Q : Le devoir à la maison vient progressivement au cours de la scolarité ?

La rédaction se fait dans le devoir commun en classe, et aussi dans les exercices : je veux des exercices rédigés. Des devoirs à rendre, j'en fais peut-être un par trimestre en 6ème, alors de plus en plus, en 3ème et 4ème un gros devoir genre brevet tous les 15 jours, 3 semaines. Le devoir à la maison, j'y crois de moins en moins surtout en 6ème, dans la mesure où les parents pensent que ça a beaucoup de valeur et le font entièrement, tandis que, je ne sais pas pourquoi, l'exercice sur le cahier, ils le font de façon beaucoup plus personnelle. Et, en 4ème 3ème, on a le même risque de recopiage et de petits professeurs de cours particuliers, mais il y a quelques élèves, et c'est pour ceux-là que je le fais, qui y travaillent avec beaucoup de profondeur, c'est-à-dire qu'ils y mettent plusieurs jours, viennent me voir entre temps, ou vont voir un camarade, et alors, là, je trouve cela très valable. Ce devoir, c'est un devoir de synthèse qui permet à chacun de voir où il en est, par rapport au devoir de contrôle commun qui va toujours trop vite pour les trois quarts.

Q : Les élèves en difficulté, en particulier de milieu défavorisé font-ils régulièrement les devoirs à la maison ?

J'ai de la chance, je n'ai pas un milieu défavorisé, et je crois que par le fait qu'il y en ait peu, les quelques-uns font comme les autres, s'intègrent, donc ils font leur travail à la maison. Il faut dire aussi que je suis vraiment très très exigeant. Ils savent que si j'ai demandé le devoir pour le jeudi à 10 heures, je vais le corriger le jeudi après-midi, et donc ils ne peuvent pas me trouver la moindre excuse pour le rendre le vendredi. Ils connaissent mes habitudes. Un ou deux essaient une fois ou deux et après c'est fini. Je n'ai jamais d'ennui avec les devoirs.

Question 14

Enseignement de méthodes

J'essaie parfois :

- par exemple, *décortiquer un problème, écrire la conclusion en bas du tableau, remonter toutes les façons d'aboutir, les voies de garage,* si on n'a pas deviné à l'avance pourquoi c'était une voie de garage.

- *des méthodes pour lire un texte* : par exemple en 6ème, quand on dit "construire le symétrique A' du point A par rapport à D, il faut lire à l'envers : s'occuper de la droite puis du point A, puis de A'. *En maths, il faut souvent progresser à l'envers du sens de lecture* : les enfants ont tendance à placer d'abord A'. Un des gros problèmes des 6ème et 5ème c'est la lecture des textes, et de suivre les consignes. C'est la différence entre les consignes orales et écrites, le collectif et l'individuel.

Question 15

L'évaluation :

- Nous donnons des contrôles communs à toutes les classes tous les 15 jours en 6ème, toutes les 4 ou 5 semaines en 3ème. Ils comportent surtout des exercices d'application directe plus quelques questions de réinvestissement de savoir-faire, par exemple pour la symétrie, utilisation dans un contexte différent de ce qui a été fait en classe.

- quelques interrogations écrites de quelques minutes, par exemple réciter un théorème ou un exercice d'application très immédiate

- en 3ème un devoir court en classe tous les 15 jours.

Ce qu'on cherche à évaluer dans les contrôles communs :

- la compréhension du problème,

- la clarté du raisonnement, de la présentation.

Il faudrait aussi évaluer la capacité à trouver une solution à un problème moins banal. C'est à mettre en valeur, mais en fait, on ne l'évalue pas en note. Je l'encourage, j'aime la rencontrer.

Rôle de l'évaluation (positif ou négatif)

De toute façon, *pour les enfants, les notes comptent beaucoup. Et, j'essaie, moi au contraire, et j'y arrive en partie, de leur donner le plaisir de faire des choses hors note,* en particulier tout ce qu'on appelle les activités maintenant, et ils jouent bien le jeu, ils savent que ça ne sera pas noté, qu'il y aura ce que j'appelle une note de participation dans le trimestre. *Toutes ces heures d'activité ne contiennent qu'une note pas très rigoureuse. Je trouve qu'ils travaillent tout aussi bien, qu'il y ait note ou pas note.*

Q : Comment faites-vous pour qu'ils travaillent hors note ?

Je crois que c'est une certaine présence en classe qui exige. Je suis toujours là derrière eux. Il ne serait pas pensable de ne pas travailler. Je crois qu'il y a une espèce de contrat de classe où il n'est pas pensable qu'on ne travaille pas. J'ai l'impression que c'est un problème entre eux et moi et je ne sais pas l'analyser. *C'est tellement évident pour moi que je crois qu'ils ne peuvent pas ne pas travailler.*

Q : Vous séparez l'apprentissage de l'évaluation ?

Oui, mais j'y reviens, ils aiment l'évaluation, et quelquefois, quand on vient de faire un contrôle commun, ils aiment, et *quelquefois je le rends même avec une certaine solennité,* c'est-à-dire que je le rends des plus faibles aux plus forts, alors ils ont ce plaisir d'attendre leur note. Je ne mets pas de classement ou autre mais ils savent que plus ils l'ont tard, et mieux c'est. Je donne les barêmes et ils viennent, avec bon esprit, me voir quand il leur manque un point ou deux et ils ont en général raison, ça leur donne l'occasion de bien écouter la correction d'ailleurs. Je leur dis "il m'arrive de me tromper, vous écoutez bien". C'est rare qu'ils viennent en se trompant. Il y en a qui vont trop loin sur la note : j'en ai un excellent qui avait 21, j'ai mis 20, il voulait son 1 pour la note d'après, j'ai dit non, *il faut savoir travailler pour la gloire. J'essaie de leur apprendre ça.* Dans les exercices facultatifs à la fin d'un contrôle, c'est souvent que je dis, vous le faites pour la gloire, je ne mettrai pas un point de plus. D'abord si je mets 1 point de plus, ils vont se dépêcher de faire celui-là. Et puis, ils se jugent bien, ceux qui font l'exercice facultatif, c'est ceux qui ont déjà bien réussi le devoir et *ils le font pour le plaisir que je marque TB, que je dise tout haut qu'il a réussi. Mais, c'est quand même une évaluation, cette évaluation sans note* parce que ils sont très malheureux si je reste un moment sans regarder leur cahier, *c'est une évaluation quand même, c'est un jugement du professeur, et ça, ils en ont un besoin absolu.* Par exemple, quand je leur demande de corriger les devoirs, au début de l'année, je m'astreins à relever tous les devoirs et à les recorriger à nouveau et je mets des +1 ou -1 et puis je reconnais qu'à chaque fois, au bout de l'année, je ralentis un petit peu, et ils me le réclament. Je me sens donc obligé de le faire. Certains passeraient des heures pour avoir +1, d'autres veulent simplement que je l'aie vu. *J'en joue de ça : en particulier, les 6ème, je note leur cahier très régulièrement tous les 15 jours pendant le contrôle et s'ils font des exercices supplémentaires, ils ont une meilleure note, ils sont contents que je voie ces exercices supplémentaires. C'est un jeu entre nous, mais un jeu payé par une note.*

Question 16

Ce qu'il apprécie le plus chez ses élèves :

Ce que je n'évalue pas : les idées, mais il y a un contrat de classe qui fait que les élèves savent que c'est ça qui compte, même si ça n'est pas évalué par des notes.

- la bonne participation, le fait d'être actif,

- qu'ils s'écoutent l'un l'autre

- qu'ils sachent admettre, rectifier, améliorer les idées des autres

- qu'ils puissent transposer sur l'ensemble de la classe ce qu'ils arrivent à faire en groupes.

Ce qu'il essaie de valoriser le plus :

- qu'ils trouvent des idées

- qu'ils écoutent et qu'ils comprennent les idées des autres

- qu'ils justifient en s'appuyant sur ce qui a été fait et dit : qu'ils aient une progression logique.

Question 17

Types d'action pour réduire les difficultés en mathématiques des élèves au collège.

Je pense quand même qu'un travail en petits groupes devrait aider. En soutien.

Q : Des heures en plus ?

Oui, des heures en plus, ou alors, *nous on travaille, et je trouve cela efficace, par groupes de niveau, le groupe le plus faible étant très réduit par rapport aux autres groupes.* On travaille par groupes de niveau en 6ème et 3ème, pas dans les autres classes. On a les deux styles. Les deux me conviennent, on a raté des groupes de niveau en 5ème mais on ne reconduit pas parce que là, ça a fait vraiment la ségrégation, ça ne s'est pas bien passé du tout, ils se sont senti mis à part parce que tous allaient être orientés en CAP *et ça n'a vraiment pas bien marché. Tandis que dans la plupart des autres classes, j'ai souvent eu des groupes faibles, ils aiment être dans le groupe faible parce qu'ils se sentent maternés, ils en ont assez d'avoir toujours les autres qui répondent à leur place et ils se sentent bien. C'est un fait que peut-être en plus, on est un tout petit peu plus indulgents.* On a beau faire des devoirs en commun, peut-être que la correction n'est pas tout à fait la même. On fait des changements, et quand on fait "descendre" un enfant, c'est bien rare qu'il le prenne mal. D'ailleurs, ça se passe en accord avec l'enfant.

Q : Comment s'explique cette différence en 5ème ? Est-ce à cause de l'orientation ?

Il y a le problème de l'orientation, et puis la 5ème est actuellement la classe la plus difficile. On m'a dit que c'est l'adolescence qui commence plus jeune, avant c'était la 4ème.

Q : l'orientation est minime maintenant en 5ème.

Il y en a encore, les 10 ou 12 qu'on renvoie, c'est ça qui arrange la 4ème.

Q : L'orientation se fait vers la 4ème techno ?

Chez nous on en envoie encore 10 ou 15 en CAP ; ces 10 en moins en 4ème font qu'en 4ème on n'a plus de problème.

Q : Ce sont ces enfants qui se trouvent ensemble dans le groupe faible en 5ème ?

La seule fois où on a fait des groupes de niveau en 5ème, c'est ce qui s'est produit. C'étaient *des enfants qui avaient des vraies difficultés sociales, psychologiques et scolaires - mais en dernier si on peut dire. Dans ce cas là, je ne crois pas aux groupes de niveau. Nous, les groupes de niveau, on essaie d'y mettre des élèves faibles qui veulent s'en sortir, et d'autres qui sont presque aussi faibles, on les garde dans le groupe des moyens par exemple.*

Q : Vous avez combien de classes ?

Cette année, en 3ème, on a 4 classes en 4 groupes, mais souvent on a 5 classes, on fait 3 classes, 3 groupes, 2 classes, 2 groupes. La question de faire 5 niveaux ne se pose pas puisqu'on n'est que 4 professeurs.

Q : Est-ce que les mêmes élèves faibles se retrouvent dans toutes les matières ?

Il n'y a que les maths qui font des groupes de niveau.

Q : A part cela, les classes sont hétérogènes ?

Oui, c'est tout à fait différent des classes faibles. Ils acceptent d'être faibles dans une matière, sachant de plus qu'ils pourront changer de groupe, et le choix est discuté avec eux. En fait, je ne sais pas si nous avons trop d'autorité ou s'ils sont lucides mais c'est rare qu'il y ait désaccord. En général, c'est quand nous hésitons qu'on laisse le choix. Dans le cas où on n'hésite pas, on n'a jamais eu de désaccord de l'enfant.

Question 21

Que pensez-vous des groupes de niveau ?

Nous en sommes contents dans l'établissement, nous avons 4 niveaux avec 18 pour les plus faibles, 23, 28, et 32 pour les plus forts :

- *les enfants se sentent plus à l'aise pour participer dans tous les groupes et particulièrement les moyens.*

- *chaque enfant pense que l'enseignement lui est plus adapté* : les répétitions sont mieux adaptées.

- ça permet à tous les professeurs de faire le programme, puisqu'on a l'obligation d'avoir une progression commune.

- les élèves sont mieux dans leur peau, même si on ne sait pas s'ils progressent mieux.

- *les plus faibles ont mieux acquis, même si ça ne se voit pas dans les notes..*

Question 18

D'où viennent les difficultés des élèves en 2nde ? Que faire pour y remédier ?

Je pense quand même que les professeurs de 2nde ne s'adaptent pas à eux. Les enfants sont surpris par un cours très théorique qui n'a pas de chair, si on peut dire. Je vois quand des anciens élèves viennent me voir. Quand ils me disent qu'ils n'ont rien compris et me montrent leur cours, je comprends bien. Ça commence "I définition, le barycentre..." Ils en sont malades et du coup, ils font des fautes monstrueuses qu'ils ne faisaient pas en 3ème.

C'est présenté de façon trop théorique, peut-être sans doute - et ce n'est pas la faute du professeur - trop rapide. Peut-être aussi - je ne sais pas si c'est un défaut ou non - on doit, nous, les materner un peu, et là, ils ne le sont plus. C'est-à-dire qu'on ne leur rappelle pas là qu'il faut apprendre une leçon, et j'ai entendu des élèves me raconter qu'ils ont passé un trimestre ravis parce qu'ils n'étaient pas enguirlandés comme ils l'étaient chez moi, et puis à la fin du trimestre, ils ont eu "insuffisant, aucun travail" et ils sont tombés des nues parce que le professeur ne leur avait jamais rien reproché.

On les prévient, mais, des parents me l'ont raconté et je le crois, *on fait peur à ceux à qui il ne faudrait pas faire peur, alors ils y vont tremblants et c'est ceux qui vont tout faire de toute façon, ceux là, on les complexe trop. Et, les autres, on aura beau leur raconter, c'est peine perdue. Ce qui fait que je ne sais plus s'il faut que je les alarme ou pas. Maintenant, j'essaie de nuancer, mais il y a ce saut, qu'ils sont moins suivis. Il y a aussi des parents qui lâchent, qui, jusqu'en 4ème -3ème y arrivent encore, et qui, arrivant en 2nde, ils sont un peu débordés au point de vue de l'enseignement peut-être ou qui estiment que l'enfant est assez grand et à mon avis, ce n'est sans doute pas le moment de lâcher.*

Question 19

Pour caractériser les mathématiques :

des outils pour résoudre des problèmes

Question 20

Qu'est-ce que les nouveaux programmes changent dans l'attitude des professeurs et des élèves (y compris par rapport à l'évaluation) ? (réponse fournie par écrit)

Pour beaucoup (?) de professeurs, *les nouveaux programmes apportent un grand soulagement : enfin ! on a à enseigner des notions et à utiliser des méthodes adaptées à des enfants de 11 à 15 ans.* Cette attitude est très nette chez des profs ayant "subi" les programmes de 1969 ; les nouveaux programmes et commentaires sont en adéquation avec ce qu'ils ont souvent fait en franc-tireurs jusque là.

D'autres professeurs (les mêmes aussi) sont un peu las des changements (69, 77, 86, sans parler des demi-changements en 73 et 81 avec de nouvelles éditions de livres) et cette lassitude les freine pour envisager des changements profonds : *proposer des activités qui permettront non seulement la motivation mais l'élaboration du savoir.*

D'autres encore, peut-être beaucoup, subissent ce changement sans trop en chercher l'esprit et *par "confort" modifient au minimum* (cette expression est soulignée dans le texte) ce qu'ils faisaient jusque là, comme ils avaient peu modifié en 69, 77...

Remarques ajoutées en fin de 2ème interview :

Pour les élèves en difficulté, il y a deux cas :

le bon petit élève qui veut réussir, si on l'encourage, il arrivera à un certain niveau. Il ne faut pas rêver trop haut pour lui, mais pas trop bas non plus ;

pour l'élève complètement déscolarisé, je ne sais pas ce qu'on peut faire.

Souvent, on voit chez les élèves un fil directeur qu'on ne comprend pas. Je leur dis que ce n'est pas ridicule.

On bloque des enfants. Ils restent bloqués sur quelque chose qu'ils n'ont pas compris, donc ils ne peuvent pas écouter la suite. Il faut le voir tout de suite parce qu'ils ne peuvent pas toujours expliquer ce qui ne va pas.

4. LE PROFESSEUR D

L'interview de ce professeur a eu lieu en deux temps : la première partie a été faite en 1988 sur un questionnaire légèrement différent (questionnaire 1 en annexe) et n'a pas été enregistrée – les citations correspondantes ne sont donc pas exactes mais se réfèrent aux notes que nous avons prises ; la deuxième partie a eu lieu en avril 1990 sur les questions qui n'avaient pas été totalement dans le premier questionnaire, elle a été enregistrée. Les réponses ont été regroupées suivant le plan du questionnaire 3 qui avait servi pour les professeurs A et B. Les extraits correspondant au deuxième entretien sont en caractère "courier"

Question 1

Attentes à l'entrée au collège.

"Ce que j'attends de l'école primaire, c'est un petit peu de contenu, pas beaucoup en fait, plutôt des règles sur les opérations élémentaires, un petit peu de géométrie, mais élémentaire et surtout ce qu'on peut appeler des méthodes... *c'est-à-dire au niveau des opérations, du sens des opérations, pouvoir dire si telle opération* *semble pertinente ou fausse dans telle ou telle situation, plus que trouver, avoir des moyens de contrôle sur ce qu'on n'a pas su faire,* ...et si on sait faire c'est encore mieux. En géométrie, pareil, ça serait... par exemple pour les perpendiculaires, *voir rapidement quand c'est vraiment net qu'il y a pas deux droites perpendiculaires, même si on a du mal à les tracer, c'est-à-dire visuellement avoir le contrôle de ce qu'on pourra essayer de revoir après... pour qu'on puisse s'appuyer dessus.* Puisque ça va être revu au niveau des méthodes, c'est qu'on puisse dire : là ça ne va pas... *Les élèves qui ont du mal à voir qu'un angle dépasse l'angle droit ou est plus petit que l'angle droit, quand c'est assez net, c'est ce qui me gênerait le plus.* Pour l'algèbre c'est plutôt comprendre que tel type d'opération, ça a vraiment pas de sens dans ce type de problème, et *évaluer, pas l'ordre de grandeur du résultat, mais l'ordre de grandeur d'un mauvais résultat. Sur la proportionnalité, c'est plus net, par exemple comprendre que tel résultat ne peut pas aller avec tel autre puisqu'on attend plus ou moins... savoir repérer assez vite qu'un nombre se situe entre deux autres... toujours dans le but des contrôles...* l'idée ce serait je crois d'arriver à prévoir à peu près les résultats, que ce soit dans les tracés géométriques ou dans les calculs de manière à vite savoir si ça a l'air cohérent ou pas. Un minimum de règles pratiques mais pas tellement élaborées...

Question 2

Avoir des connaissances en maths pour un élève :

- pouvoir assimiler un certain nombre de choses (en termes de mémoire, de retenue de certaines notions, d'aptitude à mobiliser certaines connaissances pour résoudre des problèmes).

- il y a aussi un aspect reproduction de règles (dépassant les maths) , un peu social, application de règles faisant partie d'un groupe de connaissances à avoir.

Avoir des connaissances en maths pour un professeur :

Il faut en plus un esprit, une forme d'esprit de logique, *peut-être un tempérament, l'idée d'avoir envie de jouer avec des connaissances sans que ce soit tout le temps dans un objectif de servir à quelque chose* (comme la musique ou un art quelconque).

Questions 3 bis et 6 bis

De quoi dépend un apprentissage efficace des mathématiques ?

- ça dépend du temps qu'on a, des conditions matérielles, humaines, le groupe classe, l'emploi du temps (les heures en fin de journée par exemple).

- la qualité des situations d'apprentissage est en rapport avec ce que les élèves savent déjà et ce qu'ils semblent devoir pouvoir comprendre a priori,

- de l'envie de jouer à faire cet apprentissage, c'est très important,

- de la relation avec le professeur, que tout le monde ait envie.

Question 3

Le plus important pour la bonne réussite des élèves au collège.

"Il y a *l'attention qui est importante, mais en même temps, comme elle est liée à la manière dont on enseigne, c'est un peu difficile de dire attention suffisante, comme ça. On ne peut pas attendre que les élèves soient attentifs pendant une période longue s'il n'y a pas des centres d'intérêt, des moments...* un peu comme dans un morceau de musique, il y a des temps forts, des temps un peu plus faibles, il ne faut pas que ça soit d'une manière linéaire, *il faut savoir finalement sur quoi on veut qu'ils soient attentifs.*

Il y a un cumul de beaucoup de choses. L'attention, ça me paraît évident. *Un petit peu la répitition de certaines choses pour fixer des petites règles pratiques pour qu'on puisse vraiment s'en servir d'une manière réflexe...* l'apprentissage des leçons, pas spécialement dans le sens où on l'entend traditionnellement parce que, comme souvent c'est plutôt un travail de mémoire qui n'est pas spécifique aux mathématiques. Il faut certainement le faire, mais, si les leçons c'est la mémoire, c'est pas ce qui est le plus important pour la réussite au collège."

Sur un plan général.

Je crois que la réussite au collège dépend de la façon dont un élève s'investit, c'est-à-dire, soit il considère ce qu'il fait comme un jeu auquel il a envie de jouer, avec plus ou moins d'intensité, et alors il peut avoir des attitudes critiques, il peut recevoir des choses comme des outils qui vont lui permettre de régler une autre situation parce qu'il a envie de s'investir dedans, il donne du sens aux choses qu'il fait, ou alors, il ne rentre pas dans ce jeu là, et il est pour ainsi dire hors circuit. Il peut éventuellement, s'il est très sérieux, apprendre par cœur en attendant qu'il rentre dans ce jeu là, mais en fait, c'est assez difficile et c'est assez désordonné, ou alors le plus souvent, il se laisse carrément aller, il est carrément hors jeu dans le groupe, dans le groupe scolaire et dans le travail qu'il peut faire.

Question 4

Ce qui manque aux élèves en échec en maths :

Il y a plusieurs choses :

- le manque d'envie, de motivations,

- il y a un processus d'engrenage : dès qu'il y a un échec, ça se reproduit facilement.

- une trop grande vitesse de la part de l'enseignant, un manque d'adaptation à l'enfant

- l'enfant manque de temps, qu'on veuille aller trop vite ou non.

Question 5

Ce que doit faire l'élève pour progresser :

- faire attention (mais la motivation va avec)

- tout le côté travail, reproduction de travail, relier les exercices au cours, donner le plus possible un sens (mais ce n'est pas nécessairement du côté de l'élève) pour pouvoir sinon évoluer, du moins vérifier, contrôler.

Qu'est-ce qu'écouter, comment écouter ?

"*Il n'y a pas plusieurs manières d'écouter, mais comment savoir s'ils ont écouté...* Je crois que c'est plutôt dans la façon dont ils vont restituer ce qu'on leur dit, soit sous forme de questions, soit sous forme de communication avec les autres... S'il s'agit de faire une sorte de chaîne où l'un explique à l'autre, c'est une manière de savoir s'ils ont écouté et bien reçu ce qu'on a dit."

Quels conseils leur donner ?

"Le conseil qu'on peut leur donner, mais ça me paraît un peu difficile pour un élève, c'est, *dans une leçon, essayer de tirer un maximum par exemple de 5 mots de la leçon. S'il y avait 5 mots à écrire, un peu comme dans les jeux. A travers ça, on peut déjà voir s'ils ont retenu des choses,* s'il y a des mots qui ressortent simplement parce qu'ils sont bizarres ou grands, ou un peu magiques, ou s'il y a aussi des mots qui correspondent à ce qu'on veut leur faire acquérir.

Question 6

Critères d'un bon enseignement des maths. Différences suivant les élèves.

"Je fais des différences suivant les élèves, parce que, en même temps que le contenu, il y a la communication qui entre en jeu entre l'enseignant et les élèves, alors forcément, elle a une importance. Pour certains, bien enseigner, ça va être les pousser à expliquer ce qu'ils savent déjà parce qu'on sent que ça marche assez bien. C'est-à-dire que finalement, on insiste soit sur la forme, soit sur le fond, soit sur les deux, mais que c'est directement lié à l'élève, s'il s'agit d'un élève en particulier, mais disons au groupe classe en général et à la façon dont on les perçoit.

La classe joue un rôle important, au moins dans le type d'évaluation, le type de correction."

Un bon enseignement, ce n'est pas la même chose pour des élèves qui ont des facilités et pour des élèves qui ont des difficultés ?

"C'est plus une question d'exigence que d'enseignement. Si on a des exigences trop importantes pour des élèves un peu en difficulté, on risque de les bloquer tellement par la forme qu'ils ne savent pas s'ils ont compris, on a du mal nous-mêmes à repérer ce qu'ils savent et ce qu'ils ne savent pas encore, l'idéal étant d'une part qu'ils comprennent bien le fond de ce qu'on fait, et puis qu'ils sachent s'exprimer, s'expliquer... La forme vient ensuite, mais pour certains finalement, on est obligés de faire un choix, moi je privilégie le fond en général, bien que c'est la forme que je vais privilégier dans certains types de leçons qui me semblent moins importantes ou qu'on reprendra, mais, en général c'est le fond qui vient en premier, et si je sens que je peux aller plus loin... *C'est une espèce de contrat implicite de classe.... Je crois que ça se fait petit à petit au fur et à mesure de l'année dans la façon dont j'accepte ou que je refuse des réponses. Quand les élèves donnent des réponses mal dites, si je ne reprends pas d'une manière très nette, ils comprennent qu'il y a des choses qu'on n'a pas besoin de dire, que j'accepterai.* Dans les contrôles, quand ils ne sont pas sanctionnés parce qu'ils n'ont pas bien expliqué, ils comprennent qu'ils peuvent se permettre ça, alors *le problème, c'est que au moment où on veut reprendre la forme en main, ce n'est pas toujours possible d'un seul coup.* C'est quelque chose d'oscillant, réversible mais avec du temps... On met de petites annotations, et puis de plus en plus, pour obtenir des choses sur la forme.

Question 7

Les élèves peuvent-ils acquérir les notions des programmes de maths jusqu'en 3ème ?

Oui, certainement en 3ème, pas avec beaucoup de temps supplémentaire.

Jusqu'en terminale B : oui, c'est possible, mais avec beaucoup plus de temps.

Questions 8 et 9

Travail en groupes :

Ça peut améliorer les résultats. Oui, (cela améliore l'apprentissage individuel), *je pense qu'il y a transfert. Il y a au moins autant de transfert que si on n'a pas de travail en groupe,* en tous cas, pas moins bien. Cela dépend des contenus, ils s'y prêtent plus ou moins bien.

Maintenant, je les fais travailler plus en groupes. J'ai deux façons de les faire travailler en groupes : par deux, qui est la façon la plus générale que j'utilise, c'est plutôt parce que c'est la plus pratique. *Ça permet que des élèves puissent expliquer à d'autres, donc ça permet de mieux comprendre ce qu'ils savent faire, eux. Ça permet de régler les problèmes des élèves qui sont trop timides pour me poser des questions, donc c'est les copains qui règlent le problème. Ça leur permet des fois d'être débloqué en voyant ce que fait le copain : ils ne font pas que recopier, ils font toujours quelque chose tout seuls.* C'est un des moyens les plus simples, sans bouger la structure de la classe. *Sinon, il y a le travail de groupe plus important, par 4 ou par 6 ou par 8, où là, c'est disons des activités un peu particulières, et là, c'est beaucoup moins souvent.* parce que là, il faut plus organiser. L'autre forme, en dehors des contrôles et des phases de bilan, c'est systématique. Il y a quand même une chose, c'est que *les groupes changent tout le temps. Toutes les semaines, les élèves changent de place et de voisin.* Au début de l'année, j'ai instauré un système, que j'appelle le serpent où, dans chaque rangée, celui qui est à gauche descend d'une place, celui qui est à droite remonte et change de rangée, comme ça, ils se retrouvent à toutes les places. Ils ont un petit tableau. J'ai fait ça au début pour qu'ils ne soient pas toujours soit devant, soit derrière et qu'il n'y ait pas les mêmes personnes qui soient embêtées. Pour des 6ème, j'avais remarqué que physiquement, il y en avait qui se retrouvaient très près du tableau, et qui se penchaient avec des positions qui n'étaient pas bonnes pour les colonnes vertébrales. Ça règle le problème puisque ça ne dure qu'une semaine. *Et en plus, ils sont obligés de rencontrer tous les gens. Là, c'est un peu le côté hors mathématiques, qui est vie de groupe.* Quand ils sont à côté de l'élève qu'ils aiment bien... *C'est comme dans la vie, on n'est pas toujours à côté de quelqu'un qu'on aime bien...* Quand ils sont à côté de quelqu'un qu'ils n'aiment pas, ça dure une semaine; alors ils supportent. Ça a un côté social très prononcé. D'après ce que j'ai remarqué dans les conseils de classe avec les autres profs, c'est que les pôles se font pas de la même manière puisque un tel ne fait pas toujours les bêtises avec tel autre puisqu'il est rarement à côté... en plus il y a des amitiés qui se sont créées comme ça. *Quelque chose qui est net, je ne sais pas* *comment je pourrais le vérifier vraiment, mais pour moi c'est une certitude, ils finissent par être beaucoup moins étrangers les uns par rapport aux autres.* Il y a quelques élèves qui se trouvent à côté de personnes avec qui ils ne seraient jamais mis spontanément et qui s'y trouvent pas trop mal. Par contre, ceux qui sont rejetés par tout le monde, ils posent vraiment des problèmes de sociabilité.... *C'est comme si c'était indépendant de moi, comme ça, ceux qui ne veulent pas, ils restent quand même, c'est une espèce de petite loi.* Ils se déplacent tout seuls... Ça me permet de voir en plus s'ils comprennent le système. Et j'ai constaté que dans des classes où je commençais à laisser un élève à côté de tel autre parce qu'il n'avait pas son matériel et qu'il était tout seul, que très vite, en 15 jours, 3 semaines, il y en a qui oubliaient volontairement de changer.

Par rapport à certains élèves, comme ça, les communications ne sont pas toujours figées. Une fois qu'on est habitué à expliquer à une personne, on connaît le genre d'explication que l'autre attend, quand ça change tout le temps, on est obligé d'adapter toujours son message si on veut être compris. C'est plutôt une hypothèse que je fais et que je ne peux pas vérifier.

Question 10

Répartition du temps :

2/3 du temps pour des exercices ou problèmes résolus en classe.

Question 12

Rôle de la mémoire :

Très important, il y a beaucoup de choses.

Pour mobiliser, il faut qu'il y ait une mémoire latente pour puiser très vite dedans (autrement, ça ne s'enclenche pas). *La mémoire de ce qu'on apprend en classe et celle des situations.* En classe, on peut faire des exercices de ce genre. En dehors, on arrive à donner du sens à certaines notions mathématiques.

Question 13

Le travail donné à la maison, quel travail, quel type (annales, réflexion) :

- du travail commencé en classe et pas terminé

- du travail d'application assez directe de ce qu'on fait, en vue d'utiliser la leçon

- du travail trop long à faire en classe

- des problèmes de recherche un peu plus poussée eventuellement.

Je donne des problèmes de type annales si le niveau n'est pas trop bon, moitié - moitié si je le pense un peu meilleur.

Les devoirs à la maison ont une utilité par rapport aux notes. On peut avoir une bonne note (situation de confiance). C'est pour ça qu'on essaie de donner des devoirs plus faciles, par rapport à la confiance en soi.

Conseils donnés pour le travail à la maison :

- j'essaie de donner beaucoup d'images extérieures aux maths, pour donner un sens auquel se raccrocher.

- je donne des conseils par rapport à l'énoncé : tout est à utiliser. Il faut apprendre le cours avant.

Rôle du travail à la maison

Il serait de 2 ordres. Pour les classes qui ne posent pas de problème, ce serait un travail de répétition, un travail qui *permet de bien fixer des règles pratiques, des choses à apprendre presque par cœur, disons le côté très répétitif. Il y aurait aussi un travail qui serait... je ne sais pas si on peut appeler cela d'approfondissement, mais un travail que je n'aurais pas le temps de faire de toute façon en classe, qui leur permet de réfléchir sur des choses, parfois assez difficiles, mais parfois simplement parce qu'elles sont longues,* ça pourrait être par exemple des dessins géométriques un peu longs, commencés en classe et puis finis à la maison où l'important, c'est plutôt d'y passer du temps, de travailler dessus. *Ce serait de poser des exercices qui posent des problèmes, des blocages qui, en classe, sont difficles à gérer, parce que dès qu'il y a plus de la moitié des élèves qui ne voient même pas comment démarrer...* ils demandent des renseignements, ils acceptent mal la situation. A la maison, ils sont obligés de travailler un peu. Je leur demande de travailler au moins 1/4 heure sur tel exercice, parfois je leur annonce qu'il ne s'agit pas de trouver obligatoirement mais de réfléchir dessus, et puis parfois je ne leur dis pas.

Question : c'est quelque chose sur lequel on va retrailler ensuite en classe ?

"Pas forcément, non, *ça peut être des exercices du genre casse-tête* : dans une bataille, il y a tant de jambes coupées ... genre jeux mathématiques. Après je donne la correction en classe en leur demandant d'essayer de comprendre si possible, mais c'est pas très grave ; dans la correction j'essaie plutôt de privilégier pourquoi telle réponse semble fausse lorsque je sens que c'est un raisonnement qui est à leur portée. A la limite, je pourrais ne pas le corriger mais, comme ils veulent la réponse, souvent je le corrige, mais je pense pas que ce soit nécessaire. C'est surtout dans le but qu'ils s'investissent un peu dans ce jeu là, *essayer un peu comme on a envie de trouver une devinette, essayer de trouver pourquoi telle chose c'est bon, c'est pas bon...*

En classe, je fais très peu de problèmes comme ça parce que ce genre de problèmes, *je pense que c'est bon de les mûrir un peu en soi, et en classe on a le problème du temps* et il faut au moins qu'ils puissent enclencher des choses, calculer, faire intervenir des choses qu'on a déjà vues."

Question : et en groupes ?

"En groupes de 4, non, j'utilise plutôt des activités genre puzzle qui sont déjà prévues en organisation en groupes de 4, avec déjà une idée assez nette de ce qui va se passer.

Question 14

Enseignement de méthodes

En classe de 6ème:

- par exemple, pour les petits problèmes, il y a un *ordre précis pour rédiger*

- il y a des *règles particulières (du type règles de société), pas toujours liées au problème* (une coutume, un usage à apprendre qui peuvent changer l'année suivante)

- *la lecture d'énoncés* : il y a un code, comment le lire, qu'est-ce qu'il faut souligner...

- pas d'enseignement de méthodes liées au contenu : c'est trop "rayonnant".

Question 15

Evaluation :

En contrôle, je donne *beaucoup d'exercices déjà vus, les plus importants, les plus représentatifs de la notion.*

Ce que je cherche à évaluer dépend du type d'exercices :

- ça peut être la qualité de la rédaction : reproduire ce qu'on demande et comment, quand ce n'est pas trop difficile.
- ça peut-être le raisonnement, l'idée qui est dessous.

Rôle de l'évaluation dans l'apprentissage.

Souvent je suis beaucoup moins exigeant pour l'évaluation que pour ce qu'on fait en classe. Au début j'ai une idée de ce que je veux que les élèves arrivent à faire en fin de compte, qui est quand même assez proche de l'esprit de programme. Suivant le type de classe, on a travaillé assez vite, assez loin ou pas très vite et pas très loin mais finalement, *dans l'évaluation je vais demander à peu près les mêmes choses, alors finalement les classes en difficulté vont se retrouver avec des notes ... pas terribles, et dans les bonnes classes, ils vont se retrouver avec des très bonnes notes. Moi, il me semble que ce n'est pas une bonne chose de forcer sur l'évaluation dans les bonnes classes, parce que finalement, on crée des élèves en échec,* même si on peut penser qu'en leur demandant peu, ils font moins, *comme il y a eu avant ce travail à la maison ou en classe, il y a eu une poussée, il n'y a pas besoin que j'en tienne compte absolument dans l'évaluation, il suffit qu'après on sache que quand on a 15, c'est bien, mais c'est pas encore suffisant, quand on a 20, ça ne veut pas dire qu'on sait tout faire, ça veut dire qu'on sait faire ce qui est important.* Si on une classe très bonne, si on pose des questions pour avoir une moyenne de 10, il va y avoir des élèves qui vont se retrouver à 5, pas parce qu'ils sont faibles, mais parce qu'ils sont moins bons que les autres et je crois que les élèves n'ont pas encore la maturité de se dire "ça, je le sais", ils ont tendance à remettre en cause en bloc. S'ils ont 15, ils pensent que c'est bon, alors que ce qu'ils n'ont pas su va peut-être un jour les gêner, inversement, s'ils ont 5, *ils pensent n'avoir rien compris et ils rejettent même le peu de choses qu'ils ont compris, et, ça, à mon avis c'est grave, parce quand on le rejette, on n'est pas près de le reprendre une deuxième fois. Finalement, c'est un des dangers de pousser tout le temps quelqu'un en le stimulant parce que si jamais il a un blocage, s'il n'est pas dans la réussite, ça pose des problèmes.*

Les contrôles, je les corrige en classe parfois avant de les rendre, parfois après, ça dépend du type de classes et du type de contrôle. Si je considère que c'est facile, que ça aurait dû être facile pour eux et qu'ils ont particulièrement mal réussi, parfois on fait la correction ensemble avant pour qu'ils se rendent compte que c'était simple et qu'ils voient les différences avec leur devoir.

Question 16

Ce qu'il apprécie le plus chez ses élèves :

- le fait d'être attentifs

- en même temps une certaine vie, que ce ne soit pas impersonnel, un genre de complicité : "ils sont bien là".

- plutôt le calme.

Ce qu'il essaie de valoriser :

- l'aptitude à trouver de choses, à enclencher des raisonnements, comme un jeu

- avoir envie de jouer et de réussir, que ça soit bon (i.e. juste?)

Question 17

Quelles types d'actions vous paraissent efficaces pour réduire les difficultés des élèves au collège.

Les remèdes : il y a le nombre, et puis il y a *une certaine souplesse dans la gestion du temps et du nombre.* Mais je ne sais pas si c'est faisable, mais il y a des séquences qui, lorsqu'elles sont trop longues, c'est pas la peine, il y a des heures ou des notions pour lesquelles, après avoir travaillé 20 minutes, il faut stopper, alors, soit on change le type du travail, mais il n'y a pas toujours quelque chose qui peut se faire derrière, et puis il y a des séances où c'est l'inverse, il faudrait un peu plus de temps. Il faudrait une espèce de *souplesse genre école primaire* où on est le seul gestionnaire de la journée et où on module comme on en a envie : si on veut prendre un peu plus de temps, eh bien on en prend un peu plus, le reste est reporté, et inversement. *Je pense que dans ces classes là, la pluridisciplinarité peut être une solution mais pose le problème de la compétence des gens dans toutes les matières et puis de la lassitude éventuelle des enseignants et des élèves à voir toujours les mêmes têtes.* Quand un enseignant a les élèves plusieurs heures de suite ou très longtemps, lorsqu'il pose des problèmes dans ces classes, le problème est beaucoup plus grand que quand il les a une heure ponctuellement. *Morceller les emplois du temps, c'est une façon d'être sûr que, même s'il y a des enseignants à qui on ne fait pas trop confiance, c'est pas trop grave, pourvu qu'il y en ait suffisamment dans la classe pour qui on dise que ça va bien.* Pour les instituteurs, le problème est différent, parce qu'il me semble comme ça a priori que les instituteurs sont mieux formés que nous à la gestion d'une classe. Globalement, ils maîtrisent mieux, c'est peut-être aussi parce qu'ils ont les élèves toute la journée, la gestion du temps de la classe que nous.

D'ailleurs je vois avec les élèves de 4ème technologique, quand pour des raisons d'emploi du temps, en technologie, on est obligés de les faire travailler plus de 2 heures d'affilée, c'est abominable, et pour le collègue et pour eux... Je pense que ça tient aussi au fait que quand on fait travailler heure par heure, on les fait travailler comme si on était les seuls qui allions les faire travailler dans la journée. De même que *quand on donne son travail pour la journée, on fait comme si ils n'avaient que cela à faire,* et on se dit, c'est faisable de faire 1/2 heure de maths tous les soirs, c'est faisable de faire 50 minutes de maths dans la journée. Tous les autres profs faisant la même chose, il n'y a pas cette vision globale, on est très très local.

Aide au travail à la maison

"La première chose, c'est une concertation entre les enseignants de toutes les matières, éventuellement sur les contenus, mais là, ça demande trop de concertation, mais surtout sur les quantités des choses

qu'ils demandent, le niveau qu'ils demandent, par exemple, quand un professeur d'EMT va demander des symétries centrales et axiales, des points de fuite, des choses comme ça alors qu'en mathématiques, on n'y est pas du tout, que le professeur de physique va demander des masses volumiques ou des volumes, alors que, nous, on va les aborder en fin d'année suivante… On n'est pas obligé de les éliminer mais on a intérêt à relativiser le niveau d'exigence et ne pas juger directement qu'un élève est mauvais ou bon parce qu'il sait faire. En plus, si on essaie de faire un tableau en demandant à chaque collègue ce que vous demandez en temps de travail à chaque élève pour qu'il s'organise, quand on recolle tout, on s'aperçoit qu'*on leur demande des nombres d'heures incalculables et que c'est impossible qu'ils fassent vraiment ce qu'on leur demande comme on le leur demande. Nous, on fait semblant de croire que c'est possible, on finit même par en être persuadé,* mais si vraiment, ils faisaient ce qu'on leur demande, le prof de français lire un peu, se cultiver, aller au théâtre, le prof de maths réfléchir, faire un peu de calcul mental… et toutes les matières… L'instituteur n'a pas ce problème puisqu'il est le seul à tout faire et à tout donner. Lui, il a un problème de compétence.

Question 18

D'où viennent les difficultés des élèves en seconde.

"A mon avis, *les difficultés des élèves de seconde en mathématiques viennent du fait qu'on a un peu trop tendance à mélanger le fond des notions et la technicité.* Finalement, on arrive à faire des élèves en 3ème qui savent faire plein de factorisations sans jamais savoir le cadre de leur utilisation et en les oubliant au bout de 3 mois. *C'est vraiment des techniques pour des techniques. On a du mal à pouvoir décider du choix de forcer sur la compréhension en sachant qu'un minimum de technique quand même est obligatoire, ou forcer sur la technique. Alors, le plus facile, c'est de forcer sur la technique. C'est là où on évalue le mieux, où apparemment, on a le plus de résultats à court terme.* Comme on se désintéresse de ce qui se passe en seconde, on se dit ils savaient les faire, c'est pas de notre faute s'ils ont oublié. *Et puis il y a des choses qui sont un peu longues à mettre en place en donnant du sens par rapport au programme et on veut se dépêcher de suivre.* Par exemple, les équations de droites, nos élèves savent dessiner une droite quand on donne 2 points, trouver l'équation, ils savent calculer des intersections, des choses comme ça, mais finalement, ils n'ont pas compris qu'une droite c'est un ensemble de points dont on donne une formule liant les coordonnées. Ils n'ont pas compris l'idée donc ils ne peuvent pas vraiment exploiter tout ce travail sur les équations de droites parce que, comme on sait qu'il y a quand même pas mal de points techniques à utiliser, on se dépêche. Alors, on introduit, éventuellement en une fois une équation de droite, artificiellement ou pas, et après *finalement, on ne revient jamais sur le sens, de temps en temps si, sur des lectures de graphiques où ça a un sens vraiment local, mais il n'est jamais global, ce sens* : vous voyez bien, ça, c'est le prix qui évolue en fonction des kilomètres, alors ça se sent bien dans la situation et c'est tout le temps le point d'intersection, c'est tant de km et…

Question : le savoir reste contextualisé ?

Oui, tout à fait, on ne met pas assez l'accent dans beaucoup de choses sur la notion, dans l'idée. Je ne sais pas si ça donnera des résultats dans l'autre sens mais à mon avis, c'est pour ça que les élèves arrivent en seconde… enfin, *nous, les échos qu'on a c'est qu'ils ne savent rien, alors on nous dit ce qu'ils ne savent pas faire, et c'est exactement ce qu'ils savaient faire en fin de 3ème. Par exemple, factoriser, apprenez-leur au moins à factoriser. Et nous, on n'a fait que des factorisations : en début d'année, ils ne savaient pas, en milieu d'année, ils savaient un peu plus, et en fin d'année, ils savaient très bien, mais en 3 mois, ils ont oublié.*

Question : C'est la même chose qu'à l'entrée en 6ème ?

Exactement, alors, nous, les reproches qu'on a faits, c'étaient des choses que les instituteurs travaillaient. Il y a des instituteurs qui nous disent : Sur quoi voulez-vous qu'on travaille ? Mais, finalement, quand on leur donne un thème, ils vont un peu trop loin, *je crois qu'il y a un piège dans notre enseignement, c'est que, quand on sait que quelque chose est difficile dans l'année précédente, on pourrait se dire, bon, on va faire autre chose et on va leur laisser le temps, mais ce qu'on fait en général, c'est que, comme c'est difficile en seconde, eh bien, on va commencer en 3ème, comme ça ils seront un peu plus prêts, et à la limite, si on pousse le raisonnement, il y a intérêt à faire le programme de terminale C à l'école primaire,* parce que, là, ils l'auront vu une dizaine d'années et qu'en fin de compte, on peut s'attendre à ce que ça aille mieux. Il me semble que c'est un raisonnement qui peut être vrai ponctuellement, de temps en temps d'avoir vu un peu, d'avoir mis des jalons, je crois que c'est bien mais ça doit être intégré dans des activités qui peuvent se prolonger sur des choses qu'on reverra plus nettement après, mais en général, c'est vu tout de suite d'une manière synthétique, théorique, c'est-à-dire, c'est vu tout de suite comme ça se verra l'année suivante qui est déjà difficile, et donc, ça n'a aucune chance à mon avis d'aboutir, donc *il y a une perte de temps dans le but de rendre les élèves à l'aise dans les notions plus difficiles, on leur complique la tâche plus tôt et on ne garde pas ce temps pour donner un peu plus de sens aux choses qu'on fait.*

Question 19

Caractérisation des maths :

- des outils pour résoudre des problèmes,

- des outils de calcul

- un langage

Etes-vous partisan d'un enseignement d'histoire des maths ?

oui, dans l'idée de donner la vie à des notions à travers les gens, un éclairage indirect sur les notions essentielles.

L'enseignement en général de façon interdisciplinaire ne serait pas inintéressant.

Question 20

Qu'est-ce que les nouveaux programmes changent dans l'attitude des professeurs et des élèves (y compris par rapport à l'évaluation)

Avec les nouveaux programmes, on a plus l'obligation, et l'envie par là même d'être dans des situations d'apprentissage où chacun a un rôle, et pas un transfert dans un seul sens. On travaille autrement. On se sent investi d'une responsabilité différente.

Et, ce qui est plus important, on dit que certaines choses sont difficiles : ça demande certaines situations et du temps. On est obligé d'abandonner le "s'ils n'apprennent pas, c'est qu'ils sont bêtes ou qu'ils n'ont pas le temps"

Pour l'évaluation, le fait de donner des évaluations difficiles tempère les évaluations négatives.

Question 21

Que pensez-vous des groupes de niveau ?

Du bien si les groupes sont faits d'une manière plutôt homogène, si les un peu faibles ne sont pas trop nombreux et disposent de plus de temps que les autres, qu'il y ait des passages effectifs (entre groupes).

Si c'est égalitaire du point de vue numérique et temps, non, ce n'est pas bon pour les élèves.

Classes de niveau

Je serais assez pour le système de classes relativement homogènes, ce qui peut rejoindre les classes de niveau. Dans notre collège, il y a des classes de niveau avec les mêmes moyens, donc il n'y a aucun intérêt pour le professeur comme pour les élèves à être dans des classes de niveau faible. Ils ont une heure de plus, mais ce n'est pas systématique, ils sont assez difficiles.

Si on arrive à régler les problèmes de discipline et de temps, parce que, les classes de niveau, il faut regarder plutôt dans les faibles, parce que les bons, y'a pas à dire, c'est bien ! Pour ceux qui sont faibles, par exemple, si on travaille sur les droites perpendiculaires et qu'on sait que les élèves ne savent pas placer leur équerre, il y a un nombre à partir duquel la tâche devient impossible. *Ce qui est difficile, c'est qu'on n'est pas obligés de les avoir en nombre réduit à toutes les heures, il y des choses pour lesquelles ils peuvent être 30 à la limite, et il y en a d'autres pour lesquelles 5 c'est un maximum. C'est vraiment très dépendant du type de travail et du type de classe. Il faudrait vraiment une souplesse.* A certains moments il faut le nombre maximum qu'on peut gérer et il faut le temps qu'il faut parce que si on estime que c'est un palier obligatoire avant de passer à l'étape suivante, et puis à d'autres moments, s'ils sont devant des ordinateurs, qu'ils soient 15 ou 20 pourvu qu'on ait assez d'ordinateurs...

L'année dernière j'avais une classe, ils étaient trop nombreux par rapport à ce que voulais faire avec eux, notamment en géométrie dans le tracé... Ils sont un peu maladroits et pratiquement, *il faut être derrière pour que, dès qu'il y a un problème le voir et les aider sinon ils ont tendance à s'arrêter plus vite puisqu'on les a mis dans la peau de ceux qui ne réussissent pas, donc ça devient normal quand ils ne réussissent pas, ils continuent à travailler tant qu'ils se sentent en réussite. Il faut repérer très vite et intervenir au bon moment : il faut être très présent, et là, le nombre compte beaucoup.*

Question supplémentaire : le fait d'être soi-même en formation change-t-il le point de vue qu'on avait ?

Pas vraiment parce que j'avais déjà le sentiment... Je n'étais pas un élève exceptionnel et il y a eu des années où j'étais en difficulté. Bon, le fait d'être devant des notions qu'on ne comprend pas tout de suite ou qu'on ne comprendra jamais, l'ayant déjà vécu, je sais que ça peut exister, donc c'est un peu différent. Mais, je pense que, *si je n'avais jamais été en difficulté, le fait de pouvoir l'être, forcément, on se dit que ce n'est pas si simple que ça, il y a des choses qui, données théoriquement passent très bien, et puis, il y a des choses où, si on ne donne pas un sens, un support, un outil plus concret... même qui n'ait rien à voir avec les maths, là, parfois, c'est vital. Et puis, surtout, c'est dans le jugement qu'on a des élèves.* Quand un élève ne sait pas faire un truc, on est un peu moins systématique dans le genre de choses "il ne comprend rien", enfin "il n'a pas appris", parce qu'on sait qu'on peut apprendre et rater, et puis on essaie de juger un peu moins vite. On n'a pas trop envie de dire que s'il n'a pas fait ça, il n'y arrivera jamais, parce qu'on espère bien nous-mêmes y arriver quand ça ne marche pas. Ça rend plus humble. *Dès qu'on fait de nouvelles études, que ce soit en maths ou ailleurs, j'avais déjà ressenti ça dans des stages d'informatique, c'est très difficile d'être en situation d'échec : soit on rejette après cet apprentissage, soit on l'intègre en étant moins juge de ce que les autres font, en leur laissant un peu plus de temps, même parfois, ça peut aller à l'inverse en exigeant pas assez,* c'est-à-dire, on peut être trop tolérant, en disant "moi-même, je suis un peu en difficulté de temps en temps".

Question : Et au niveau des méthodes de travail ?

Non, moi, il y a des choses dont j'étais déjà conscient, par exemple la rédaction de l'élève. *J'ai toujours fait une distinction entre la rédaction qui est claire pour moi et la rédaction qui est claire pour l'élève. Je sais qu'il y a des choses qui sont assez mal écrites mais qui ont une cohérence où on se retrouve très bien et pour moi, c'est une rédaction qui n'est pas suffisante dans la communication mais qui est suffisante si le contrat est "est-ce que tu te comprends ?",* se donner des points de repère pour soi-même pour pouvoir répondre à des questions, mais, il n'y a pas encore la communication : faire qu'un autre puisse nous relire, et puis il y a des rédactions qui sont très bien écrites et qui sont incompréhensibles pour l'élève même. Je mettrais sur 2 plans différents, parfois ça interfère entre ce que les autres peuvent comprendre et ce que soi-même on peut comprendre. Je pense qu'il faut d'abord s'expliquer à soi. Ecrire ce qu'on comprend ou ce que l'autre veut. Il y a des élèves qui comprennent les deux, mais il y en a qui ne sont que dans le premier contrat, et d'autres qui ne sont que dans le second.

Questions supplémentaires proposées par le professeur

1. Les études du soir peuvent-elles améliorer sensiblement les résultats ?

Pour les élèves en échec en 6ème, 5ème, les parents ne s'en occupent pas, tout se passe en classe.

2. Jusqu'où est-on responsable de l'échec des élèves qu'on a dans sa classe ?

Où placer la barre ?

Il est impossible d'avoir 18 de moyenne dans la classe, il faut baisser la barre. Il y a une pression sociale, on ne peut pas avoir trop de mauvais. Il faut rectifier le tir.

Il y a un danger des mauvaises notes : on risque de rejeter quelque chose de bien compris, d'avoir quelque chose d'irréversible.

Grille d'entretiens avec les instituteurs

1- Quel est pour vous le rôle essentiel de l'école primaire
- éducation, formation de la personnalité
- mettre en place des apprentissages de base
- accéder à une culture
- éducation sociale : apprentissage de la vie en société
- acquisition de méthodes de travail
- autre

Voyez-vous une évolution des objectifs entre le CP et le CM ?

2- Quel est le plus important pour une bonne réussite de la scolarité primaire pour un élève ?

famille :
- que les attentes de la famille coïncident avec celle de l'école
- que l'élève soit encouragé et soutenu moralement à la maison
- que son travail soit suivi et qu'il soit aidé
- que l'ambiance familiale soit calme et sereine

école :
- qu'il soit actif en classe
- qu'il soit attentif et écoute bien en classe
- qu'il ait une part de travail personnel suffisante
- qu'il puisse interagir avec des camarades

enseignants :
- qu'il ait de bonnes relations avec ses enseignants
- qu'il attribue aux mots du maître une signification proche de celle que lui-même lui attribue

Avez-vous changé d'avis sur ces questions depuis le début de votre carrière ? depuis 5 ans ?

2bis- Comment l'élève doit-il écouter ?

3- Qu'entendez-vous par avoir des connaissances en mathématiques pour un élève qui sort de l'école primaire ?

4- Qu'est-ce qui manque à votre avis aux élèves en échec en mathématiques ? D'où viennent les difficultés des élèves ? Où se situent-elles ?

5- Que doit faire un élève (en classe, à la maison) pour progresser en mathématiques ? Quels conseils donnez-vous aux élèves ?

6- Quels sont d'après vous les critères d'un bon enseignement de mathématiques ? Y-a-t-il des différences suivant les élèves ? Pouvez-vous mettre vos idées en pratique en classe ? Sinon pourquoi ? Quelles sont les qualités d'un bon enseignant ?

7- Pensez-vous que tous les élèves puissent acquérir les notions des programmes de mathématiques jusqu'en 3ème ? jusqu'en terminale B ?

8- Le travail en groupes peut-il améliorer les résultats sur l'apprentissage individuel des élèves ?

9- Faites-vous travailler vos élèves en groupes ? A quelle fréquence ? Pour quel type d'activité ? Répartition du temps entre travail en groupes, individuel, collectif, corrections, évaluation ?

10- Dans l'enseignement des mathématiques, quelle répartition vous paraît la plus adéquate entre
- résolution de problèmes
- apprentissage de techniques
- mémorisation de résultats
- manipulations

Différenciez-vous différents types de problèmes ou de situations mathématiques ? Quel usage respectif en faites-vous dans votre enseignement ?

11- Quelle place doit-on faire d'après vous à l'enseignement de la géométrie à l'école primaire ?

12- Attribuez-vous un rôle important à la mémoire ? Pourquoi ? comment?

13- Quel est le rôle du travail à la maison ? Quel type de travail à la maison donnez-vous ?

14- Peut-on enseigner des méthodes de résolution de problèmes de mathématiques ? comment ?

15- Quelle place faites-vous à l'évaluation des élèves ? Quel type de contrôle donnez vous ? Quelle fréquence ? Que cherchez-vous à évaluer ? les connaissances, les méthodes ? autre chose ?
L'évaluation a-t-elle un rôle dans l'apprentissage des élèves ? Quelle correction faites-vous des contrôles ?

15 bis- Qu'est-ce que vous appréciez le plus chez les élèves individuellement ? en classe ?
Qu'est-ce que vous essayez de valoriser le plus chez les élèves ?

16- Quel type d'action vous paraît efficace pour réduire les difficultés des élèves en mathématiques à l'école primaire ?

16bis- D'où viennent d'après vous les difficultés en mathématiques des élèves au collège ? Quelles remédiations voyez-vous ?

17- Si vous deviez caractériser les mathématiques, quels termes choisiriez-vous ? On suggère : théorie, outils pour résoudre des problèmes, langage, outils de modélisation du réel, calcul, formalisme, abstraction, objets de savoir, autre.

1.INSTITUTEUR A

3. Connaissances en maths pour un élève qui sort de l'école primaire.

Premier point compter, dénombrer, travail sur l'ordre, travail sur la numération de position, le chiffre qui représente..., le nombre de ..., ensuite sens et maîtrise des opérations, les deux combinés, *calculer mentalement avec comme objectif trouver des résultats approximatifs, travail sur les approximations, et puis enfin mettre en place des stratégies assez simples pour aboutir à la résolution d'un problème, de problèmes concrets dont l'énoncé, enfin l'enfant s'est complètement approprié l'énoncé de ce problème* avant de se lancer dans sa recherche, évidemment.

Il faut déjà qu'il en soit capable ?

Voilà, c'est un des prérequis, *le travail sur l'énoncé, s'approprier un énoncé,* voir quelles sont les informations qu'on donne, à quelle nature appartient tel type de question etc... ça, c'est l'appropriation de l'énoncé, mais ça peut être des situations qu'ils se construisent eux-mêmes.

4. Qu'est-ce qui, à votre avis, manque aux élèves en échec en maths, d'où viennent leurs difficultés où se situent-elles ?

Moi, j'aurais tendance à dire... il y a plusieurs raisons. *La première raison, c'est un problème de langue*, c'est-à-dire *mauvaise maîtrise du français*, on n'est pas capable de s'approprier un énoncé, on lit mal, on manque de vocabulaire pour le comprendre, donc mauvaise maîtrise du français, la première raison, peut-être la raison principale. *Seconde raison*, qui est liée peut-être à l'école même : *on propose quelquefois des situations mathématiques à l'école qui ne sont pas adaptées, concrètes pour des enfants, on ne laisse pas assez à l'enfant le droit de chercher, de se tromper* sur des situations concrètes.

Qu'appelez-vous "concrètes" ?

Des situations que l'enfant peut se représenter vraiment pas, des fausses situations concrètes. Les problèmes traditionnels, les trains, les loges de théâtre dans lesquels ils ne sont jamais allés, c'est des situations faussement concrètes, alors que, si un enfant par exemple, on lui demande de comparer des prix quand il est allé dans le supermarché voir quel prix il y avait, l'énoncé, il se l'est approprié, il l'a vu, à la limite, il l'a construit. Je pense que, souvent, à l'école élémentaire, on pose des situations qui sont trop abstraites, et deuxièmement, on ne laisse pas assez aux enfants le choix de leurs stratégies, et puis *on n'analyse pas assez leurs erreurs...* C'est très rare qu'un enfant fasse des vraies erreurs, c'est-à-dire quand il propose quelque chose de faux, il y a toujours quelque chose d'intéressant dans ce qu'il propose, et l'exploitation systématique des propositions qui sont, certes, erronées mais qui apportent quelque chose n'est pas faite assez. Je crois par contre, *ce qui se fait assez bien, c'est l'aspect systématisation, à l'école élémentaire la systématisation se fait assez bien.*

C'est-à-dire les techniques, les algorithmes ?

Voilà, les techniques, l'acquisition de mécanismes, la répétition d'exercices, voire l'habitude à la modélisation, c'est quelque chose qui se fait assez bien.

Pensez-vous que ça marche pour tous les élèves, c'est-à-dire que tous les élèves qui sortent de l'école primaire arrivent sur ce plan là, à les maîtriser?

Non, je pense qu'il y a des enfants qui sortent de l'école primaire et qui ne maîtrisent pas tous les algorithmes, notamment la division, sens et technique. Il y a des élèves qui sortent de l'école primaire sans connaître les tables de multiplication, et *beaucoup d'élèves ont un niveau très bas en résolution de problèmes, parce qu'en réalité, ils n'ont pas vraiment eu l'occasion de résoudre des problèmes.* Ils ont sans doute eu beaucoup de problèmes à résoudre, *mais ils n'ont pas eu l'occasion de travailler* sur tout ce qui est l'aspect stratégie. Il se passe la chose suivante, c'est qu'ils ont un problème, ils le trouvent ou ils ne le trouvent pas, pour ceux qui ne trouvent pas, on le corrige et puis, au contrôle, on leur propose un problème de même type, où ils auront principalement à modéliser. Le plus souvent, le problème à l'école élémentaire, c'est un travail d'application et pas un travail de recherche, il n'y a pas de vrai problème, quoi. C'est-à-dire que, *pour les bons élèves, ils peuvent le faire parce qu'ils l'ont déjà fait et ils retiennent la structure qui permet d'arriver au bout, et, pour les élèves en difficulté, ils ne savent pas le faire parce qu'ils n'ont pas retenu la structure exemplaire qu'ils n'ont pas comprise. Comme ils n'ont pas l'habitude de chercher, d'être autonome, de mettre en place des stratégies, d'utiliser les erreurs etc... ils ont en échec parce qu'ils ne rentrent jamais dans le problème.*

5. Que peut faire un élève en classe, à la maison, pour progresser en maths, quels conseils lui donneriez-vous ?

J'en donne un premier : *je conseille aux enfants de jouer*, d'abord à tous les jeux pour travailler l'aspect *concentration, mémorisation, respect d'une consigne*, et ensuite à jouer à quelques jeux qui peuvent être plus intéressants du point de vue des mathématiques, qui peuvent être le master-mind, les échecs, les dames, puissance 4...

Jouer d'une manière générale ou plus spécifiquement ces jeux là ?

Ça dépend du niveau où se trouve l'enfant, mais un enfant très en difficulté sur le plan scolaire, il peut profiter de jouer au Monopoly, au Mille bornes, parce que ça va l'aider à déjà s'approprier des règles, se concentrer, faire attention dans un domaine. *Cette habitude d'appropriation de la règle, de la concentration, il va pouvoir la récupérer, et* quand il a progressé un peu, jouer à d'autres jeux tels que ceux que j'ai nommés. Ça, c'est le premier point pour les enfants vraiment en difficulté. *Le second point, c'est un point un peu inverse, c'est-à-dire forcer sur la systématisation, la mémorisation de techniques strictes.*

6. D'après vous, quels sont les critères d'un bon enseignement des mathématiques ? Est-ce qu'il y a des différences suivant les élèves ? Est-ce que vous avez les conditions pour réaliser ce que vous pensez être un bon enseignement en classe, et sinon, quelles sont les limites ?

A l'école élémentaire, à mon avis, un bon enseignement des mathématiques, *c'est permettre aux enfants de se construire leurs connaissances sur des situations concrètes et à partir de manipulations, de vraies manipulations et de tâtonnements.* On peut monter toutes les connaissances mathématiques à partir de manipulations ou de situations très concrètes qu'on peut faire vivre aux enfants. Donc, *s'appuyer sur du concret, pour dans un second temps, à partir de ce concret et par l'intermédiaire des découvertes qu'on a faites sur ce concret, abstraire un peu par le biais d'une* *systématisation, mais toujours partir de quelque chose de vraiment concret, et pas faussement concret.* Est-ce qu'on peut toujours le faire, c'est pas évident. Evidemment, il y a des contraintes. *La contrainte la plus lourde de mon point de vue, c'est la contrainte de l'effectif* : c'est plus difficile de travailler comme ça avec 30 élèves qu'avec 20, c'est la première contrainte. *La seconde contrainte*, surtout avec des enfants qui sont un peu en difficulté, où il faudrait mettre en place des ateliers de travail un peu plus différenciés, *c'est une question de moyens, c'est de pouvoir avoir du matériel adapté* qui permette à des enfants de pouvoir travailler, voire jouer, en groupe limité, je pense...

Des moyens en personnel ?

Non, *des moyens en argent, pour avoir du matériel, des jeux*, et puis aussi évidemment... Mais déjà, en se situant le maître unique dans la classe, si déjà on pouvait avoir une certaine quantité de jeux, *je pense aux jeux que j'ai cités, mais aussi à des puzzles, des petits carrés qu'on assemble etc... je pense à des calculatrices*, des choses comme ça que les enfants pourraient manipuler plus individuellement, *voire des microordinateurs*, on améliorerait quand même les choses. Mais je pense quand même qu'en enseignant les mathématiques un peu autrement comme je l'ai dit au premier point, on peut constater quand même, moi j'ai constaté dans ma pratique qu'on arrivait à de bien meilleurs résultats, à de bien meilleures performances qu'en travaillant de manière abstraite et plus traditionnelle. *Quand on met les enfants dans une situation qui leur permet, petit à petit, de construire une connaissance, on de meilleurs résultats, on va plus loin avec les élèves plus brillants et on a de bien meilleurs avec les élèves... on laisse moins d'élèves sur le carreau.*

Donc, vous pensez qu'il n'y a pas de différences, que tous les élèves profitent de ce genre ...

Oui, je pense que tous les élèves profitent, parce que les meilleurs élèves profitent de l'appréhension de plein de stratégies pour arriver à un résultat, et ils se trouvent en situation, parmi les stratégies à leur disposition, *de choisir la plus performante.* Ça, c'est pour les élèves les plus brillants. Et *pour les élèves les moins brillants*, compte-tenu qu'ils se sont construit les connaissances qu'ils ont pu comparer et voir fonctionner plusieurs types de stratégies, *ils ont plus de chances de s'approprier au moins une des stratégies qu'ils pourront réutiliser dans d'autres situations comparables*, laquelle stratégie ne sera pas toujours la meilleure dans une situation donnée, mais elle leur permettra quand même de s'en sortir.

Est-ce que, de travailler comme ça, ça fait qu'ils réutilisent davantage, parce que ce qu'on constate, c'est que les élèves en difficulté on du mal à réinvestir, est-ce que vous pensez qu'ils réinvestissent plus facilement quand ils ont travaillé comme ça que de façon plus traditionnelle ?

Oui, *je pense qu'ils réinvestissent plus* parce que, de façon plus traditionnelle, ils ne réinvestissent pas, mais *de cette façon, même s'ils ne réinvestissent pas directement, ils se trouvent quand même dans une situation de non blocage où ils cherchent et où ils peuvent retrouver la stratégie qu'ils ont appréhendée* quand la connaissance s'est montée. Ils réinvestissent donc d'une certaine manière, peut-être certains avec difficulté, mais ils réinvestissent. Alors, évidemment, il y a *un facteur temps* là-dedans. Quelquefois, *on peut avoir l'impression de passer beaucoup de temps sur une notion* x ou y, *voire perdre du temps*, se dire oh, là là, je ne vais jamais arriver au bout de mon programme. En réalité, c'est un petit peu faux : *en travaillant à partir d'une situation*, souvent pour se construire une notion, on travaille sur plein de domaines et, en réalité, on va bien au-delà de son programme même si, à certains moments, on a l'impression de passer trop de temps, ou beaucoup de temps à discuter avec les enfants sur les stratégies :"comment t'as fait ? comment on peut faire ? est-ce qu'on pourrait améliorer ?" etc... ou même à certains moments laisser des points d'interrogation dans la connaissance : "ça, on n'y arrive pas, on verra plus tard si on peut avancer".

7. Pensez-vous que tous les élèves puissent acquérir toutes les notions des programmes jusqu'en classe de 3ème ?

Je n'ai pas un souvenir très précis des programmes... *A priori, j'aurais tendance à penser que oui parce que, disons que, à l'école élémentaire, il me semble que l'aspect français est très très prépondérant et très très bloquant, et un pourcentage important des élèves qui sont en échec en mathématiques, en réalité, c'est parce qu'ils sont en échec en français et pas en mathématiques, et donc, en grandissant, ils vont s'approprier un petit peu mieux la langue, ils vont avoir un peu plus de vocabulaire, donc ils devraient pouvoir s'en sortir mieux puisque le paramètre français devient de moins en moins important.* Ce n'est pas sûr, je ne sais pas, c'est une hypothèse parce que je ne sais pas du tout ce qu'on demande aux enfants juqu'en 3ème.

Si je vous demande jusqu'en Terminale B, vous savez encore moins?

Je sais encore moins mais je pense que c'est peut-être plus difficile, il y a peut-être un palier à partir de la seconde que certains ne peuvent pas franchir. Ce que je sais par contre, c'est qu'un enfant qui sort de l'école élémentaire et dont on dit que c'est un bon élève de cours moyen, l'expérience que j'ai, d'à peu près 20 années, montre que l'enfant suit sans problème jusqu'à la 3ème. Il n'y a pas de surprise, sauf accident, au collège, après c'est plus aléatoire, mais jusqu'à la 3ème, tous les élèves que j'ai eus en CM1, CM2, j'ai peut-être travaillé une bonne quinzaine d'années, peut-être plus, avec des CM que j'ai revus régulièrement, je n'ai pas eu de surprise, sauf très exceptionnellement, ils sont tous allés au bout du collège sans redoubler, sans difficulté particulière.

Mais, en enseignant autrement, est-ce qu'on devrait pouvoir amener tous les élèves ...

Oui, parce je pense qu'au niveau de l'école élémentaire, c'est vrai qu'à l'heure actuelle, il y a un pourcentage, je ne sais pas... *il doit bien y avoir un pourcentage de 35% des enfants qui entrent au collège qui ne sont pas au niveau nécessaire pour aborder le collège dans de bonnes conditions, mais je crois qu'en enseignant un petit peu autrement, on réduirait considérablement ces 35%, on arriverait sans doute à 5% à mon avis.*

Et en enseignant autrement au collège aussi ?

A mon avis, en enseignant autrement à l'école élémentaire, on arriverait à un taux d'échec en maths de l'ordre de 5%, et donc, au collège, on peut reproduire le raisonnement, peut-être...

8. et 9. Pensez-vous que le travail en groupes peut améliorer les résultats sur l'apprentissage des élèves ?

Oui, je *pense que oui, pour deux raisons.* La première, c'est une raison non rationnelle, c'est que *les enfants aiment bien travailler en groupes*, ça leur plaît, et donc ils travaillent plus volontiers. La seconde raison, c'est que *les échanges sont plus nombreux, dans des langages qui sont beaucoup plus accessibles pour les enfants puisque des enfants parlent à des enfants et que, donc, l'intervention du maître au sein d'un groupe a plus de portée parce qu'elle est préparée par une recherche et par un échange et une communication entre enfants* qui a fait avancer les choses et que, cette intervention du maître est également réexploitée avec la langue des enfants, d'autres enfants peuvent réinterpréter, reformuler l'intervention du maître dans un groupe de 4 par exemple, et donc, je crois que le travail en groupe est bénéfique en général.

Quelle proportion du temps ?

Je dirais 1/3 pour le travail en groupes.

Pour quel genre d'activités ?

Moi, je crois pour presque toutes les activités, sauf peut-être le calcul mental où ils travaillent individuellement puis en grand groupe, mais tout le reste, en numération, techniques opératoires, problèmes. 1/3, 2/3 ça me paraît raisonnable.

10. Différenciez-vous des types de problèmes ou de situations mathématiques que vous utilisez avec un usage différent ? différents types de problèmes avec des objectifs différents par rapport à l'apprentissage des maths ?

Disons que, il y a différents types de problèmes dans le sens où certains problèmes privilégient davantage telle ou telle compétence, je pense à des problèmes sans nombres qui pourraient privilégier l'aspect recherche logique, il y a d'autres problèmes qui privilégieraient la démarche hypothèses, erreurs, nouvelles hypothèses, il y a d'autres problèmes qui privilégieraient la connaissance du sens des opérations. Il y a des types de problèmes qui privilégient certains aspects, mais en réalité, ça reste toujours des problèmes quand même. Il y a des problèmes qui sont des éducatifs en quelque sorte, autrement il y a plein de types de problèmes, on peut utiliser des problèmes pour construire une connaissance, donc des problèmes de recherche, de construction d'une connaissance, les problèmes d'application de connaissances, des problèmes de méthodes, il y a des problèmes à dominante, par exemple géométrique qui demandent plus de compétences géométriques, il y en a d'autres qui demandent des compétences en techniques opératoires, des compétences différentes...

11. Quelle place pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire ?

J'ai tendance à penser que ce n'est pas très important, mais je n'ignore pas le fait que me trompe peut-être. Je n'en suis pas très sûr, mais, à titre personnel, je n'y attache pas une grosse importance. Je crois que vous allez avoir des réponses très controversées sur la géométrie.

Je ne crois pas que la perception que les enfants ont des mathématiques dépende du milieu social. Moi, j'ai l'impression que la perception qu'ils ont des mathématiques dépend principalemnt de l'enseignement qui leur est dispensé, parce que l'année dernière quand on a répondu au questionnaire[1] avec le collègue (l'instituteur B), moi avec une classe de milieu très favorisé et lui, avec une classe de milieu très défavorisé, on avait le même type de réponses finalement. *La manière dont ils travaillent en classe est un paramètre infiniment plus important que le fait d'être de tel ou tel milieu social.*

14. Peut-on enseigner des méthodes de résolution de problèmes ?

Peut-être que je répondrais par une question : *est-ce bien utile d'enseigner des méthodes de résolution de problèmes ? J'aurais tendance à dire que ce qui est important, c'est que l'enfant soit capable de mettre en place des stratégies de types différents en fonction de différents types de problèmes.*

Méthodes, ça peut être pris en un sens très large, ça peut être l'attitude.

Là, oui, on peut dire que *oui, au niveau notamment de l'appropriation de l'énoncé.*

Peut-on lui donner des conseils pour se comporter face à un problème ?

Là oui, mais *je ne crois pas que ce soit très général parce que si on donne un cadre trop strict, on va limiter les possibilités de stratégies* et, à échéance, on peut peut-être ne pas lui permettre d'aller au bout de certains problèmes alors qu'il en serait capable si on lui donne l'habitude de monter lui-même ses propres stratégies.

Ça dépend peut-être du niveau auquel on se place. Cette question avait été prévue initialement pour les professeurs de lycée.

Il y a un peu l'apprentissage d'une méthode, mais à l'école élémentaire, je ne suis pas très sûr que ce soit très important. Personnellement, j'aurais tendance à être plutôt réticent, ça risque d'être un peu rigide, limitatif, par rapport justement au futur, au collège ou au lycée où on essaie de structurer mieux les connaissances et les habitudes de travail des enfants, mais plutôt *à l'école élémentaire, les habituer à réfléchir, à chercher des méthodes, à voir des stratégies différentes plutôt que de donner une méthode bien stricte.*

1. Quel est principalement le rôle de l'école primaire pour vous : éducation, formation de la personnalité, mise en place des apprentissages de base, accès à une culture, socialisation, apprentissage de la vie en société, acquisition de méthodes de travail, autres...

On va graduer. J'aurais tendance à dire 1. *apprentissages de base* quand même, lire, écrire, compter, c'est les instructions officielles, je crois quand même que c'est le premier rôle de l'école élémentaire. Le deuxième rôle qui me paraît important, c'est *l'aspect socialisation,* que l'enfant se sente un être social, et peut-être un peu être citoyen, c'est-à-dire, les habitudes de prise de responsabilité, ça, ça me paraît très important. Après, en 3, je *dirais commencer à acquérir des méthodes de travail* ; le 2, c'est être bien dans sa peau dans un milieu social, dans une société, construction de la personnalité à l'intérieur d'un groupe, le 3, ce serait habitudes de travail. Le reste, acquisition d'une culture, je crois que, compte tenu du fait que l'école élémentaire n'est plus en fin de course, elle commence un peu, mais elle peut se poursuivre, ça ne me paraît plus prioritaire.

2. Quel est le plus important pour la bonne réussite de la scolarité primaire des élèves : j'avais mis 3 points, du côté de la famille, du côté de l'attitude de l'enfant à l'école, du côté des rapports avec l'enseignant (lecture rapide des rubriques du questionnaire).

Je dirais un, *le rôle de la famille,* il me semble qu'il est prépondérant. La réussite de l'enfant... que, pour la famille, *la réussite de l'enfant à l'école, soit importante,* c'est le premier point. Le second point, à l'âge d'un enfant de l'école élémentaire, je crois que ce qui est très important, *c'est la relation de confiance, le réseau de confiance qui s'établit entre enseignant, enfant, parents, le triangle* doit fonctionner. Il est important que la relation de confiance, à l'âge des enfants de l'école élémentaire, soit bonne entre l'enseignant et l'enfant, et c'est tout aussi important qu'elle soit bonne entre la famille et l'enseignant parce que l'opinion de la famille sur l'enseignant a une action sur l'enfant. Si l'enfant sent de la défiance de la famille par rapport à l'enseignant, il va y avoir souvent, souvent il s'investira moins lui-même, tandis que si ce triangle de confiance

[1] Il s'agit des questionnaires du chapitre 5.

est bien établi, je pense qu'on met l'enfant dans de meilleures conditions pour sa réussite.

Et, par rapport à l'écoute des élèves en classe, comment l'élève peut-il écouter?

Je crois que l'écoute des enfants, elle est comme leur attention, elle est sinusoïdale, ils ont des crêtes d'attention et des creux d'inattention. *C'est plutôt à l'enseignant de s'adapter, en sachant répéter plusieurs fois la même chose à différents moments* de façon à avoir une chance de tomber sur une notion très importante à un moment où l'élève est attentif.

Mais, est-ce que, pour écouter, l'élève doit vider sa tête, ou mettre des choses dans sa tête ?

Moi, je crois *qu'il ne peut écouter que si le sujet dont on parle peut avoir une représentation mentale pour lui, qu'il peut se représenter ce dont le maître parle*, s'il n'a pas de référence, s'il écoute quelque chose qu'il ignore totalement, sauf si c'est une histoire, un conte où il va rentrer dans le rêve, mais si c'est en mathématiques ou en grammaire, en conjugaison, dans des domaines de la connaissance, s'il n'a pas quelque chose, du matériau pour alimenter son écoute, il ne peut pas écouter à mon avis.

12. Attribuez-vous un rôle important à la mémoire ?

Oui, très important. Ça joue tout le temps, pour avoir des connaissances. *On ne peut faire travailler son intelligence que sur des connaissances,* et les connaissances, elles dépendent quand même de la mémoire. C'est utile quand on a par exemple à résoudre un problème, c'est utile d'être capable de retenir les différentes données, l'énoncé etc... donc ça, c'est pour les mathématiques, c'est vrai aussi en calcul mental, il faut être capable de retenir les nombres sur lesquels on a à travailler, ce qui n'est pas évident... mais c'est principalement important pour... il faut que les enfants connaissent quelque chose pour pouvoir réfléchir. *S'ils ne connaissent rien, ils ne peuvent réfléchir sur rien, d'où l'importance capitale de la mémoire.*

Et comment faire pour la développer ?

La faire travailler. Faire apprendre très systématiquement des choses par cœur, l'entraîner, faire des gammes, comme on peut faire des gammes au piano, donner aux enfants l'occasion d'entraîner leur mémoire, apprentissage de leçons d'histoire, géographie, sciences, poésie, même des leçons de mathématiques, grammaire. A mon avis, c'est très important, la mémoire.

13. Rôle du travail à la maison

Le rôle du travail à la maison, il est peut-être plus, dans un premier temps pour les parents que pour les enfants. Le fait qu'il y ait du travail à la maison, *ça rassure les parents, ça leur permet de s'y retrouver un peu par rapport à l'image qu'ils ont de l'école et c'est de bonne politique dans le cadre de la perspective d'une relation de confiance avec les parents, nécessaire aux bons résultats d'un gamin.* Ça, c'est le premier point, le second point, en ce qui concerne le travail strict, *il faut donner des leçons, pour alimenter la mémoire.* Donc, *les leçons, ça me paraît nécessaire et important* que les élèves en aient à la maison, pour travailler la mémoire qui est quelque chose d'assez important de mon point de vue. En ce qui concerne *le travail écrit*, il me semble qu'il faut que ça soit des *tâches assez simples*, des travaux écrits de l'ordre de la copie, de la reproduction, ou de l'ordre de la systématisation très simple. De temps en temps, on peut peut-être donner à la maison un travail qui va sensibiliser à une connaissance qu'on va aborder. Par exemple, on peut demander d'aller au supermarché pour voir les prix de différentes lessives et puis...

15. L'évaluation. Quelle place à l'évaluation, quels types de contrôle, que cherchez-vous à évaluer ? Est-ce que l'évaluation a un rôle dans l'apprentissage des élèves ?

L'évaluation est nécessaire. Dans l'école traditionnelle, c'est principalement une évaluation normative. On dit qu'à tel moment un enfant doit savoir ça ou ça, et on lui propose des exercices qui essaient de montrer s'il sait ça. *Je crois que c'est quand même insuffisant, qu'il y a d'autres sortes d'évaluations,* une évaluation qui doit se faire en cours d'apprentissage, qui peut être multiple. Il me semble qu'il est important qu'un enfant puisse s'autoévaluer au cours d'un apprentissage, c'est-à-dire qu'à partir d'une notion, il soit capable de dire "je ne comprends rien, je commence à comprendre, j'ai presque compris, j'ai compris. Il faut que, dans la progression vers l'apprentissage, il puisse se situer. L'évaluation qui peut se faire, c'est qu'au travers d'exercices qui ne sont pas de l'évaluation normative, mais de certains exercices qui permettent à l'enfant de se dire "je me situe dans la phase où je commence à comprendre, je me situe dans la phase où j'ai complètement compris". *C'est important que, dans l'évaluation, l'enfant puisse mesurer le chemin qui lui reste à parcourir pour aller vers l'objectif qu'on s'est donné. Il y a deux types d'évaluation indispensables l'une et l'autre, cette évaluation formative où l'on voit l'enfant évoluer et où il s'autoévalue aussi,* c'est très important, et puis, l'évaluation normative, de manière qu'à certains moments on puisse dire, ou il puisse se dire "ça, je sais", ou "ça, je ne sais pas" ou "je suis en train de savoir", de manière un peu plus stricte, mettre les points sur les i.

Et par rapport aux élèves en échec ?

Je crois que la notion d'échec, dans ce cadre d'évaluation, où il y à la fois de l'évaluation formative, où on essaie de faire prendre conscience à l'enfant de là où il en est, du chemin qu'il à parcourir et du chemin qu'il a déjà parcouru, dans ce type d'évaluation, pratiquement, les enfants ne sont pas en échec. Par contre ces mêmes enfants, à un moment donné, *on peut être conduit à se dire qu'ils sont en échec, à l'occasion d'une évaluation normative,* et je crois qu'elle est nécessaire parce que je crois qu'il est important qu'ils puissent se dire "ça, je ne sais pas le faire, je ne suis pas compétent dans ce domaine là, l'évaluation formative lui a montré qu'il était compétent jusqu'à un certain point mais il n'est pas arrivé jusqu'à la norme qu'on lui demande, ce qui ne veut pas dire ... et je crois que pour ça, *l'évaluation normative devrait pouvoir se faire à différents moments pour qu'il ne soit pas grave qu'à tel moment de l'année, on n'ait pas acquis telle notion. Au milieu du 2ème trimestre de CM1, qu'il n'ait pas acquis la technique de la division, que ce ne soit pas très grave et qu'il puisse se dire "à ce moment, j'en suis là",* mais il saura le faire à un temps t1 ou à un temps t2.

Le problème, c'est quand c'est la fin de l'année.

A la fin de l'année, il n'y est pas.

Vous pensez que l'évaluation formative contribue à dédramatiser l'autre ?

Oui, elles sont complémentaires et nécessaires l'une et l'autre. Si on ne fait que de l'évaluation normative, d'abord on met en place des stratégies pédagogiques qui ne sont pas les plus pertinentes, alors que si on fait de l'évaluation formative on est obligé de mettre en place des stratégies qui sont plus performantes au niveau pédagogique, et ça permet à l'enfant de se situer, de se voir évoluer et progresser. Mais il faut aussi nécessairement une évaluation normative de manière à ce que l'enfant, à un moment *donné, ne se leurre pas sur ses capacités et sache que logiquement il devrait savoir ça, et qu'il ne le sait pas.*

15 bis. qu'est-ce que vous appréciez le plus chez les élèves, qu'est-ce que vous essayez de valoriser le plus chez vos élèves ?

Ce que j'apprécie le plus chez un élève, c'est peut-être son imagination, sa capacité et son envie de communiquer avec les autres parce que ça conduit à ce que, en classe, quand se construit une connaissance, il puisse, sans réticence, dire ce qu'il a envie de dire, que ça soit bon ou erroné, parce que ça contribue... et les erreurs contribuent souvent à une meilleure appréhension des connaissances. Je prends un exemple très concret : un gamin qui, en grammaire, va dire qu'un adjectif va être complément circonstanciel de manière, c'est une bonne erreur, parce que ça permet aux autres d'appréhender, c'est pas bête, c'est pas ça mais c'est intéressant, c'est pas bête, c'est même intelligent. Donc qu'un enfant ait la volonté comme ça de s'exprimer, de dire des choses, les enfants ouverts...

Donc, c'est ça que vous essayez de valoriser chez les élèves, la communication ?

Oui, la communication, sans craindre de faire des erreurs, parce que l'erreur est quelque chose qui permet souvent de progresser. Ça va avec un statut de l'erreur dans la classe, un statut positif de l'erreur.

17. Si vous deviez caractériser les maths, quels termes choisiriez-vous? Il faut m'en proposer ! **Oui, théorie, outils pour résoudre des problèmes...** (lecture de la liste)

En 1, je dirais *langage, puis objets de savoir, outils*, pas seulement pour résoudre des problèmes mais outils... et puis théorie non, formalisme non plus, calcul pas forcément, abstraction pas forcément non plus. En tous les cas pour l'école élémentaire.

Et pour les maths en général ?

Pour les maths en général, il y a quand même l'aspect théorie, toujours l'aspect langage, c'est d'abord un langage en général donc langage, théorie, il y a encore outil, mais le plus outil de modélisation du réel.

2. INSTITUTEUR B

Par suite d'une erreur de manipulation, les réponses aux questions 3, 4 et 5 n'ont pas été enregistrées, ces réponses sont donc rapportées de façon imprécise.

3. Qu'entendez-vous par avoir des connaissances en maths pour un élève qui sort de l'école primaire ?

Des aptitudes à réinvestir des notions mathématiques pour analyser une situation, trouver la démarche, les outils mathématiques qui permettent de résoudre son problème.

4. Qu'est-ce qui manque à votre avis aux élèves en difficulté en maths, d'où viennent leurs difficultés, où se situent-elles ?

Très souvent, *ce n'est pas seulement en maths, mais notamment en français*. Ce qui leur manque, ce sont *des capacités d'analyse*, de la *mémoire*. Ils manquent de *méthode*, de *capacités de synthèse*, ne peuvent trouver un processus. Les élèves en échec le sont en maths et en français à 80%. Il existe des élèves qui ont des capacités en maths et de grosses difficultés en français. L'inverse est rare au niveau du primaire.

5. Que doit faire un élève en classe, à la maison, pour progresser en maths ?

Suivre la classe, c'est difficile de travailler à l'extérieur. Surtout en classe, suite aux différentes situations de recherches, aux questions qu'il peut se poser, *cerner la problématique. Souvent, l'élève est en échec parce qu'il ne comprend pas la problématique. Il faut l'aider à faire l'inventaire des outils qu'il a, affiner une technique opératoire.* L'attitude de l'élève est importante : *une certaine curiosité, une motivation* pour une situation qui est souvent plaquée.

6. Quels ont d'après vous les critères d'un bon enseignement des mathématiques ?

Avoir une bonne formation en mathématiques, une bonne connaissance théorique donc, au niveau pédagogique, *trouver des problématiques qui peuvent intéresser les enfants*, ensuite, *créer des situations de questionnement, mettre en situation de recherche, et enfin*, je le disais tout à l'heure, *l'aider à faire l'inventaire de tous les outils.*

Est-ce qu'on peut toujours mettre en application cette démarche, c'est non, et la *raison principale, c'est le temps.* C'est mettre les notions en place, par exemple les fractions, c'est vrai qu'on y passe un très très long moment, avec, c'est vrai, certains résultats, mais, compte-tenu du programme, des acquis que doit avoir l'enfant en fin de CM2, *on a un très lourd programme, et on ne peut pas toujours avoir cette démarche, moi, c'est vraiment mon problème, ici en tout cas.*

Pensez-vous qu'il y a quelque chose de particulier par rapport à cette démarche dans le cas des élèves en difficulté ?

C'est évident qu'avec des enfants plus rapides, on fait une économie sur certaines phases, notamment la phase réinvestissement, réemploi des notions. La démarche de recherche et d'analyse, je la vois à peu près équivalente, quel que soit le niveau des enfants, par contre, au niveau du plus systématique et du réemploi, on gagne beaucoup de temps.

C'est-à-dire qu'on peut en faire moins quand les élèves sont plus à l'aise?

Oui, je pense qu'on peut gagner du temps sur cette étape, et le corollaire, c'est que, *avec les enfants en difficulté, on a toute une période de recherche et d'analyse, et c'est vrai que, le temps passant, on est peut-être un peu tentés de négliger l'aspect systématisation, répétition, ce qui est un peu une contradiction.*

7. Pensez-vous que tous les élèves puissent acquérir les notions des programmes de maths jusqu'en 3ème ?

Je ne suis pas très bien placé pour répondre. *A priori, jusqu'en 3ème, je pense qu'une très grande majorité des enfants peuvent acquérir les notions.*

Et, jusqu'en terminale B ?

Là, ça me semble déjà... par des souvenirs de discussions avec des amis profs, ça me semble nettement se compliquer, *au niveau de l'abstraction, ça me semble déjà un niveau assez difficile.*

1. Quel est d'après vous, le rôle essentiel de l'école primaire ?

Je serais tenté de dire comme le ministre, *les 4 opérations.*

D'une manière plus générale ? (lecture des rubriques de la question)

Sur un plan assez général, c'est essentiellement *acquérir les notions de base et une certaine rigueur et une certaine maîtrise dans le travail, dans les méthodes* *de travail, dans l'anayse des problèmes...* formation de la personnalité, je suis plutôt sceptique, les maths...

D'une manière générale...

Ah, d'une manière générale ! effectivement, *acquisitions de base*, ça, ça me paraît évident, *méthodes de travail* bien évidemment, mais aussi, *formation déjà, d'une personnalité naissante*, oui et puis bien sûr dans le futur...

Qu'est-ce que vous mettriez en priorité ?

Du fait du caractère un peu particulier de l'école dans laquelle je travaille depuis 5 ou 6 ans, *en dehors de la formation de base, je crois que la formation de la personnalité*, de la manière dont un adulte se conduit... ne sont pas du tout négligeables, c'est sûr.

Donc, ça dépend du recrutement ?

Il est évident que notre intervention est beaucoup plus large dans un milieu défavorisé que dans une école de Neuilly, je suppose, où ce travail se fait ailleurs, et où l'instit peut à la limite se cantonner à son rôle social de transmission des connaissances... mais il faudrait peut-être affiner.

On n'a peut-être pas non plus les mêmes objectifs à l'école élémentaire et au collège?

Justement, c'est peut-être là aussi le problème. Jusqu'à une époque assez récente, le collège avait un public sélectionné, formation des élites, et *depuis la démocratisation massive, la 6ème, c'est maintenant le processus normal, et je crois qu'il faut revoir les objectifs et les manières de travailler au collège*. Et ça me semble quand même relativement urgent.

2. Encore sur un plan général, quel est le plus important pour une bonne réussite de la scolarité primaire d'un élève (lecture des rubriques générales)

Je crois que c'est effectivement un peu tout ça, je crois que c'est surtout *la vision valorisante de l'école que peut avoir l'enfant*. Ça, ça me paraît la première, la condition sine qua non. *Un enfant qui accorde de l'importance à ce qui se passe à l'école*, qui en a une vision positive ..., est-ce que c'est suffisant ? Ce n'est pas évident puisqu'on constate que des enfants, pendant le temps scolaire, ont une vision assez positive et pourtant sont en échec. Ce qui va évidemment de pair, *c'est sa situation familiale, économico-familiale*, ensuite une relation dans sa famille, *un apport culturel, enfin une valorisation du travail culturel* qu'on fait à l'école ou en dehors, et bien sûr *un suivi du travail scolaire* de la famille. Si les deux premières conditions sont réunies, si la famille n'a pas le temps, sur le plan humain, de s'intéresser à ce que fait son enfant, il y a un manque quelquepart.

Ce qui concerne la famille vous paraît plus important que ce qui concerne l'école?

Finalement, je pense que oui. Pour un enfant culturellement favorisé, il s'en sortira de toute manière.

Il y en a quand même qui échouent !

C'est exceptionnel. Après, il y a des raisons psychologiques etc... Mais, *culturellement favorisé au sens où tout se met en place, il réussira dans tout type d'école*, même une école défavorisée, l'inverse bien sûr n'étant pas ...

Mais il y a quand même des enfants de milieu défavorisé qui réussissent à l'école !

Bien sûr ! Disons que *les enfants défavorisés sur le plan économique, ça doit pouvoir se voir, mais défavorisés sur le plan affectif ou familial, non je ne crois pas, enfin je crois que c'est excessivement rare.* Ici, tous les enfants qui, même d'un milieu défavorisé réussissent, ils ont quand même un certain équilibre sur le plan affectif...

Il y a peut-être un seuil et des différences individuelles, dans une même famille défavorisée, il peut y avoir des enfants qui réussissent mieux que d'autres.

Oui, il y a le côté affectif aussi. On avait le cas ici d'un enfant, qui a 2 ans de retard, ne sait ni lire ni écrire en CM2, le frère a le tableau d'honneur au CES, dans la même famille. D'après ce que l'on sait, ce sont des jumeaux, et des jumeaux dans une famille maghrébine, ça n'a pas la même signification que chez nous, il y a toujours le bon et le mauvais.

Il y a quand même des facteurs liés à l'école dans la réussite des élèves ?

Pour un enfant qui a une vision très positive de l'école, une vision culturelle positive, je pense que l'enseignant lui fournit matière à réfléchir, sans plus... Ce n'est pas tout à fait aussi simple que ça, mais... Si tout va bien dans la famille, dans l'école, à la limite si l'enseignant lui fournit simplement de quoi exercer son intérêt, je crois que ça va tout seul...

Quels sont les facteurs de réussite à l'école, que ce soit dans l'attitude de l'élève (lecture des facteurs) ou du côté de l'enseignant ? Qu'est-ce qui vous paraît le plus important dans les facteurs de l'école ?

Je crois déjà que *c'est que l'enfant fasse naître une relation affective assez importante avec l'enseignant.* En primaire en tous cas, ça me paraît évident, surtout dans les petites classes. Si, sur le plan affectif, il ne se passe rien entre l'enfant et son maître, ça sera plus difficile. Ce sera largement favorisé s'il se passe quelque chose. *Pour le reste, il y a effectivement un enfant qui écoute, qui est attentif, c'est quand même mieux, un enfant qui fait le minimum de travail dans les situations à la maison, ou de recherche... mais tout ça, c'est finalement engendré par la vision de l'école, donc...*

Comment l'élève doit-il écouter en classe ? qu'est-ce que c'est écouter?

Je crois que d'abord *c'est comprendre*, c'est pas simplement écouter, c'est comprendre une démarche, c'est parallèlement *s'interroger et faire un va-et-vient avec son interlocuteur.* Finalement, c'est plus *un échange* qu'une écoute passive.

8 et 9. Le travail en groupes peut-il améliorer les résultats de l'apprentissage individuel des élèves ?

Très certainement. En ne prenant pas uniquement le maître comme interlocuteur privilégié, mais en choisissant aussi d'autres camarades, après il y a tout l'aspect socialisation, échanges, etc... Ceci dit, j'ai beaucoup de mal à le mettre en place.

Le pratiquez-vous ? A quelle fréquence ? Pour quels types d'activités?

Je le pratique assez rarement. Les raisons en sont les difficultés d'organisation d'une part et puis un rendement toujours... par rapport au temps que nous avons... un rendement relativement faible.

Les élèves aiment-ils travailler en groupe ou ont-ils des réticences?

Les bons élèves, qui sont relativement leaders, généralement apprécient le travail en groupes. Les autres, les plus faibles, je crois que ça les laisse assez indifférents. C'est un peu l'occasion de rester dans leur coin, sans être sollicités par le maître, c'est peut-être un moment où ils se mettent en retrait facilement. On fait à certaines occasions des travaux de groupes, travaux de lecture par exemple. En mathématiques, on fait par exemple des échanges de message, c'est plutôt des paires que du travail de groupe.

C'est parce que vous pensez que c'est moins efficace ou parce que vous rencontrez beaucoup de difficultés pour le mettre en place avec les élèves que vous avez ?

Les deux. D'une part, une efficacité assez faible et d'autre part des difficultés d'équilibrage, de mise en place, ça c'est assez complexe, ils ont justement des niveaux... Déjà cette année, j'avais deux niveaux de classe (CM1-CM2), donc j'avais déjà un effort pour dissocier les deux niveaux, les deux programmes, mettre en place des travaux de groupe en plus, ça me paraissait assez complexe.

Justement, vous pouviez mettre en place des travaux de groupe dans un niveau pendant que vous vous occupiez de l'autre niveau.

Oui, mais *ça veut dire une certaine autonomie*, ça veut dire... Quand je faisais référence au rendement, c'est vrai qu'on a des élèves en difficulté, peu autonomes, donc référant au maître, qui manquent de méthodes, qui ne savent pas lire... donc un travail de groupes, c'est très dur...

(Exposé de nos objectifs dans le travail en 6ème de cette année et des difficultés rencontrées notamment dans la mise en place du travail en groupes).

C'est vrai qu'on a observé que les travaux de groupes marchaient bien avec des bonnes classes, c'est là où ça prenait tout son sens, c'est là où les élèves communiquaient, échangeaient et progressaient, mais c'est vrai que dans les classes en difficulté, on a beaucoup plus de mal. Les gosses restent avec leurs problèmes et finalement...

10. Pour les différents types d'activités en maths, quelle répartition vous paraît adéquate entre résolution de problèmes, apprentissage de techniques, mémorisation de résultats, manipulations par les élèves ?

Ce qui me paraît indispensable, c'est la phase de recherche qui doit être assez longue, la plupart du temps avec manipulations, que ce soit fractions, aires..., c'est sans doute la plus longue. Donc, *ensuite, une phase d'analyse, de discussion où on fait apparaître la notion elle-même.* Ça, si la première partie du travail a été bien comprise par les enfants, ça va relativement vite, *ensuite une partie réinvestissement systématique, qui généralement ne pose pas trop de problèmes bien qu'il faille toujours y revenir en cours d'année, et puis une dernière phase de réemploi en situation. C'est là qu'on a pas mal de surprises, c'est à ce niveau là qu'il y a un fossé qui me semble pas toujours évident à combler. Je serais tenté de dire que ce fossé n'est pas lié aux maths,* il est lié à analyser une situation, faire une bonne lecture, faire une analyse, une synthèse, à d'autres notions extérieures aux maths.

Finalement, ce que vous pensez responsables du fossé, ce sont les capacités extra-mathématiques qu'il faut mettre en jeu dans ce genre de tâches ?

Exactement. *Au niveau de la phase exercices, on a une certaine uniformité au niveau des résultats de la classe, tandis qu'au niveau problèmes, que ce soit problèmes traditionnels ou situations, c'est là qu'on a de grosses différences.*

12. Quel rôle attribuez-vous à la mémoire ?

Ça joue évidemment un rôle important, en maths. Par la mémoire, on peut faire référence à une situation analysée antérieurement, et par modélisation trouver des solutions. Il y a des enfants qui, notamment dans les situations de recherche, peuvent se rappeler que, tel type de problème, on l'avait résolu de telle et telle manière, la modélisation.

Est-ce important de l'exercer ?

Oui, à l'école primaire, je crois qu'on s'efforce de l'exercer, plus spécialement dans des matières autres, poésies, leçons à apprendre, qu'en mathématiques.

En mathématiques, il y a quand même les tables.

Oui, mais c'est vrai que je ne leur donne pas tellement de leçons de maths à apprendre. Quand je disais tout à l'heure un effort en classe avant tout, mis à part les tables bien entendu, ça ne me paraît pas tellement une matière susceptible de faire travailler la mémoire. Si, il y a des questions de géométrie par exemple, et encore.

13. Quel est le rôle du travail à la maison ?

D'abord, je rappellerais que, *par les textes, il est interdit.* Il y a des gens plus compétents qui se sont penchés sur la question.

Il y a peut-être des différences entre le CP et le CM2 ?

Effectivement, il a été question d'abolir ce texte, mais il n'a pas été aboli. Il est bien évident que chacun accorde une certaine importance au travail à la maison. Pour moi, *le principal, c'est qu'il y ait une liaison avec les familles, le travail à la maison se fait avec la famille, ça la met au courant de l'évolution des acquisitions,* ça permet une discussion sur les résultats, ça devrait permettre une meilleure approche de l'école entre l'enfant et sa famille d'une part, entre la famille et l'école d'autre part. *C'est l'occasion de travailler avec son enfant. J'y vois aussi un entraînement,* notamment pour le CM, *au niveau du secondaire, pour le collège où les profs semblent avoir des exigences assez importantes au niveau du travail individuel, donc notre rôle, c'est de préparer les enfants.* Au niveau du primaire lui-même, ça peut être aussi l'occasion du contrôle de la bonne aptitude à réinvestir ces notions. Ça pourrait se faire aussi en classe. Bien évidemment, enfin, c'est *un entraînement au travail individuel, gérer son temps, ses procédures sans aide, finalement d'autonomie.* Ça, ce sont les côtés positifs, il y a aussi une quantité d'aspects qui me semblent négatifs, le premier étant *les journées scolaires qui sont très lourdement chargées et demandent aux enfants un effort très important* et un travail scolaire, c'est-à-dire qui irait dans la même idée que ce qu'on fait à l'école, me paraît très très lourd. *Je ne pense pas pour autant qu'il ne faille faire aucun travail intellectuel à la maison. Prendre un bon livre peut être aussi utile que de faire n'importe quel Bled.*

Mais il y a peut-être des enfants qui font un travail intellectuel hors scolaire à la maison, et d'autres qui n'en font pas.

Sauf que le travail scolaire, il n'est que scolaire. Si, nous les enseignants, on demande un travail scolaire, d'accord, il y aura un travail intellectuel qui se fera, mais il n'y aura pas le reste. C'est pour ça que *je pense que dans le type de devoirs qu'on peut demander aux enfants, peut-être qu'il faut donner une activité intellectuelle, mais pas une activité scolaire.* Je vois un peu ça comme ça.

L'école peut demander aux enfants hors de l'école un activité intellectuelle non scolaire ?

C'est ça. Lire un livre, faire de l'informatique, toutes ces choses là.

Ça ne peut être que suggéré ces choses là ?

De toute façon, c'est toujours suggéré. Si, ça peut être exigé, demandé disons, qu'un certain travail intellectuel se fasse. *Ça pose aussi le problème des familles qui ont une attente très particulière du travail scolaire et qui pensent à refaire des opérations à la maison par exemple, alors que, quand on a compris le système,* demander à l'enfant de faire des opérations, je n'en vois pas l'utilité. Il y a une attente de la famille par rapport à l'école et d'une certaine manière, pour être en phase avec la famille, beaucoup d'entre nous donnent un travail qui ne correspond pas forcément à ce que j'expliquais avant. Pour une meilleure harmonie, on peut avoir tout un travail d'explication dans les réunions mais ça ne passe pas trop bien.

15. Quelle place faites-vous à l'évaluation des élèves ? Que cherchez-vous à évaluer ?

Disons qu'après chaque notion importante, on procède à une évaluation. *Ce qu'on cherche à évaluer, ça devrait être le réinvestissement, la capacité de réinvestissement, mais, étant donné l'échec qu'on pressent, ça se déplace finalement à un réinvestissement plus systématique, type plus technique systématique. Les craintes qu'on peut avoir par rapport à des situations nous amènent à vérifier que la technique, déjà, est mise en place.*

Le réinvestissement, on peut aussi le voir dans des situations qui ne sont pas notées.

Bien sûr ! Là, il y a l'aspect note, évaluation et note, ce n'est pas forcément la même chose. Je parle du contrôle traditionnel, noté, sinon, à chaque fois que... à chaque période de mise en place des notions on a toujours toute une série de..., *soit par questionnement oral, soit par petits exercices rapides, on essaie toujours de savoir si on peut passer à l'étape suivante.*

Pensez-vous que l'évaluation a un rôle dans l'apprentissage des élèves?

Je serais tenté de dire pas vraiment, mais évidemment, elle est essentielle pour le maître, autrement, l'évaluation avec des notes, intervient tout le problème de la notation. *Je ne pense pas que la succession de mauvaises notes puisse engendrer un effort. Si, pour un enfant qui serait en progrès, s'il constatait que ses notes montent, dans ce cas, c'est positif, mais dans tous les autres cas, c'est complètement négatif.* Pour caricaturer, c'est vrai que le 0 en dictée toutes les semaines, ça a un effet à terme qui est complètement désastreux.

Donc, dans l'ensemble, vous pensez que c'est plutôt négatif ?

Oui.

Mais, ce qui m'a frappée avec les enfants en difficulté en 6ème, c'est l'importance des notes, et le refus du travail gratuit.

C'est vrai. On ressent également ce sentiment. Mais, c'est vrai que, d'une manière générale; *quand on donne le travail, il semble avoir plus d'importance quand il est noté. Mais je crois aussi que c'est une attitude superficielle.*

Une attitude qu'ils se sont construite à l'école ?

Ça, oui, complètement. *C'est vrai que, très souvent, dès qu'on commence un travail, on entend "est-ce que c'est noté". Ceci dit, je ne pense pas que notre réponse change vraiment l'investissement, je pense que c'est plus une attitude de surface,* due...Les parents sont inquiets de la note, donc on fait comme si on était inquiet de la note. C'est vrai que les élèves aiment bien, mais collectivement, comme ça, quand on en discute... Ce que j'ai pu entendre, c'est *"vous gagnez bien de l'argent quand vous travaillez, nous c'est notre note"*, ils assimilent ça de cette manière là. Je trouve aussi qu'on a un rôle à jouer là. *Il y a la responsabilité des enseignants d'"une part, des familles d'autre part.* Quand on disait l'éducation de la personnalité, là il y a peut-être un travail à faire. Mais je pense que c'est complexe à gérer.

16. Quels types d'action vous paraissent efficaces pour réduire les difficultés des élèves en maths à l'école primaire et au collège, en 6ème ?

Je serais tenté de penser que ce qui manque le plus c'est du temps.

Est-ce que ce n'est pas un peu contradictoire puisque vous pensez qu'ils sont déjà surchargés ?

Non, je pense que si le programme de CM2 se faisait en 2 ans, ça serait parfait. Je pense qu'il faudrait rajouter un an au cycle primaire, en gardant la même somme de ... J'ai vraiment le sentiment que si j'avais plus de temps, il n'y aurait pas d'échec en maths en primaire. *Je m'aperçois quand même que si les notions sont plus mal passées, c'est parce qu'il y a une phase qui a sauté, soit la recherche, soit le réinvestissement, soit l'entraînement, peu importe. Je crois que, vraiment, mon problème, c'est le temps.*

Vous pensez que, par exemple, pour certains élèves, on pourrait faire un cycle CM1, CM2 en 3 ans et que ça serait un moyen efficace ?

Je pense, oui. Finalement, rentrer en 6ème avec un an de maturité de plus, mettre un an de plus, ça serait bien.

Mais tous les élèves n'en ont pas besoin ?

Je serais tenté de dire que pour les miens, si, parce que, même ceux qui... J'ai une vision un peu particulière, mais je serais tenté de dire que, dans une école défavorisée comme la nôtre, c'est le problème. A la limite...

Il y en a beaucoup qui ont eu un an de plus, avec l'effet des redoublements.

Mais ce n'est pas pareil. Un redoublement, c'est quand même quelque chose qui n'est pas évident à assumer et on refait une partie.

Alors, un système plus souple dans toutes les classes ?

Des groupes de niveau par matière, français, maths, éveil... *L'expérience prouve que, partout où ça s'est mis en place, à moyen terme, ça se termine en classes de niveau, forte, moyenne, faible.*

Votre collègue que j'ai interrogé m'a dit qu'ils vont essayer de faire ça dans leur école.

Ça me paraît une bonne..., en tout cas, c'est à tenter. *Je ne pense pas que ce soit adapté mais je crois que c'est à tenter.* ça demande une organisation assez complexe, au niveau des enseignants, ça demande une concertation, c'est des expériences qui ne sont pas faciles à mener, on y songeait un peu... on y a songé ici, très vaguement, c'est vrai qu'on s'est posé la question.

et avec des "adapt" éclatées ? Elles fonctionnent encore de façon éclatée ici ?

Non, c'est fermé, à un moment, ça a fonctionné comme ça, mais ça dépend du personnel, ce n'est pas suite à un bilan négatif, mais, à un moment donné, personne n'était nommé, on ne pouvait pas décider que ça fonctionnerait. Sinon, *oui, un fonctionnement par groupes de niveau, mais il faut prendre bien garde, si on travaille sur un tel projet, que le projet ne soit pas dévoyé, et vraiment, il l'est très souvent.*

Pensez-vous que pour des élèves en difficulté, il soit profitable de faire un cycle 6ème-5ème en 3 ans, et à quel type d'élèves pensez-vous que ça puisse convenir ?

A priori, je pense que ça peut être une solution. Je pense que ça se mène pas mal, dans pas mal de CES.

Pensez-vous que ça puisse être une solution pour tous les élèves qui arrivent en 6ème avec des difficultés, sinon, avec quels élèves cela vous paraît-il une solution ?

Ça, c'est la question piège. On serait tentés de répondre "aux enfants un peu lents mais pleine de bonne volonté, travailleurs", ce qui veut dire qu'il y a quand même tous les autres. Si on rentre là-dedans, on arrive très vite à des classes en 2 ans, rapides fortes, à des classes moyennes avec un cycle en 3 ans, et puis à des classes dépotoir où les élèves vont faire leur cycle en 2 ans aussi, avec l'échec certain à la fin pour l'orientation. Donc un projet de classes de niveau, ça doit vraiment être... je crois qu'il faut vraiment se donner tous les moyens, des enseignants de qualité dans les niveaux difficiles, et pas le contraire comme ça se fait assez souvent, la classe dont personne ne veut *qui échoue à l'A.E. qui arrive etc... des profs motivés, avec un objectif précis de ne pas créer des classes dépôt. C'est vrai qu'il y a une certaine contradiction entre la tentation de faire des groupes souples, et en même temps une certaine crainte ... le gosse qui échoue dans une matière, qui échoue aussi souvent dans d'autres qu'on le retrouve toujours dans le niveau inférieur et que finalement, ça ne soit pas plus valorisant.* Après restent les moyens donnés à ces classes, c'est évident *petits effectifs... profs motivés, moyens supplémentaires, financiers pour tenter d'autres expériences. ...*

Pour en revenir à notre question, *un cycle 6ème - 5ème en 3 ans, ça me paraît une bonne solution.*

(Je parle de l'expérience de l'année en 6ème.)

Il me semble qu'il y a une question qu'il faudrait travailler, c'est celle des liaisons CM2-6ème. Le changement qui s'abat sur la tête des gosses, pour ceux qui ne sont pas très solides... *Maintenant, ils ont la même fonction que l'école dite laïque, obligatoire du siècle dernier, c'est-à-dire qu'ils ont une vocation à scolariser tous les enfants...* c'est vrai qu'à la limite, l'école primaire remplit grosso modo son rôle, et qu'on ne comprend pas très bien pourquoi le collège ne peut pas remplir ce rôle là. *Je pense quand même que la structure du CES... il y aurait peut-être des choses évidentes à mener...*

Quoi, par exemple ?

Réduire le nombre de profs par exemple... Je vais me faire incendier, je le sais bien, mais passer d'un seul instit à...

Ne faut-il pas regarder globalement le problème école-collège, et s'il faut faire un intermédiaire, on pourrait le mettre avant, peut-être un cycle intermédiaire CM, 6ème - 5ème, avec 2 instituteurs au CM ?

Oui, mais grâce effectivement à l'instit unique qui arrive à faire dans sa classe un certain nombre de choses, l'échec est quand même relatif, alors qu'il est semble-t-il hyper-massif au niveau du collège. Quand je discute avec des profs de collège, ça semble l'horreur intégrale, alors que je ne vois pas d'instit qui ait la même définition de son boulot.

Mais l'école primaire a toujours accueilli tous les enfants alors que certains profs de collège, pas les plus jeunes, ont vu un changement dans leur recrutement. La vision de ce qu'est l'échec n'est peut-être pas la même à l'école primaire et au collège. Le même phénomène peut être vu de façons différentes ?

Les profs doivent réaliser que le collège a changé de vocation. C'est vrai que les profs agrégés...

Il n'y en a pas dans les collèges, il n'y en a plus du moins, en tous cas en mathématiques.

C'est aussi un problème de classe sociale. Comment, finalement, éduquer les enfants du peuple ? pour prendre un langage un peu langue de bois, comment la bourgeoisie peut-elle faire l'enseignement ? C'est assez normal qu'elle fasse la classe à l'élite. Je pense que ça fonctionne très bien et qu'il n'y a pas vraiment de problème d'échec scolaire. C'est vrai qu'il y a des individus qui se préoccupent de l'échec scolaire. C'est vrai qu'il y a des commissions très sérieuses et motivées qui s'en occupent, mais en termes d'analyse...

Mais, on a besoin maintenant de davantage de formation et on veut que les élèves réussissent pour des raisons économiques.

Oui, mais on n'aura pas besoin de 80% d'une classe d'âge en tant que cadres dirigeants de la nation. Qu'on en ait besoin plus maintenant, sûrement mais je me demande s'il y a vraiment un problème d'échec scolaire. *L'école remplit parfaitement son rôle de sélection sociale...* Dans chaque institution, il y a des éléments avancés qui réfléchissent mais, globalement, ça fonctionne bien.

15 bis. Qu'est-ce que vous appréciez le plus chez les élèves, individuellement ou en classe, qu'est-ce que vous essayez de valoriser le plus ?

Je crois que c'est le rendement par rapport à l'investissement, ce qu'on pourrait pratiquement résumer par l'effort, c'est-à-dire l'enfant qui a un niveau très faible mais qui, dans son attitude en classe, à la maison, progresse, même peu. Du bon élève, j'attends plus.

C'est par rapport à l'évaluation ?

Oui

Alors, plus généralement, quelle genre de qualités cherchez-vous à valoriser chez vos élèves ?

C'est complexe. *L'effort,* évidemment encore une fois, *la méthode, une certaine forme d'investissement, des choses qui sont du domaine de la personnalité, respect d'une manière générale...*

17. Si vous deviez caractériser les maths, quels termes choisiriez-vous?

D'abord, je crois que c'est une *science exacte, rigoureuse, méthodique.*

Après lecture des termes du questionnaire

De l'abstraction sûrement, les autres plus ou moins mais il n'y a aucun des termes, si *des outils... modéliser le réel,* certes, mais aussi *résoudre des situations théoriques,* mais des outils de toute façon...

3. INSTITUTEUR C

1. Rôle essentiel de l'école primaire

Dans les *acquisitions,* c'est ce qu'il y a dans les instructions officielles, *lire écrire, compter.* J'ajouterais *l'autonomie,* parce que c'est un point très important, en dehors des connaissances qu'on doit acquérir, mais je crois que l'autonomie, c'est peut-être ce qui n'est pas encore assez pratiqué et en fait, pour la 6ème et le reste, c'est un gros point, très important.

Aussi bien au niveau général qu'au niveau méthodes de travail ?

Ah, oui, oui, complètement ! Bien sûr !

Comment différenceriez-vous entre le CP et le CM2 ?

Déjà, *il faudrait davantage pratiquer le travail de groupes,* ça paraît être une chose qui peut se mettre en place... en CP on peut, peut-être moins systématiquement. *Les faire travailler, plus ou moins par contrat, avec un système beaucoup plus souple,* ça, peut-être plus à partir du CE2 parce que ça me paraît plus difficile en CP, CE1. Peut-être *moins de leçons magistrales et davantage d'interventions de l'enseignant auprès des enfants,* mais de façon personnelle, de façon à *les faire progresser à leur rythme, de façon à ce que chacun puisse travailler ses difficultés,* moi, je vois plutôt ça comme ça, mais CP, CE1, c'est vrai que c'est encore un peu dur. Par contre, le travail de groupes, oui, ça me semble possible.

Le travail de groupe comme moyen d'acquérir de l'autonomie ?

Oui, complètement.

2. Qu'est-ce qui vous paraît le plus important pour la bonne réussite de la scolarité primaire d'un élève ?

Déjà, il faut qu'il y ait une *bonne cohésion entre l'école et la famille,* c'est déjà important. Il me semble qu'il faut que *l'enfant soit soutenu,* d'un côté et de l'autre d'ailleurs, à la maison et à l'école, que *le lien soit fait,* ce qui n'est pas toujours fait. Il me semble que s'il peut avoir *un environnement attentif au niveau livres...* un soutien de la part de la famille, que les parents derrière puissent, dès que quelque chose est lancé, lui permettre d'aller soit en bibliothèque, soit dans un musée, ce genre de soutien là, de façon que l'enfant puisse avoir le maximum de chances, voir le maximum de choses.

Et à l'école, qu'est-ce qui vous paraît le plus important pour la réussite ?

Je reviendrais toujours à ce problème *d'autonomie* : il faut qu'ils soient autonomes, qu'ils sachent se débrouiller, qu'ils sachent utiliser des outils, qu'ils aient des outils à leur disposition pour pouvoir résoudre n'importe quelle situation qui se présente à eux. Normalement, *l'école devrait leur permettre d'acquérir un certain nombre de techniques, et quand quelque chose se présente à eux, ils devraient pouvoir en sortir une du tiroir et l'appliquer.*

Avez-vous changé à ce propos au cours de votre carrière ?

Je pense cela maintenant, mais, vraisemblablement, je ne le pensais pas en débutant. *En débutant, j'ai plutôt vu les acquisitions qu'on devait avoir, au niveau connaissances, et je n'ai pas tellement perçu qu'il fallait des moyens,* que ces moyens n'étaient pas forcément les mêmes pour tout le monde, pour arriver au même résultat j'entends, c'est vrai que ça, je l'ai découvert petit à petit.

3. Qu'est-ce que vous entendez par avoir des connaissances en maths pour un élève qui sort de l'école primaire, qu'est-ce qui vous paraît important ?

Déjà, *la maîtrise des opérations* est quelque chose d'important. Mais au moins aussi important, c'est de *savoir résoudre un problème sur n'importe quoi.*

Au niveau des méthodes ?

Oui, et aussi avoir les connaissances qu'il faut. *Je veux dire qu'un enfant ne soit pas désarmé en face d'un problème, quel qu'il soit,* et c'est peut-être ce qui pêche le plus. On a l'impression que ça ne passe pas du tout, même si on le travaille, ou alors c'est qu'on le travaille mal, c'est possible aussi. Mais on a l'impression que, dès qu'on fait un problème, les enfants sont désarmés. Justement, j'en parlais avec un collègue du CM2, ils savent les opérations, mais par exemple, sous prétexte que c'était un problème, ça ne les a pas gênés d'avoir un demi costume. Donc, là il y a quelque chose qui ne va pas, il y a un manque de réflexion. On devrait être capables de leur donner... les enfants devraient être capables de réfléchir et de ne pas sortir des énormités comme ça. Et ce n'est pas forcément seulement avec un milieu comme ici. Où qu'on soit, pour les gens avec qui j'ai pu discuter, ça se passe aussi. Ça, ça me semble quand même un point important, parce que, *s'ils ont des connaissances, c'est bien, mais s'ils ne savent pas les utiliser, il y a quand même quelque chose qui ne va pas.*

Qu'ils aient du sens critique ?

Le sens critique, oui, et puis *savoir sortir des boîtes ce dont on a besoin, ne pas être gêné par une formulation, et puis réfléchir tout bêtement.*

4. Qu'est-ce qui manque, à votre avis, aux élèves en échec en maths, d'où viennent leurs difficultés ?

Il manque *déjà la réflexion qui doit venir d'un manque de concentration*– déjà peut-être qu'ils ne savent pas lire, attention avec des guillemets, lire au sens intelligence, peut-être aussi qu'il y a un manque de concentration aussi. En CP, CE1, ce qui les met en échec, c'est la *latéralisation* qui est mal acquise, et ça, ça pose des problèmes en numération, en géométrie, même dans un tableau à double entrée, ils vont être perdus, alors que ça, vraisemblablement, CE2 il y a peut-être encore des problèmes, mais CM1, CM2, je pense que ça, c'est acquis et les problèmes ne sont pas tout à fait les mêmes. Par contre, *il sont peut-être à la limite plus attentifs dans les petites classes à des situations problèmes,* peut-être parce que c'est plus court aussi, mais *on a l'impression qu'ils sont plus vifs, moins bloqués, ils vont peut-être être un petit peu plus astucieux que après. Après, on a l'impression qu'ils sont noyés, qu'ils lâchent tout de suite, ce n'est plus la même façon de réagir.* Il y a longtemps que je n'ai pas eu des grands aussi.

Est-ce que ce n'est pas aussi un phénomène cumulatif et quelque chose qui se construit à l'école le fait de prendre l'habitude de faire quelque chose qui n'a pas de sens. Comment expliquez-vous cette différence entre les petits et les grands ?

Déjà, ils n'ont pas connu d'échec, alors ils ne sont pas bloqués, et puis ils ont peut-être une plus grande soif d'apprendre, peut-être aussi que ça démarre plus du jeu, c'est un peu aussi ma façon de procéder, *ils n'ont pas de vécu négatif,* donc ils rentrent mieux dans la situation, ils n'ont pas ce que peuvent avoir certains grands effectivement, *un passé difficilement vécu qui va quelque part les bloquer* et puis plus rien ne va sortir. Le problème, *on sait bêtement qu'il va falloir mettre des opérations, alors on va en mettre, tant pis si ça n'a pas de sens.* Les petits, c'est pas encore leur truc. Je donne souvent des problèmes qui font référence à des choses qu'on n'a pas vues, donc il va falloir le chercher d'une autre façon, il va falloir dessiner, il va falloir employer des outils que l'on connaît, mais pas encore l'opération que l'on fait dans les plus grandes classes. *C'est vrai qu'à la limite, c'est une autre démarche qu'ils vont oublier par la suite. C'est vrai que par le dessin, par tout un tas de choses, on peut arriver... les grands, on a l'impression qu'ils ne s'autorisent plus tout ça, c'est dommage !*

5. Que peut faire un élève en classe, à la maison pour progresser en maths ? Quels conseils lui donnez-vous ?

En classe, en fait, moi, je donne assez peu de leçons de mathématiques, parce que *je trouve que les mathématiques, ça se vit en classe.* De temps, en temps, évidemment, il va y avoir des choses à apprendre, mais je *fonctionne davantage avec beaucoup de batteries d'exercices,* donc les enfants qui réussiront moins bien que d'autres, auront plus d'exercices à leur disposition, différents aussi, j'essaie de formuler ça différemment, moi je le vois plutôt sous forme d'exercices. A la maison, je n'ai jamais vraiment pensé à leur donner des conseils pour la maison puisque j'essaie au contraire d'être très prudent et de leur dire : à la maison, surtout, vous ne faites rien en avance avec papa, maman, le grand frère ou la grande sœur parce que c'est vrai que ça pose des problèmes. Il y longtemps que je fais des petits et je manque un peu de références pour les grands.

En classe, que peuvent-ils faire pour améliorer leur réussite, quelle doit être leur attitude ?

De la recherche, de toute façon. *Je crois qu'il faut absolument qu'ils se débrouillent, qu'ils trouvent n'importe quel moyen pour arriver.* Et puis, *ça peut être un copain qui vient donner un coup de main,* c'est pas du tout exclu. J'accepte tout à fait qu'un copain qui a bien compris, en général ça marche très bien d'ailleurs, vienne aider, ça passe peut-être mieux que moi, parce qu'ils se débrouillent assez bien entre eux. La recherche, la réflexion, *ne pas abandonner,* de toute façon, ça c'est peut-être déjà le premier conseil, *relire, revoir les choses autrement, ne pas se décourager,* quoi. Il y en a trop qui baissent les bras, et puis *prendre le temps* aussi, et bien tant pis, *certains mettent plus longtemps, eh bien, ils mettent plus longtemps.*

6. Quels sont d'après vous les critères d'un bon enseignement des mathématiques, et surtout, y-a-t-il des différences suivant les élèves ?

D'abord, *je pense qu'il ne faut pas voir ça au coup par coup, il faut voir ça sur l'ensemble d'une année*, voire plus d'ailleurs. Déjà, je pense qu'il faut se garder de voir trop court, il faut avoir quand même un regard plus vaste, parce que c'est vrai que, selon les prestations des enfants, *il y en a qui vont démarrer, il y en a qui vont mettre plus longtemps*, mais ça ne veut pas dire que ceux qui à tel moment n'auront pas des tests justes, ça ne veut pas dire qu'ils n'ont rien compris pour autant. Le même enseignement, dans les méthodes, dans... à quel niveau?

Je ne sais pas

Justement... Je crois qu'à la limite, l'enseignement... Si, il faut enseigner, c'est évident, il faut enseigner, mais, encore une fois, *je crois beaucoup à la mise en situation.*

Ça fait partie de l'enseignement

Ça fait partie de l'enseignement, mais notamment en maths, *je suis très très peu leçon magistrale, le truc qui tombe du ciel, c'est ça et pas autre chose.* J'ai peut-être tort d'ailleurs, je ne sais pas, mais, par expérience, j'ai quand même vu qu'en fonctionnant comme ça, ça se mettait assez bien en place. *Pas dans les mêmes temps, avec des problèmes du côté des parents, ça, c'est vrai que c'est un peu lourd à gérer.*

Ici, vous avez des problèmes avec les parents sur ce que vous faites ?

Oui, parce qu'ils ne comprennent pas. Ils ne comprennent pas, ils ont des références quand même, ils veulent que leur gamin... C'est vrai qu'en plus, comme je ne procède pas comme les autres, quand il y a le petit copain dans les autres classes, ils ont vite fait de voir que ce n'est pas pareil. En fin d'année, même si on aboutit au même résultat, c'est pas pareil, et ça, *ça ralentit pas mal d'enfants parce qu'ils ne savent plus trop s'ils doivent faire ce qu'on fait en classe, s'ils doivent faire ce qu'on leur dit à la maison. D'ailleurs, à un moment, je me suis dit, je vais prendre un bouquin, et puis, non, je ne l'ai pas fait finalement, mais, c'est vrai que c'est lourd, ça.* En pratiquant comme ça : *dans chaque groupe, on recherche, on met en place une stratégie, on va l'expliquer aux autres, même si on met relativement longtemps*, ça rentre en fait. Donc, je pense pouvoir dire que ça peut être appliqué à tous les enfants quand même, avec une certaine souplesse. Disons que les groupes qui fonctionnent tout seuls, j'y vais moins et que les groupes qui pataugent, j'y vais davantage. Mon intervention se situe surtout là, pas au niveau des contenus en fait.

A la fin de la phase de recherche, il y a quelque chose à retenir pour les élèves?

Il y a une synthèse. Ben oui, quand même, mais ils le mettent en place eux-mêmes puisqu'ils l'ont vécu. Donc en fait, le rapporteur de chaque groupe va expliquer son truc, on confronte, on voit pourquoi on est d'accord, pas d'accord, qui s'est trompé, qui ne s'est pas trompé, pourquoi. On essaie de voir aussi s'il y eu différentes façons de procéder, parce que, même moi, quelquefois il y a des choses auxquelles je n'ai pas pensé, c'est important aussi, et puis ça se met en place. *Bien sûr, il y a quelque chose à retenir, mais ça se fait....*

Il y a quand même une leçon ?

Il y a quand même une leçon. C'est vrai que, de temps en temps, je donne un poly avec ... *mais c'est des choses qu'on a vécues ensemble. J'ai l'impression, peut-être la prétention de dire que ce n'est pas parachuté, pas complètement artificiel, et donc que ça va quand même mieux fonctionner.*

De toute façon, ça se fait le cours magistral à l'école primaire ?

Ah oui, complètement, ah oui, malheureusement sans doute. Petit, oui, enfin ce que j'appelle cours magistral, c'est vraiment l'instit planté là qui dit voilà, fais comme ça, qui écrit son truc au tableau, qui dit vous les recopiez, c'est la science, voilà, il n'y a pas une virgule qui change, oui, ça se pratique, c'est plus simple, je pense que c'est moins fatigant aussi. Ce n'est peut-être pas vraiment quelque chose qui marche, mais enfin...

En mathématiques, je ne pensais pas.

Si, même en mathématiques. Moi, une technique opératoire, je préfère qu'on la construise ensemble, qu'on la vive ensemble plutôt que de dire maintenant, je vais vous expliquer, on fait comme ça, point. Une technique opératoire pour moi, tant pis si on met longtemps, mais l'enfant doit comprendre parfaitement ce qui se passe. Ça ne sert à rien d'être un petit singe, un petit truc qui fonctionne comme ça, je trouve ça complètement débile. Mon but en fait, c'est d'essayer de leur faire comprendre ce qu'ils font.

7. Pensez-vous que tous les élèves peuvent acquérir les notions des programmes de maths jusqu'en 3ème ?

Je ne les connais pas.

Disons qu'on commence le raisonnement géométrique, on aborde la démonstration, on fait un peu de calcul algébrique, des équations de droite, des choses comme ça... Est-ce que tous les élèves pourraient acquérir les notions des programmes de maths jusqu'en 3ème ?

Je pense que oui, quand même. Qu'ils ne le fassent pas, c'est une chose, mais ça devrait être possible.

8. Le travail en groupes peut-il améliorer les résultats sur l'apprentissage des élèves ?

Pour moi, j'en suis complètement convaincu.

9. Faites-vous travailler vos élèves en groupes, à quelle fréquence ?

Ça prend facilement les 2/3 du temps en maths, parce que j'en fais aussi dans les autres matières mais moins. L'autre tiers est consacré à des exercices systématiques individuels où moi, je vais vérifier si ça rentre, quand même.

C'est de l'évaluation, en fait, le dernier tiers, c'est ce qui joue le rôle d'évaluation ?

C'est ça.

Il n'y a pas de contrôle formel ?

Si, il y en a, mais *je vérifie souvent si les notions entrent ou non, et puis, ils aiment bien à la limite, c'est pas un problème pour eux. J'ai remarqué qu'en fonctionnant comme ça, beaucoup se mettaient à aimer les maths, moi aussi, ce qui est quand même important parce qu'au départ, je n'aimais pas du tout et je pense que c'est quand même un point positif.* C'est vrai que fonctionner de cette façon, ça m'a quand même intéressé, en plus je me suis dit que c'était quand même peut-être un peu plus intelligent, *ça m'a fait réfléchir, moi, et puis ça leur plaît et ils ont envie de faire des choses, et c'est important.*

Et combien de temps consacrez-vous aux synthèses, ce que j'appelle le cours, disons.

Très peu de temps, c'est très condensé parce que, comme tout se construit ensemble, soit effectivement, au moment de la synthèse il y a quelque chose qui apparaît...

C'est écrire quelque chose sur le cahier ?

Oui, souvent je leur donne une fiche parce que je veux que ce soit clair, bien présenté, une leçon c'est quand même important, si je suis obligé de passer une heure derrière pour corriger, c'est pas intéressant. Donc, étant donné qu'on l'a vu ensemble, et construit ensemble, c'est quelque chose qui nous prend très peu de temps après.

C'est des fiches polycopiées ?

Voilà, ce sont *des fiches polycopiées qu'ils collent dans le classeur...*

C'est la leçon à apprendre ?

Voilà, à apprendre même pas, on ne peut pas dire apprendre, *c'est la référence. S'ils ont un exercice à faire, ils pourront reprendre leur fiche, regarder, parce qu'on aura le détail de ce qu'on a fait ensemble, la progression qui permet d'arriver à telle et telle notion.* A part peut-être la chose plus pointue qui sera la table de multiplication, qu'il faudra quand même bien... on la construit évidemment, on apprend... Le petit carnet, d'un côté il y a le répertoire d'égalité, de l'autre côté il y a les tables d'addition, on construit d'abord le répertoire d'égalité, et quand on a à peu près tout sorti, les tables d'addition, elles sortent d'elles-mêmes.

10. Quelle est la part des manipulations ?

Très souvent, le point de départ est une manipulation. On part très souvent du matériel. *Il y a une phase matériel, et puis une phase où on essaie de lâcher le matériel et d'essayer de ... de rentrer dans l'abstraction. Moi, j'essaie de toujours leur faire tout expliciter. Quand on a le matériel, ils manipulent mais ils ne sont pas forcément arrivés au stade où ils sont capables d'expliquer ce qu'ils font et j'essaie toujours de passer par cette phase là, et une fois que cette phase là est passée, s'il y a besoin de la fameuse synthèse, leçon et tout, on la fait, et puis après on passe aux exercices.*

Différenciez-vous des types de problèmes d'usages différents ?

Non, en fait ce que j'essaie de leur proposer, c'est un maximum de situations, pas forcément des situations d'ailleurs liées à quelque chose à calculer, parce que je veux absolument qu'ils soient capables de se débrouiller avec un énoncé quel qu'il soit, qu'il y ait beaucoup à lire ou non, que les questions soient formulées ou non, *j'essaie de leur donner l'éventail le plus vaste possible de façon qu'ils puissent se débrouiller avec.*

11. Quelle place pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire ?

La place n'est pas assez grande. Enfin, ce n'est pas que la place n'est pas assez grande parce qu'*elle existe, mais curieusement, on la rétrécit énormément.* Dans les petites classes, c'est vrai qu'on en fait un petit peu quand on fait de la géographie, de la gymn, parce que fatalement, tout ça, ça se recoupe, mais c'est vrai que, très souvent, je le reconnais, ce que je devrais leur faire acquérir comme notions de géométrie en CE1, *je ne le fais que très peu par rapport à ce que je devrais faire, c'est souvent la discipline sur laquelle je rétrécis un peu, histoire de faire rentrer le reste.* Je ne le fais pas sur les problèmes, je sais que certains collègues le font sur les problèmes, moi, c'est sur la géométrie.

Que fait-on en géométrie au CE1 ?

Normalement, il y a tous les tracés, les quadrillages, les repérages, mais on devrait aussi arriver aux notions de symétrie, que je ne fais pas. Mesure de longueur, je fais, ça vient avec le poney. Quand on travaille les poneys, on les mesure, automatiquement, je fais des mesures, mais c'est vrai que dans d'autres CE1, ce n'est pas fait. Les mesures de poids, je ne les fais pas, mais je devrais. Je n'arrive pas à comprendre pourquoi c'est là-dessus. On en est tous au même point. *On essaie de bourrer sur le reste, mais la géométrie, je ne sais si on considère que c'est pas important alors que c'est faux, mais c'est là-dessus effectivement qu'on va essayer de rattraper le reste.*

On ne la met pas dans les objectifs prioritaires ?

Oui, c'est ça, *ce n'est pas prioritaire par rapport au reste, on se dit que la numération, les opérations, c'est quelque chose qui va être beaucoup plus important.*

12. Attribuez-vous un rôle important à la mémoire ?

Oui, parce que, c'est quelque chose que j'essaie de leur donner, pas spécialement en mathématiques. *J'estime que la mémoire doit être entraînée, c'est quelque chose qui leur servira après, dans n'importe quelle discipline.* C'est vrai qu'un enfant qui va être entraîné à faire travailler sa mémoire, quand il lira quelque chose, il le retiendra mieux, oui, pour moi c'est important. Et je pense qu'on peut leur faire travailler, même des enfants jeunes, on peut les entraîner à travailler la mémoire, je pense que c'est quelque chose qui peut se faire, à six, sept ans, un enfant est capable d'entraîner sa mémoire, ça ne me semble pas être un tortionnaire de ... avec un tas d'exercices différents.

13. Donnez-vous du travail à la maison ? Quel type de travail ?

Oui, en mathématiques, très peu. Simplement quand une notion a été acquise, je pense par exemple là aux techniques opératoires, *quand on est arrivé au bout d'une technique, il est évident que je vais donner à la maison des opérations qui correspondent à ce qu'on a fait.* C'est pas dans mon esprit, il faut être clair, *ce n'est pas obligatoire, ils savent que c'est pour s'entraîner, que c'est un plus, c'est vrai que j'essaie quand même de les pousser à le faire, parce que, pour moi, un enfant, il a quand même besoin de s'entraîner, l'école, c'est pas forcément suffisant, mais ça va être quelques opérations, une table d'addition, mais en mathématiques, c'est tout.* En orthographe, je donne des règles d'orthographe à apprendre par cœur, des mots à apprendre par cœur, parce que j'estime que c'est important qu'ils en auront besoin, je donne aussi de temps en temps un petit résumé d'histoire. Et puis de la poésie, mais la poésie, c'est un peu différent parce qu'on la vit beaucoup en classe et quand on a à l'apprendre, c'est que c'est déjà tellement imprégné qu'il n'y a plus grand chose à faire, ce qui m'importe plus là, c'est la diction plus que l'exercice de mémorisation.

En maths, c'est des exercices d'entraînement ?

Oui, voilà, il n'y a pas vraiment de leçon. on se sert des fiches de synthèse, on peut se replonger dedans. J'essaie aussi de leur apprendre à se servir de ça. Je leur dis à la maison, vous avez le classeur, vous avez les fiches, savoir replonger le nez dedans, savoir rechercher l'information pour faire le travail.

15. L'évaluation. Quelle place faites-vous à l'évaluation ? Quels types de contrôle, quelle fréquence, Que cherchez-vous à évaluer ?

C'est pas très clair. *C'est quelque chose que je remets en question assez souvent. J'ai eu l'évaluation bête et méchante, et je l'ai toujours d'ailleurs, c'est-à-dire, on a fait telle chose, on donne tel exercice pour vérifier qu'on a bien acquis telle connaissance, telle technique.* Je le fais toujours, ça ne marche pas forcément d'ailleurs. Je le donne très fréquemment, c'est-à-dire que je pars du principe que le contrôle tout seul, ça ne sert pas à grand chose, donc *j'en donne très souvent et l'enfant qui n'a pas compris, mais ce n'est* *pas parce qu'il a une mauvaise note qu'il n'a pas compris parce qu'il y a ceux qui sont lents et puis ceux qui, ce jour-là, ratent et en réalité ils ont compris.* Donc, les enfants qui ont des problèmes avec leur note, puisqu'il faut bien noter, soit je leur redonne le même à un autre moment, soit je leur redonne le même genre, *j'essaie de leur donner plusieurs chances. Au départ, j'essayais de les faire s'autoévaluer... Ils sont petits, ça ne marche pas forcément ;* il y en a qui mettent "je sais" partout parce qu'ils sont bourrés de confiance en eux, il y a ceux qui vont mettre "je ne sais pas" alors qu'en réalité, ils savent... Finalement, ça ne m'a pas semblé réalisable, ils sont trop petits. C'est peut-être réalisable quand ils sont plus âgés, et encore... J'avais travaillé avec Mme V. qui m'avait dit de procéder comme ça, je me suis arraché les cheveux. C'est vrai que ça ne correspond peut-être pas non plus à ce que je ressens, moi. Je suis quand même assez... Autant, dans ce que je fais avec eux, je peux être souple, autant j'estime que quand on fait des exercices, un contrôle, je n'aide plus... Enfin, il y a des exercices que l'on fait ensemble et où j'aide, et puis il y a des exercices qui vont être, alors là, le contrôle, et où je ne vais rien dire du tout, ils devront se débrouiller seuls, ce n'est pas toujours le même type.

C'est suivant le moment où ils en sont dans l'apprentissage ?

Voilà, c'est ça.

Ce que vous cherchez à évaluer dans l'apprentissage, c'est les techniques opératoires, les connaissances bien identifiées dans le programme ?

Oui, ce qui est ennuyeux, c'est qu'un enfant qui n'a pas bien acquis, par exemple ses tables d'addition, qui est quand même capable de faire une addition, la technique opératoire, il l'a comprise, là, *j'essaie aussi de différencier. Donc, l'enfant dont je soupçonne qu'il a pigé, il va avoir une table d'addition à sa disposition de façon à ce qu'il ne soit pas bloqué par ses tables et que je puisse vérifier qu'il sait faire son addition et que c'est simplement qu'il ne connaît pas les tables.*

Est-ce que vous cherchez à évaluer aussi les méthodes de résolution de problème, par exemple ?

Non, là en fait, en problème... *je ne note pratiquement jamais les problèmes.* Soit on travaille en groupes, mais ça m'arrive de donner des problèmes où ils doivent se débrouiller seuls parce qu'il faut que je voie si ce qu'on a fait a servi à quelque chose ou pas, mais c'est quand même très très rare, et peut-être que je trouve qu'ils sont petits, *c'est vrai que très souvent, les problèmes, ce sont des choses qu'on fait ensemble.*

Ce n'est pas évalué par une note, mais ça intervient quand même dans l'évaluation globale ?

Bien sûr, et puis c'est vrai que, pendant un bon trimestre, je ne les note même pas du tout.

Est-ce que l'évaluation influe sur l'apprentissage des élèves ?

C'est évident, j'ai essayé de fonctionner justement... j'ai mis en place plusieurs systèmes. *J'ai essayé de corriger en soulignant les fautes, de mettre des pastilles, des choses comme ça, mais sans mettre de note, sans mettre d'appréciation, sans rien mettre, il se trouve que les enfants sont complètement perdus, ça ne leur convient pas,* c'est quelque chose qui ne leur parle pas, ils sont incapables de voir si le fait qu'il n'y ait de correction, ça veut dire qu'ils ont compris, ça ne leur parle pas du tout. J'ai essayé les points de couleur. Ça n'allait pas bien non plus. Feu vert, oui, j'ai un feu vert, mais t'as vu, toi, t'as des trucs soulignés et pas moi, parce qu'en fait, *ils comparent sans arrêt entre eux.* Toi, t'as fait une faute. *Ils sont complètement obnubilés par la note. Et puis, là encore, il y a un problème de parents,* parce que les parents, quand ils ont vu les fameux feux tricolores, ça ne leur a pas plu non plus. Les "bien", "très bien", ça ne marche pas très bien non plus, donc j'ai remis les notes. *Les notes, ça les motive ou ça les enfonce suivant le cas.* Il y en a, même si la note est mauvaise, ça les dynamise pour que la prochaine fois, on essaie de passer le cap supérieur. D'autres, la feuille toute raturée en rouge, ça va les décourager et ils vont être bloqués. Ceci dit, j'essaie de corriger dans d'autres couleurs, c'est pareil, c'est pas forcément le rouge

16. Quels types d'action vous paraîtraient efficaces pour réduire les difficultés des élèves en maths à l'école primaire ?

Déjà, il faudrait peut-être qu'on ait des classes moins chargées de façon qu'on puisse individualiser plus le travail. Déjà, davantage repérer plus les difficultés des enfants. Ce n'est pas toujours évident dans une masse de gamins, avec un programme, de voir exactement, d'une manière pointue ce qui a été acquis et ce qui ne l'a pas été. *C'est vrai que si on avait un peu moins d'enfants ou quelqu'un d'autre qui soit un observateur, je ne sais pas, ce genre de fonctionnement un peu différent, on pourrait repérer plus spécifiquement les difficultés des enfants et puis adapter à chacun...* chacun selon sa pédagogie après.

15 bis Qu'est-ce que vous appréciez le plus chez les élèves et que vous essayez le plus de valoriser ?

Encore une fois, je dirais *la réflexion. C'est-à-dire qu'un enfant qui fait une bonne remarque complètement pertinente, l'enfant qui a suivi un raisonnement dans sa tête et qui va énoncer quelque chose qui va venir au bout de son raisonnement, c'est ce que je valorise le plus.* Dans le travail de groupes, justement, il y a des enfants qui ont des remarques très très pertinentes, qui vont s'autoriser à avancer dans leur démarche, ce qui n'est pas toujours vérifié comme ça en classe. C'est vrai que le groupe dans lequel les enfants ont un raisonnement plus pointu, c'est vrai que ça je le valorise, ou qui ont essayé plusieurs techniques, les enfants qui ont cherché, qui ont réfléchi, qui n'ont pas appliqué telle ou telle chose sans réflexion, moi, j'ai tendance à valoriser ce genre de comportement.

17. Si vous deviez caractériser les maths, quels termes choisiriez-vous ? (En l'absence de réponse spontanée, suggestions : théorie, outils pour résoudre des problèmes, langage, outils de modélisation du réel, calcul, du formalisme, de l'abstraction).

Pour moi, c'est beaucoup plus *leur donner des techniques, des outils, pour arriver à résoudre des problèmes. Qu'ils ne soient pas désarmés.*

Ça, c'est pour l'école primaire, et les maths en général ?

Ça, *ça reste valable quand même, mais le mot calcul interviendrait peut-être plus, ça nécessite quand même une somme de connaissances, calcul,* c'est peut-être pas vraiment ça, j'ai du mal surtout que les maths, c'est pas mon truc. *Un matheux pour moi, c'est quelqu'un qui a une somme de connaissances, de raisonnement, qui va lui donner un autre esprit que le mien.*

16 bis. D'où viennent d'après vous, les difficultés en maths des élèves au collège ?

Pour en revenir au collègue de CM2 avec qui je parle souvent, quand je le vois désespéré, je ne sais pas ce qui le démonte le plus. A mon avis, c'est quand même *l'absence de raisonnement chez les enfants plus que le manque de connaissances, donc ce qui doit leur manquer au collège, ça doit être plus le raisonnement que les connaissances.* Il a l'air de dire qu'ils sont capables de pratiquer correctement les 4 opérations, que ce soit les nombres décimaux, les fractions, ça a l'air d'aller à peu près, mais ce qui a l'air de pêcher complètement, c'est le raisonnement, *les problèmes, c'est ce qui doit fatalement accrocher au collège.* Qu'est-ce qui se passe à l'école élémentaire et qu'est-ce qui fait qu'on n'arrive pas à ça ? Je pense que de toute manière, le problème, c'est sûrement quelque chose qu'on ne fait pas assez, tous les problèmes, je veux dire, et à la limite, *on leur fait certainement pas assez de situations à chercher, à raisonner. On leur donne les connaissances, c'est évident, ça, pas de problème, mais on ne leur donne pas assez l'occasion d'être en situation de recherche.*

Est-ce que j'interprète bien en disant qu'on ne leur donne pas assez de situations complexes ?

Oui, et même, complexes, oui, mais à la limite quelquefois ...

Où il y ait plusieurs choses à mettre en relation, trouver l'élément en jeu qui ne soit pas induit dans l'énoncé comme dans les problèmes classiques ?

Voilà, j'allais en venir là. Si on prend comme référence les problèmes classiques qu'on trouve dans les bouquins, encore qu'il y ait quand même certains progrès, mais si on se contente de ça, ce n'est pas du tout suffisant pour qu'un enfant puisse arriver au bout d'une situation problème. *Il faut donner des énoncés plus complexes, il faut aussi ne pas leur en donner du tout : moi, ça m'arrive de leur donner du matériel et de leur dire de construire un énoncé dessus,* ça peut être aussi l'inverse. Je pense qu'il faudrait les faire là aussi manipuler davantage. A la limite, ça ne se trouve pas non plus, c'est-à-dire que si l'instit n'a pas envie... si ce n'est pas quelque chose qui l'intéresse, et quand on est instit, on ne peut pas être intéressé par tout, je ne lance pas du tout la pierre... c'est vrai que *c'est quand même un domaine où on ne va pas trouver ce dont on a besoin, que ce soit pédagogique pour nous, ou que ce soit plus pratique, à prendre au niveau des enfants, c'est un domaine où on n'a pas assez de matière, ou alors je ne les connais pas, ce qui est possible aussi...*

Qu'avez-vous pensé de l'évaluation CE2 ?

J'en ai entendu parler par les collègues qui l'ont faite et qui sont allés à une semaine de stage. *Au niveau des enfants, aucun avantage parce que pour eux, c'était simplement voir ce qu'ils étaient capables de faire ou de ne pas faire.* Par contre, ce qui pourrait être intéressant, c'est si on travaille les conclusions qui en ont été tirées, les conclusions, tout le monde le sait, c'est qu'il y a des grosses lacunes des enfants, en français sur l'expression écrite, et en mathématiques sur les problèmes et la géométrie, on le sait déjà, *ce qui serait intéressant maintenant, ce serait de trouver quelque chose pour travailler ça.*

Est-ce que ça aide à évaluer les difficultés des enfants ?

Il y avait des exercices difficiles pour un début de CE2. La formation en une semaine était un peu courte. Puisqu'on fait l'évaluation en début de CE2, il faudrait former les instituteurs de CP et de CE1 puisque ce sont eux qui sont responsables de ces apprentissages.

Pour qu'un enfant soit cohérent dans ses apprentissages pour l'entrée en 6ème, *il faudrait une certaine harmonisation* parce que chacun fait sa petite salade dans sa classe. Une harmonisation au niveau de l'école. Je ne travaille pas comme les autres CE1, c'est gênant. *Une harmonisation horizontale, et aussi verticale pour que les choses soient bien établies. Là, je vois, une chose bête, pour la multiplication, je n'emploie jamais le mot "fois", je dis toujours "multiplié par". Je vois avec mes deux collègues qui utilisent le mot "fois", ça nous donne des exercices exactement inverses. Là, il y a un problème, je crois qu'il faut essayer de faire la même chose. Selon les livres, on trouve des choses différentes.*

4. INSTITUTEUR D

1. Rôle essentiel de l'école primaire

Un des buts qui me paraissent fondamentaux, c'est de *donner la possibilité aux enfants d'avoir un maximum d'outils de manière à affronter le collège dans un premier temps, et puis la vie tout court dans un deuxième temps quand ils seront sortis du collège. Priorité donc à la manière de faire, aux savoir-faire donc, plutôt qu'aux contenus. Ça passe par les contenus* bien sûr *mais davantage par la méthodologie.*

Ce que vous appelez savoir-faire, ce sont des méthodes de travail ?

C'est ça, *savoir se débrouiller, quels que ce soient les matériaux* qu'on place devant les enfants, *quelle que soit la méthode qu'on leur impose et quelle que soit aussi la personnalité de l'adulte* qui... Donc moi, mon objectif à la fin du primaire, c'est d'avoir un petit bonhomme ou une petite bonne femme *autonome* dans ses conduites de travail.

Vous enseignez toujours au CM ?

J'ai surtout enseigné aux grands mais l'année prochaine je change.

Est-ce que vous voyez une évolution des objectifs du CP au CM ?

Il faut que ce soit progressif. C'est vrai qu'on ne peut pas exiger une autonomie parfaite de la part d'un petit. *L'objectif partiel serait, si j'avais des petits, que l'enfant se trouve bien dans sa peau et bien en général dans le milieu scolaire, parce que l'objectif général cité tout à l'heure comme final, à savoir l'autonomie, la prise de responsabilité..., ne peut effectivement passer que par un terrain épanoui, c'est-à-dire un enfant qui se sente bien à l'école, qui ne se sente pas bourré de contraintes, qui vienne avec plaisir à l'école, quels que soient ses résultats, quels que soient ses moyens intellectuels.*

C'est-à-dire, les objectifs de socialisation

Tout à fait, *des gamins qui soient tout à fait capables de prendre leur position par rapport au groupe*, de savoir se situer, encore une fois quels que soient leurs moyens et leurs résultats scolaires, et qu'ils puissent, avec ce qu'ils peuvent faire, acquérir ce qu'on serait en droit d'exiger en 2ème partie du cycle primaire.

2. Qu'est-ce qui vous paraît le plus important pour la réussite de la scolarité en primaire, du côté de la famille, de l'école ...

C'est toujours ce que je dis aux parents en début d'année, *la scolarité, c'est un contrat tripartite*, et si une des parties défaille, on met en péril le bon équilibre de l'affaire. Tripartite, c'est-à-dire que chaque partie, *les parents, l'enseignant et l'enfant* doit avoir son contrat à remplir, chacun dans sa spécialité, aucune partie ne débordant sur le terrain de l'autre.

Du point de vue plus scolaire de l'attitude en classe, qu'est-ce qui vous paraît le plus important ?

Je vais redire la même chose. Si l'enfant se trouve un tout petit peu *motivé* par ce qui se passe en classe, il a des bonnes chances de réussir. A son niveau, avec ses propres moyens. Pour moi, réussir, ça ne veut pas dire être au-dessus de 15 sur 20. *Réussir, ça veut dire progresser en permanence pour moi*, c'est-à-dire, un enfant qui passe de 8 en début d'année à 12 en fin d'année et qui a progressé tout le temps, pour moi, c'est une réussite. Donc, *c'est un enfant qui va prendre part à ce qui se passe dans la classe*, qui ne va pas se sentir étranger aux activités proposées et qui ne va pas se sentir étranger au groupe, parce que tout ça, c'est lié. *Il faut que les relations interenfants, les relations interenfants-adulte soient bien acceptées par l'enfant pour qu'il puisse mettre en branle toute la batterie de moyens qu'il a en lui pour travailler.*

Lecture des critères du questionnaire côté enfant à l'école

Tout est important. Je dirais que je mettrais peut-être *"être actif" en dernier* parce *qu'il y a des enfants qui ne sont pas forcément actifs, extériorisés, et qui malgré tout ont une part active interne importante.* Je le mettrais en dernier parce que c'est un facteur extérieur que tout enseignant doit pouvoir transgresser pour juger l'enfant, *l'action extérieure n'est pas forcément le garant de l'action intérieure et vice-versa.*

Lecture des critères côté famille

Tout est important. *On ne peut rien systématiser* parce que, comme tout enseignant, *j'ai pu voir* dans ma carrière *des enfants pour lesquels l'ambiance familiale n'était pas spécialement calme et sereine et qui réussissaient fort bien parce que c'est parfois un moteur, une dynamique qui va leur permettre de prouver quelque chose en révolte par rapport à ce qui se passe dans leur famille* et qui n'est pas forcément gratifiant. En revanche, *on connaît tous aussi des enfants complètement apathiques parce que bien "coconnés"*, bien dorlotés dans des petites ambiances familiales cocon.

Avez-vous changé d'avis au cours de votre carrière ?

Je crois que oui. Très certainement, je ne me souviens plus exactement dans quel état d'esprit j'étais il y a 10 ans ou 15 ans ou 20 ans, mais je pense que, comme tout enseignant débutant, j'associais beaucoup plus cela à l'évaluation, l'évaluation normative. Un enfant qui réussissait, c'est un enfant qui avait des bonnes notes, en très gros. Comme je l'ai dit tout à l'heure, c'est pas forcément ça. *Un enfant avec des faibles notes mais qui progresse régulièrement est un enfant qui réussit peut-être plus qu'un enfant qui stagne à 17 par exemple.*

Pensez-vous que ça continue comme ça après, en collège ?

Non, parce qu'*il y a tellement de choses au niveau de la structure profonde qui vont changer au collège qu'on ne peut plus considérer les choses avec le même œil.* Je ne suis pas suffisamment qualifié en tant qu'enseignant pour dire exactement comment je verrais les choses au collège, mais, en tant que parent, j'ai l'impression qu'au collège, on ne peut plus considérer les choses sous cet angle là. *Un enfant qui, au collège a au-dessous de 12, c'est forcément un enfant qui n'est pas en échec complet, mais c'est un enfant qui est sur la bonne voie de "l'échec".* C'est considéré comme ça par tout le monde, donc il est difficile pour la famille, comme ça, toute seule, isolée de dire "non, c'est bien". On ne peut pas, ça fait partie d'un bloc. Au collège, réussite c'est forcément associé au système codifié.

C'est-à-dire que l'évaluation a beaucoup plus d'importance ?

Un seul type d'évaluation, je veux dire, parce que c'est sûr que *l'évaluation est très importante, évidemment. On ne peut pas travailler sans évaluation avec des enfants, mais quand il n'y a qu'un seul type d'évaluation, à savoir l'évalution ancestrale notifiée, donc les notes de 0 à 20, ça paraît quand même très restreint pour juger des capacités d'un enfant.*

15. Evaluation

Cette évaluation traditionnelle et quasiment monolithique dans tous les établissements, et particulièrement dans le secondaire, *elle me paraît utile mais il est dommage qu'il n'y ait que celle-là qui intervienne parce qu'elle ne va évaluer l'enfant que sous certaines facettes. Elle ne va pas prendre du tout en compte un tas d'autres choses qui doivent être évaluées, par exemple tout ce qui est en devenir chez l'enfant, tout ce qui est en gestation au niveau des capacités de compréhension, des moyens mis en place.* L'évaluation sommative, celle qu'on évoque là, ne prend jamais cela en compte. Elle ne prend pas du tout en compte le matériau qui se met en place petit à petit. Parce qu'un enfant, c'est quelque chose de mouvant et il y a des choses qui se mettent en place petit à petit et qu'on ne peut absolument pas évaluer et voir dans cette évaluation là.

Comment faire cette autre évaluation ? Que faîtes-vous comme autre évaluation ?

Tout dépend des formes de travaux, d'exercices, souvent d'écrits quand même parce que l'évaluation, il faut d'abord parler de l'évaluation des travaux écrits. Tout dépend des types d'exercices : *il y a des disciplines qui vont se prêter par exemple à une évaluation positive et non plus négative, c'est-à-dire qui ne va pas retirer des points mais au contraire en rajouter,* pour ne pas mettre l'enfant dans une situation de valorisation qui sera summum pour, si l'instituteur est très attentif, très vigilant, qui sera une *situation idéale pour que l'enfant révèle un certain nombre de choses qu'il a en lui et qui sont occultées quand on applique la notation traditionnelle. Par exemple, en français, ça me paraît plus le cas qu'en mathématiques* – en mathématiques je ne sais peut-être pas bien le faire, justement j'essaie de réfléchir à comment je pourrais faire ça en mathématiques – mais en français, je le fais et j'aime le faire parce que c'est excessivement gratifiant pour les enfants et très révélateur pour l'enseignant. *Une notation inverse de ce qui se fait d'habitude : à chaque fois qu'il y a quelque chose de bien fait, on ajoute, on fait des plus, mais on ne fait pas des moins.* Ça ne veut pas dire qu'on les néglige, ça ne veut pas dire que ces moins là ne sont pas repris, en orthographe ou en dictée par exemple. Ça ne veut pas dire que toutes les erreurs orthographiques faites, on les laisse tomber, ça devient caduque et on dit à l'enfant que c'est très bien. Pas du tout, on va les reprendre, mais *on va les reprendre, non pas en disant "c'est mal, c'est une faute", mais en disant "c'est une erreur ; si tu as fait cette erreur, c'est que tu n'avais pas en mains les moyens pour l'éviter, nous allons essayer de trouver comment l'éviter".* Là, on peut donner tout une batterie d'exercices, c'est à dire que cette évaluation peut être un tremplin pour une suite, un travail de construction. Alors que *l'évaluation traditionnelle, c'est un point final, ce n'est pas une porte ouverte, alors que l'évaluation, par exemple celle que je viens de citer, c'est une porte ouverte.*

Ça ne se prête pas à un barème, pour un problème de maths ?

Si, en maths, l'année prochaine, c'est un de mes propos parce que jusqu'ici je me suis beaucoup intéressé au français et peu aux mathématiques, je vais essayer de voir comment on peut. Si, je crois qu'on peut mettre un barème positif. *Par exemple, on dira que telle notion bien appliquée, méritera un point de plus alors que celle-ci qui est plus complexe méritera 2 points de plus. On peut, ce qui est bien mieux, ce que je fais en français, décider avec les enfants.* Ce sont les enfants qui font le barème.

Est-ce qu'ils peuvent le faire ? Ils n'ont pas le recul qu'il faut pour voir les objectifs.

Ils ne peuvent pas voir les objectifs, mais par exemple, admettons qu'on leur donne un problème dit d'application, c'est-à-dire qui ne va reprendre dans la solution que des notions étudiées récemment, un certain nombre de notions qui viennent d'être étudiées, *ils peuvent décider, et voir avec le maître, quelle est la notion qui leur paraît la plus facile à appliquer et celle* *qui leur paraît plus complexe, plus nuancée, plus difficile, donc ils peuvent établir cette hiérarchie et dire que ceux qui ont réussi à appliquer cette notion avec laquelle on en a le plus bavé, ceux-là seront gratifiés d'un point supplémentaire par rapport à ceux qui auront appliqué cette notion là qui nous a paru très simple.*

Est-ce que l'évaluation a un rôle dans l'apprentissage des élèves ?

Oui, évidemment *pas l'évaluation traditionnelle, qui est un point final, qui est nécessaire, qui, à un moment donné, donne l'état des acquisitions, mais qui, en aucun cas, n'intervient dans l'apprentissage et qui, au contraire peut freiner.*

Est-ce que cela ne dépend pas des enfants ?

Ça dépend, oui. Mais, que ce soit un moteur ou un frein, c'est embêtant. A partir du moment où c'est un moteur pour certains, c'est un frein pour d'autres et *ça va encore creuser le hiatus qui va exister entre ces deux types d'enfants* qui vont se trouver confrontés à des situations d'étude complètement différentes alors que normalement, ils sont dans la même classe, ils ont le même programme, le même travail à accomplir et qu'on devrait avoir une osmose entre tous ces enfants là, et alors, tout à coup, *on va se trouver avec un fossé entre ces deux types d'enfants et ça ne va pas faciliter la tâche de l'enseignant. Donc, si ça ne facilite pas la tâche de l'enseignant, ça va forcément pénaliser certains enfants. C'est un cercle vicieux* et...

Pourtant il y a beaucoup d'enseignants qui jouent de ce moyen d'action.

Absolument, mais je ne pense pas que ce soit quelque chose qui fasse progresser. Encore une fois, *je pense que c'est indispensable à un moment donné, les contrôles, les bilans, je ne suis pas du tout pour les faire disparaitre. On a besoin d'une image de l'enfant qui doit correspondre à un schéma donné dans la société.* Or, dans notre société institutionnelle scolaire telle qu'elle existe, c'est ça le moyen d'évaluation, donc il faut l'utiliser. Et de toute façon, *ça met les enfants en compétition les uns par rapport aux autres et c'est ce qu'ils trouveront après dans la vie sociale, donc c'est tout à fait normal, mais ça n'est pas un outil d'acquisition, ça n'est pas un outil qui fait progresser les enfants,* dans la pédagogie.

3. Avoir des connaissances en maths pour un élève qui sort de l'école primaire.

Je mettrais 2 gros axes : d'abord les acquis complètement mécaniques. Ça me paraît indispensable qu'un enfant, à l'issue du CM2, sache par exemple complètement ses tables de multiplication et faire les 4 opérations, évidemment en comprenant le sens des opérations, mais en les faisant très très vite, c'est-à-dire que je ne vais pas leur demander au CM2 de décomposer par exemple toute la multiplication pour voir si la compréhension est fine, mais je veux qu'ils soient capables de manière la plus économique possible de faire une multiplication sans donner d'explications et que la multiplication soit juste. J'ai dit la multiplication, et en réalité, je crois que la multiplication pose peu de problèmes. Il me semble moi, je ne sais pas si c'est vérifié à l'échelon national, mais, pour avoir pratiqué beaucoup de CM2, *il me semble que les deux opérations qui posent le plus de problèmes, c'est la soustraction et la division, presque la soustraction en premier.* Je parle des mécanismes, la division, bien entendu, mais la soustraction... C'est vrai qu'en tant qu'instituteur du CM2, je vais toute l'année mettre l'axe là-dessus même si je m'aperçois qu'il y a des enfants qui bloquent complètement sur une de ces opérations, ou sur les deux, *je vais quand même barrer à fond pour qu'ils arrivent à le faire complètement mécaniquement et qu'ils aient la technique même si elle ne passe pas par la compréhension.* Evidemment, je préfère qu'elle passe par la compréhension. Si je vois que ça bloque...

Moi, en mathématiques, *je lie énormément les difficultés des enfants à des blocages psychologiques* qui me paraissent beaucoup plus importants dans cette discipline là que dans toutes les autres disciplines. C'est à dire que les difficultés d'ordre psy en général, je ne veux pas du tout jouer le docteur Freud au rabais,... *j'ai pu constater qu'un enfant en échec en français,* bien sûr il y a aussi des blocages, mais *ça relèvera beaucoup plus de choses mécaniques* d'ordre dyslexie, quelque chose comme ça, qui relève de l'orthophonie, mauvais apprentissage de la lecture avec des difficultés phonatoires, des choses comme ça. Parmi les enfants qui n'apprennent pas à lire, il y a aussi des difficultés d'ordre psychologique, mais en ce qui concerne les gros blocages en mathématiques, et on en trouve quand même souvent, c'est-à-dire des blocages hallucinants, qui paraissent fous. On peut mieux les voir en fin de CM2, parce qu'un enfant qui n'est pas capable d'ajouter 3 nombres, qui n'est pas capable mentalement de faire une soustraction de nombres à 2 chiffres, il y a quand même un problème. Ces enfants là me semblent avoir des difficultés psychologiques qui vont se cristalliser tout à coup sur un point précis, sur certains domaines de mathématiques, pas tous. Par exemple, il va y avoir certains enfants qui vont bloquer complètement en numération et qui vont se débrouiller tout à fait honorablement en géométrie, ou même en problèmes. *J'ai constaté qu'il va y avoir des espèces de bulles sur lesquelles ils vont complètement bloquer.* J'ai aussi remarqué que, très souvent, pas toujours, ça n'est jamais systématique, j'ai remarqué que les enfants *qui ont des blocages de ce type sont souvent d'une très grande sensibilité, ont par ailleurs une espèce d'esprit créatif et une grande imagination* qui se révèle en français, même si ce n'est pas bon en français, ce n'est pas le problème, mais, en expression écrite, on sent beaucoup d'envolées, beaucoup d'idées, beaucoup de matière prête à... de matière créatrice, et en mathématiques, est-ce que c'est la rigueur qu'on prête toujours aux mathématiques, du moins telles qu'elles sont enseignées, qui bloque ces enfants là, est-ce que c'est le fait que, au niveau primaire, *les mathématiques s'associent plus à l'autorité finie,* c'est-à-dire "*c'est comme ça, c'est pas autrement*", on verrouille les portes. Est-ce à cause de cela que les enfants que je viens d'évoquer, ceux qui ont un potentiel de création, ça je l'ai vraiment remarqué... Attention cela ne veut pas dire que tous les enfants qui ont un potentiel de création sont en difficulté en mathématiques, bien au contraire. Il y a l'enfant qui s'épanouit de partout, bien sûr, mais ce cas, je l'ai vérifié plusieurs fois.

Est-ce que ce n'est pas le fait de ne pas rentrer dans le contrat, dans la règle du jeu ?

Dans *la règle du jeu qui est très fermée en mathématiques, du moins chez les petits. J'en suis toujours à évoquer le premier point, c'est-à-dire la technique, le mécanisme,* je n'en suis pas encore au deuxième point, c'est quand même assez fermé, c'est-à-dire, c'est comme ci, c'est comme ça et puis c'est pas tellement autrement, alors que dans le deuxième point, on va voir que ça peut être autrement.

Est-ce que ce n'est pas parce que c'est étanche entre le premier et le deuxième point alors que, pour que ça marche, il faudrait que ça ne soit pas étanche ?

Tout à fait. Il y a de grandes chances que ce soit ça. *Ça met en cause le travail des enseignants, la formation des enseignants, sur le plan pédagogique, parce que je pense que les mathématiques, c'est une matière qui demande beaucoup de savoir-faire pour l'enseigner.* Moi, par exemple, j'ai l'impression que je n'en ai pas suffisamment pour l'enseigner très bien. *Je dispose d'énormément d'armes très affinées pour enseigner* *sans faire trop d'erreurs, sans faire de grosses bévues en français. J'ai l'impression que je suis bien armé pour ça, mais je le suis beaucoup moins en mathématiques,* c'est-à-dire que je ne suis pas toujours sûr de ne pas avoir commis de grosses erreurs, pédagogiquement parlant, dans l'enseignement des mathématiques, mais peut-être parce que je ne possède pas suffisamment un certain nombre de choses, par exemple je me pose beaucoup de questions sur les mathématiques et je n'ai pas de réponse. Il faudrait que je fasse la démarche de me remettre à quelque chose de très âpre en mathématiques.

Un recul par rapport au contenu ?

Oui, par rapport au contenu, et puis, parce que, dans mon métier, c'est ça qui m'intéresse, comment le retransmettre ? *J'ai l'impression que ma transmission du savoir n'est pas toujours irréprochable, à cause du manque de domination que j'ai par rapport au contenu.*

Ça, c'était pour le premier point, *le deuxième point, c'est ce qu'on pourrait appeler le raisonnement mathématique. Là, les possibilités vont être variées, on n'aura pas qu'un seul cheminement, on en aura plusieurs. Il faut pouvoir, dès le départ, faire comprendre aux enfants que chacun va avoir son cheminement.* Bien sûr ensuite, charge au groupe, au début au maître, de valider ou d'invalider chaque cheminement. J'essaie de sensibiliser les enfants dès le début de l'année, avant même de les confronter à un problème à résoudre, au fait qu'un problème peut se contourner par plusieurs cheminements. *Ce qui va être intéressant, c'est de confronter les cheminements, et de valider ou d'invalider chaque stratégie et de comprendre pourquoi l'une marche et l'autre non. Là, effectivement, ça paraît moins strict et fermé que ce qu'on a dit tout à l'heure.* Ceci dit, on sait très bien que, pour les enfants, ce n'est pas le domaine où ils vont exceller le plus en mathématiques. Je trouve que, ici, c'est quelque chose qui est extrêmement ardu, la résolution des problèmes. La plupart du temps, ce qui se passe, et c'est valable dans toutes les matières aussi bien en français que dans les disciplines d'éveil, il y a un certain nombre de notions nouvelles qu'on leur a fait acquérir et qui sont acquises, mais le gros problème, ça va être le reste. *En mathématiques, sur ce point là, il me semble que la difficulté vient du fait, paradoxalement, qu'ils vont être confrontés un peu à l'inconnu dans la mesure où, si on leur dit au départ qu'il y a de nombreuses voies possibles pour résoudre telle ou telle question, ils vont être comme un bébé qui serait en dehors de son parc et qui est complètement perdu parce qu'il y a trop de vide autour de lui. Il a ses connaissances en maths mais il ne sait absolument pas comment les manipuler pour pouvoir les réinvestir dans le point précis qui lui est demandé.*

C'est la plus grosse difficulté pour la résolution de problèmes ?

Oui, peut-être que les collègues qui ont eu le CM2 cette année répondraient autrement....

Et puis, il y a des enfants qui n'arrivent pas du tout à raisonner, il leur manque des éléments de logique par exemple, ... Quand on essaie de suivre tout un cheminement logique, certains enfants sautent des étapes de manière tellement cavalière que ça paraît trop. Est-ce que ça veut dire que ces enfants n'ont pas encore construit leur logique de la même manière que nous, les adultes, certainement... parce qu'il y a certaines étapes qu'il nous paraîtrait hallucinant de sauter alors que, eux, vont les sauter, ou bien ils vont inverser des choses...

Je crois aussi que les enseignants d'une manière générale, je crois qu'il nous manque des connaissances fondamentales sur la psychologie, sur les stades d'acquisition d'un certain nombre de choses par les enfants, c'est pas assez affiné : on a les grandes références, Piaget, Wallon ... avec les très grandes lignes qu'on n'a la plupart du temps pas remis à jour depuis très longtemps, et il nous manque des choses, c'est-à-dire que *chaque enseignant construit un petit peu sa connaissance de la psychologie de l'enfant uniquement par observation,* et encore pas toujours, parce que quelquefois, ça ne l'intéresse pas beaucoup... mais c'est très difficile parce que l'observation, *ça n'est pas suffisant pour faire un instrument scientifique de la connaissance du comportement des enfants.* Moi, ce qui m'intéresse dans ce métier, c'est que j'arrive encore, après 20 et quelques années d'enseignement à me dire : "ça, je l'ignorais totalement... j'ignorais totalement qu'un enfant de tel âge n'était pas en mesure de faire ça ou ça parce qu'il lui manquait telle étape de la connaissance". A la fois c'est intéressant pour moi, mais c'est aussi un peu inquiétant de se dire "pendant 20 ans, je n'ai pas su ça, et donc j'ai dû commettre des erreurs".

5. Que peut faire un élève pour progresser en maths ? Quels conseils lui donnez-vous ?

Je donne très peu de conseils à ce niveau là. Je vais donner quelques exemples précis : l'année dernière ou il y a 2 ans, j'avais quelques enfants qui étaient dans l'état que j'ai décrit tout à l'heure, c'est-à-dire des enfants sensibles, réussissant bien par ailleurs, et faisant des espèces de *blocages monumentaux* en mathématiques. Je ne me sentais absolument pas capable de faire quoi que ce soit et de conseiller quoi que ce soit pour ces enfants là; donc j'ai vu les familles et je leur ai proposé, exactement comme je fais en français, ce qui est une pratique courante, de *faire une rééducation en mathématiques.* Moi, je me sens complètement désarmé pour aider ces enfants là. On m'avait donné l'adresse d'une personne privée qui faisait un travail très intéressant de rééducation en mathématiques. Il y a 2 familles sur 5 qui l'ont fait régulièrement. Je n'ai pas vu un changement extraordinaire en classe, mais une de ces familles a déménagé et, en début d'année a trouvé mon adresse et est venue me voir pour me dire combien ils me seraient redevables de leur avoir conseillé ça, parce que leur gamine qui est maintenant en 5ème a complètement décollé en mathématiques. L'effet s'était fait sentir au bout de 2 ans. Je me souviens aussi d'une gamine qui réussissait assez bien partout, et au moment où on a commencé à travailler la division, non seulement c'était impossible d'obtenir quoi que ce soit d'elle mais ça la mettait dans des états... C'était une gamine calme, tranquille et j'avais observé au bout de quelque temps que l'heure qui était consacrée à étudier la division la mettait dans un état pas possible, où elle devenait d'une nervosité invraisemblable, d'une susceptibilité pas possible. J'ai essayé de voir avec la famille ce qui se passait, et il se trouve qu'à cette époque là, les parents étaient en train de se séparer. Un peu plus tard j'ai lu des choses sur psychologie des mathématiques et affectivité et que la division... *Ces choses là, ça passe par des réseaux souterrains qu'on ne domine pas bien quand même, et puis dans lesquelles, moi je ne veux pas m'immiscer,* mais c'est quand même intéressant d'avoir conscience que ça existe. *C'est pour ça que je me sens un peu démuni quand j'ai un enfant en grosse difficulté en mathématiques.*

6. Est-ce que dans l'enseignement, il y a lieu de faire des différences suivant les élèves ? Vous avez parlé de difficultés psychologiques, y a-t-il des difficultés ou des différences liées au milieu social ?

Liées au milieu social, moi personnellement, je n'en ai pas rencontré, parce qu'il y a une constante : dans notre école, nous avons une proportion, pas très importante, mais une proportion existante, d'enfants immigrés, et sur ces immigrés, on a quand même de très nombreux enfants maghrébins, et ces enfants maghrébins, en général, ne sont quand même pas ceux dont les familles détiennent le fleuron du milieu social dans la cité, *or parmi ces enfants immigrés, beaucoup d'entre eux réussissent vraiment bien en mathématiques, alors que c'est en général la catastrophe en français.* Pourquoi ces enfants là réussissent-ils bien en mathématiques ? Je ne sais pas trop. Est-ce lié à cet atavisme ancestral qui veut que les arabes aient eu quand même une influence assez grande dans le domaine des mathématiques ? Je ne sais pas, mais c'est vrai que nos petits maghrébins sont vraiment à l'aise en mathématiques, en particulier en ce qui concerne le calcul mental où c'est d'une rapidité, d'une vélocité qui laisse pantois les autres. Le raisonnement mathématique, c'est très intéressant ne suit pas du tout en général notre logique à nous, notre logique d'adulte, et je compte très souvent sur ces petits enfants là pour, au début de l'année, prouver aux autres qu'il y a des cheminements complètement différents de ceux plus ou moins établis, qui sont tout à fait justes et vont permettre d'arriver au résultat souhaité. Mais ces enfants là sont en général des enfants mal scolarisés, qui ont des difficultés importantes en français, qui n'auront pas une bonne scolarité parce qu'on a beau dire que les mathématiques, c'est l'outil n°1, c'est la clé n°1, dans les petites classes, un enfant qui ne sait pas lire, il ne va pas aller bien loin, même si, en mathématiques, ... Par exemple, j'en avais un l'année dernière, il ne pouvait avoir de bons résultats chiffrés en mathématiques que si je lui donnais un coup de main dans la lecture des énoncés, parce que si je le laissais tout seul devant sa feuille, c'était fichu !

Voyez-vous une différence dans la réussite entre l'écrit et l'oral pour les enfants en difficulté ?

Bien sûr ! Là, c'est un cas flagrant. La question se pose : est-ce qu'il faut à un certain moment dire "eh bien, tant pis, toute la sélection se passera dans la suite de la scolarité et ensuite dans le monde du travail beaucoup plus par l'écrit que par l'oral, en conséquence de quoi, il faut qu'à un moment donné, l'enfant se retrouve seul devant sa feuille et sache lire, sache déchiffrer, sache comprendre une consigne, qui plus est un énoncé complet. Il faut qu'il soit capable de faire ça". C'est vrai que je vois une grosse différence. Par moments, je laissais ces enfants se dépatouiller dans ces difficultés là, mais c'est vrai que leurs résultats étaient largement modifiés, à cause, j'en étais sûre de la mauvaise compréhension du texte. ... *En primaire, je relis le texte mais c'est vrai que la lecture globale collective n'a aucune incidence sur les gamins qui sont en difficulté de lecture, il faut le reprendre avec eux tout seuls.*

7. Pensez-vous que tous les élèves peuvent acquérir les notions des programmes de mathématiques jusqu'en 3ème ?

Non. Je vais faire une parenthèse en tant que parent avec un enfant en 5ème. Cet enfant réussit bien partout sauf en mathématiques. Ce n'est pas catastrophique mais c'est loin d'être brillant. Ce que je constate, c'est qu'il y a une régression, alors c'est pour ça que je dis... Par exemple, dans un point très particulier du programme de 5ème qui concernait les fractions, au départ, il y avait des notions de base qui avaient été travaillées au CM2. Pour cette gamine, ces notions de base étaient acquises à 100% en CM2, au niveau de la compréhension, tout à coup, quand on a redémarré au début de la 5ème, c'était complètement aboli ; je n'exagère quasiment pas en disant qu'elle était incapable de dire ce qu'était 1/2. Alors, je me dis, à propos de la question : "les notions peuvent-elles être acquises jusqu'en 3ème ?", *en soi, de manière intrinsèque, de manière intellectuelle, oui, elles pourraient, elles devraient l'être,* la preuve : je prends cet exemple, la notion de fraction était très bien acquise par cet enfant là, donc j'imagine par la plupart des enfants trois ans avant. *Et, tout à coup, deux ans plus tard, il n'y a plus rien,* alors je crois qu'il y a encore une fois tout un contexte, "para tout ce qu'on voudra" qui fait que ça va modifier les choses et que ça va avoir une incidence sur les notions proprement dites. Il se trouve qu'elle a eu des professeurs qui n'étaient pas extrêmement reluisants en mathématiques mais je suis persuadé que ce n'est pas le seul problème. *Les mathématiques ne l'intéressent absolument pas et je crains bien que toutes les notions qu'on va lui inculquer encore pendant 2 ans jusqu'en 3ème, ça lui passe complètement au-dessus de la tête et qu'elle ne les acquière pas.*

Ces notions pourraient-elles être acquises avec un enseignement adapté ?

Elles pourraient, à mon avis, intellectuellement parlant et, par rapport au degré de maturité générale de la classe d'âge à laquelle ça s'adresse, il me semble que les notions de mathématiques proposées depuis le CP jusqu'en 3ème pourraient être acquises, pas dans tous les cas, mais souvent, ça ne me semble pas du tout démesuré.

8 et 9 Le travail en groupe. Qu'en pensez-vous ? de l'utilité par rapport à l'apprentissage des élèves ?

J'ai été un partisan farouche du travail en groupes, alors qu'il était peu pratiqué il y a une quinzaine d'années. J'ai un peu tempéré, comme presque pour tout, dans la mesure où je pense que *ça reste un moyen très intéressant dans les activités de recherche, dans les activités d'enquête, de partage des tâches, si toutefois on sait bien maîtriser la synthèse parce qu'il ne suffit pas de mettre un groupe sur tel ou tel thème de recherche et de laisser comme ça en jachère et ne pas restructurer. Ça me paraît intéressant de les faire travailler en groupe surtout pour les initier à une bonne synthèse, à un plan, à une structure, ça, ça me paraît intéressant mais je ne crois pas que ce soit bien de n'utiliser que cette forme de travail.* L'adapter à certaines formes de travail qui le méritent. Ça me paraît aussi intéressant, j'ai omis un aspect intéressant, *lorsqu'on souhaite une intercommunication entre les groupes, c'est-à-dire comparer un certain nombre de choses qui ont été menées sur le même sujet. En gros, il y a deux lignes qui me paraissent intéressantes dans le travail en groupe : soit pour alléger la tâche parce qu'on a un travail très important à réaliser,* on se met pas petits groupes, on se détermine les tâches, chacun va faire son travail, ensuite on resynthétise le tout, on regroupe le tout et on va arriver à un produit fini global qui appartient à toute la classe, avec exposé de chaque groupe à l'ensemble de la classe pour que chaque groupe ne soit pas étranger à ce qui a été fait dans les autres groupes. *Ou soit, et ça me paraît très intéressant en mathématiques* – la première chose est surtout vraie dans les autres matières mais la seconde est fort pertinente en mathématiques – *mettre plusieurs groupes sur exactement le même travail et confronter les méthodologies.* Chacun expose ce qui s'est passé, comment on est arrivé du point A au point B et après que tous les groupes puissent dire : c'est cette méthode là qui nous paraît la plus rentable, la plus précise.

Et à l'intérieur d'un même groupe ?

A l'intérieur du groupe, je crois que ce qui est intéressant, c'est l'aspect social évidemment, c'est-à-dire savoir se tolérer, savoir se répartir les tâches, parce qu'il est hors de question, et ça, je ne le supporte pas bien, qu'on se retrouve dans un groupe avec un ou deux qui abat tout le travail pendant que les autres jouent au pendu. Là, *je crois que c'est le travail de* *l'enseignant d'être complètement vigilant et structuré à ce niveau là, au départ, se débrouiller pour qu'à aucun moment, un enfant ne puisse être en jachère dans le groupe parce que, ça je crois que c'est très mauvais pour l'enfant en question.*

Avec des enfants en difficulté générale, on a quelquefois du mal à mettre en place du travail en groupes.

Justement, là, c'est tout mon travail auprès des normaliens que je vois quand ils sont sur le terrain en responsabilité. Certains sont très tentés de manière louable par ce travail là mais ont des difficultés énormes à le mettre en place parce qu'*il y a trop d'éléments qu'il ne faut pas absolument pas écarter quand on prépare son travail d'équipe.* Un travail d'équipe, ça ne se résume pas à dire on met les tables l'une à côté de l'autre et en avant, je donne une consigne et vous vous débrouillez ! C'est tout sauf ça, *le travail en groupes, c'est un travail qui demande une préparation de la part du maître, et c'est peut-être le seul moment où je pense dire aux normaliens que ce serait ma seule exigence de préparation écrite : je veux voir comment ils ont structuré leur travail d'équipes parce que sinon c'est le bazar. Il faut le faire en petites quantités parce que ça demande effectivement beaucoup de boulot. Ça demande beaucoup de conception, beaucoup de travail matériel parce qu'on ne met pas des enfants en équipe sans donner des matériaux en maths, parce qu'il faut qu'ils aient tous quelque chose à faire,* donc ça passe par le matériel, quel qu'il soit, selon la discipline, des bandes de papier, des messages... il faut qu'il y ait une motivation et ça demande un vrai travail de préparation.

12 Rôle de la mémoire

Un rôle important mais il me semble avoir constaté que là, *il y a une certaine inégalité* qui est dû à une mauvaise répartition des données au départ. J'ai l'impression que, bien sûr, le rôle du maître c'est ça, *il va falloir faire travailler ce côté mémoriel, moi je suis tout à fait pour les leçons, par moments des leçons par cœur comme les conjugaisons ou les tables,* c'est comme ça et pas autrement, bourrage de crâne, quoi. Pour certaines matières, ça s'y prête de temps en temps. Ceci dit, j'ai quand même constaté que les enfants ne sont pas tous dotés de la même manière en mémoire. Evidemment, *il y a la fameuse mémoire sélective,* il y a des enfants qui vont retenir plein de choses dans tel domaine et pas du tout dans tel autre parce sans doute, tout au fond d'eux-mêmes, c'est de ça qu'ils ont besoin pour fonctionner et que le reste, ils n'en ont pas besoin, je suis à peu près convaincu de ça. C'est peut-être un peu grossier, un peu sommaire, la manière dont je le dis, mais je suis quand même un peu convaincu que tous, même beaucoup plus tard, on fonctionne sur ce schéma là. Les gamins ne sont pas doués de la même manière au départ. *On voit des gamins qui ont une mémoire extraordinaire, et ce n'est pas forcément lié à la réussite scolaire, qui ont une mémoire soit visuelle, soit auditive, soit uniquement cognitive, et puis d'autres qui n'en ont vraiment pas, malgré tout ce qu'on peut leur faire.* Combien de fois, on voit, de manière légitime et désespérée des parents qui viennent le soir de très bonne foi et qui disent "j'ai vu qu'il a eu une très mauvaise note dans sa leçon, je ne comprends pas, il l'a apprise, je lui ai fait réciter. La mémoire uniquement mécanique qui ne passe pas par la compréhension, c'est sûr que les enfants qui sont mal dotés à ce niveau là, c'est un tissu qui se déchire tout de suite. Mais même, en dehors de ça, je crois qu'il y a des enfants qui ont une mémoire très vacillante et donc entraînement. Même si on n'a pas tout de suite des résultats tangibles et probants, je crois qu'il faut ... moi, personnellement j'entraîne beaucoup cela.

Voyez-vous des différences suivant les enfants pour, par exemple les poésies et les tables de multiplication ?

Tout à fait, et donc, c'est peut-être une conclusion hâtive, mais les enfants qui retiennent les tables de multiplication, c'est peut-être que, inconsciemment, ils savent qu'ils ont à faire avec ça.

Je ne suis pas sûr non plus que si on est intéressé par telle chose on va la retenir. Par exemple, on évoquait tout à l'heure la poésie, c'est un domaine qui pour moi a une importance très grande et justement je crois que la manière dont j'appréhende la poésie est tellement peu liée aux mécanismes que je ne sais pas un seul poème par cœur. J'ai appris des poèmes quand j'étais petit, je lis énormément des poésies, je ne sais aucun poème par cœur, et pourtant c'est quelque chose qui m'intéresse énormément, alors qu'il y a des choses qui ne m'intéressent pas spécialement et que je sais par cœur. Je crois que pour les enfants, c'est pareil. Il y a des enfants qui savent très bien leurs tables de multiplication alors que ça ne les intéresse pas spécialement. Je crois que les raisons pour lesquelles on retient ou ne retient pas sont tellement complexes que je ne me sens pas habilité à dire quoi que ce soit.

Chaque enfant est très différent, et notre enseignement, ce vers quoi il devrait tendre, c'est le travail individualisé avec une mise à plat totale des structures existantes et des institutions existantes. Il me semble, si j'ai vraiment envie de souhaiter quelque chose, je ne sais pas sous quelle forme, je suis incapable de le dire, parce que c'est tellement difficile de le concevoir, tel que ça existe actuellement, mais je crois que l'individualisation existe tellement peu actuellement ...

C'est un moyen qui vous paraîtrait susceptible de réduire les difficultés ?

Absolument, ce n'est pas le seul et toujours avec des moments de regroupement, de synthèse... Mais dans notre enseignement tel qu'il existe actuellement, on ne peut pas dire que ça existe.

13. Travail à la maison

C'est différent pour le primaire et pour le secondaire. En ce qui concerne le primaire, les textes sont complètement absurdes dans la mesure où, dans le secondaire, une grande partie du travail fait en classe va s'appuyer sur ce qui se fait à la maison, sans discussion possible parce qu'il y a quand même du travail écrit à la maison qui est assez conséquent, alors qu'en primaire, on interdit le travail à la maison. Il y a quand même là un hiatus assez incohérent. En général, quasiment partout, surtout à la fin de la chaîne du primaire, au CM, les enseignants informent les parents que ce n'est pas légal, mais qu'ils le donnent, ce qui est mon cas, je dis aux parents je donne du travail écrit et je dis pourquoi. Maintenant, si des parents s'y opposent, ils le disent. *Il n'y a jamais aucun parent qui s'y oppose parce que c'est le bon sens, au contraire, je crois que les parents solliciteraient le travail.* A petites doses, bien sûr, mais je crois que, dans la mesure où, si dans la classe, dans la journée, il y a pas mal de recherche, de découvertes par groupes, *il me paraît indispensable qu'à un moment de la journée, l'enfant se retrouve confronté seul devant les acquisitions qu'il a faites dans la journée ou dans les jours précédents et qu'il les réinvestisse dans des petites choses écrites.* En général, le travail que je donne à la maison, *c'est du réinvestissement direct, c'est jamais des gros travaux de synthèse, ça, ça se fait en classe,* mais les petites choses ponctuelles, simples, qui doivent montrer si oui ou non une notion qui a été étudiée dans les jours précédents a été acquise, je le donne à la maison, parce que, ne serait-ce que physiquement, le gamin se retrouve tout seul à la maison, alors que dans la classe, il ne se trouve jamais tout seul.

Est-ce que ce n'est pas là qu'il y a des différences sociales qui interviennent très fortement.

Si, je crois que là, tout instituteur doit être bien conscient que le travail fait à la maison, du moins en ce qui concerne le primaire, on ne peut plus du tout avoir le même discours pour le secondaire, *il faut absolument que le gamin le fasse tout seul.* Le maître est tout à fait capable de voir s'il l'a fait tout seul ou pas, et naturellement il n'y aura jamais *aucun système de notation sur le travail à la maison, sinon ce serait d'une injustice terrible, alors que ce n'est pas le cas, et c'est ça qui est terrible, pour le secondaire. La plupart du temps, on leur demande des travaux qui les dépassent et qui demandent absolument une aide adulte.* J'ai trouvé que ça s'était amoindri la deuxième année en 5ème, surtout au 3ème trimestre. Il y a des périodes de forcing et puis tout à coup plus rien, je ne suis pas sûr que ça les arme bien pour la rentrée assez hard qu'ils vont connaître en 4ème. En revanche, l'année dernière, on leur donnait des enquêtes où je suis sûr que l'enfant, le mieux constitué soit-il, avait du mal à faire tout seul. On ne leur demande jamais des choses comme ça *en primaire, on ne leur demande que des choses qu'ils sont capables de faire tout seuls. Je crois avoir obtenu que les parents ne s'en mêlent pas.*

17. Si vous deviez caractériser les mathématiques, quels termes utiliseriez-vous ?

C'est *une certaine autorité* qui me vient, c'est peut-être à cause de mon vécu personnel. *C'est autoritaire, c'est dogmatique, c'est fermé.* Ce n'est pas quelque chose qui me paraît naturel, du moins à un niveau plus grand après, pas au niveau primaire, *on a beaucoup de chance au niveau primaire, quand on leur enseigne à compter, à faire des opérations, ils vont voir que ça sert dans la vie de tous les jours, mais le gros problème après, et on entendra les étudiants le ressasser dans tous les sens, c'est qu'ils ne voient pas l'application directe dans le vécu quotidien, alors qu'une dissertation, ça sert parce que ça permet de mettre à plat les idées qu'on a en permanence,* qui sont toujours là dans notre quotidien, qui nous suivent, notre pensée est toujours en gestation, en mouvance. *Les mathématiques, elles semblent être coupées de la réalité au quotidien.* Je crois que, pour beaucoup d'enfants et d'adolescents, c'est quand même un leitmotiv.

Je voudrais quand même savoir quels termes étaient proposés.

une théorie, des outils pour résoudre des problèmes, un langage, des outils pour modéliser le réel, du calcul, du formalisme, de l'abstraction, des objets de savoir...

Des objets de savoir iraient bien dans le sens de ce que j'ai dit parce que c'est sûr que ça me paraît important, mais justement objet de savoir, ça reste fermé, c'est pas dans une mouvance, et c'est ça *pour moi, les mathématiques, ça ne s'inscrit pas dans une dynamique.*

15 bis Qu'est-ce que vous appréciez le plus chez vos élèves, qu'est-ce que vous essayez de valoriser le plus ?

Au niveau des qualités de travail, pas individuelles ? pas humaines ?

Ça dépend de ce qui est le plus important pour vous.

J'apprécie le plus les enfants qui font des efforts, chacun à leur niveau, même si c'est tout petit, parce que les efforts, c'est quand même quelque chose qui va placer l'enfant dans une dynamique de travail. Sans effort, sauf pour les enfants "très doués"... *J'aime bien l'enfant qui essaie de construire quelque chose,* attention les efforts, ça ne veut pas dire les contraintes et des choses pénibles etc... *ça veut dire aller un peu de l'avant, c'est-à-dire essayer de se surpasser un petit peu,* parce que si on reste dans l'état dans lequel on arrive, c'est une statique qui ne permet pas d'avancer. Un enfant qui va essayer de faire quelque chose, qui va tenter de faire quelque chose, moi ça m'intéresse et j'aime toujours cet enfant là, et j'ai toujours envie de l'aider à porter plus loin son effort.

Situation moquette

On veut recouvrir le sol d'une pièce de 4m sur 6m. On hésite entre

- de la moquette vendue par rouleau de 4m de large à 556F le mètre,
- des dalles de moquette vendues par boîte de 45 dalles.

Chaque dalle mesure 30 cm sur 30 cm. La boîte de 45 dalles coûte 535F.

1) On demande aux élèves de poser des questions auxquelles on peut trouver des réponses en se servant de ces données et d'y répondre. On ramasse les feuilles.

2) Dans un bilan collectif, on regroupe les questions des élèves et on leur demande de les traiter. On en ajoute éventuellement. On veut traiter les questions suivantes (dans le désordre) :

- nombre de dalles nécessaires,
- nombre de boîtes de dalles nécessaires,
- prix de revient de chaque solution,
- aire de la pièce (en m^2, en dalles),
- aire d'une dalle (en cm^2, en m^2),

On espère que les élèves vont réinvestir le travail sur fractions, pavage, unités d'aire, aire du rectangle.

Les données ont été prises dans le catalogue CAMIF de l'époque.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

RESUME

La première partie de la thèse porte sur l'enseignement de la notion d'aire au cours moyen et en sixième. Nous commençons par une analyse de la notion mathématique. Une étude de l'évolution des programmes, des manuels de sixième et des articles parus dans le bulletin de l'APMEP permet de repérer une rupture nette dans l'enseignement et d'en étudier la nature et les circonstances. Nous analysons ensuite une expérience et l'évaluation qui en a été faite par tests et entretiens. Ceci nous amène à faire de nouvelles propositions d'ingénierie didactique.
La deuxième partie soulève quelques questions didactiques à partir de l'enseignement dans des classes composées en grande partie d'élèves de milieux défavorisés et ayant, pour la majorité d'entre eux, des difficultés scolaires. Il s'agit d'un travail exploratoire avec des visées surtout diagnostiques. Les principaux thèmes abordés sont les décimaux et rationnels, la proportionnalité et les aires. Le premier fait l'objet d'études complémentaires par tests dans diverses classes de collège. Nous avons observé des classes de cours moyen et de sixième en reprenant des ingénieries didactiques déjà expérimentées. Nous avons aussi réalisé une étude de cas, interrogé des élèves plus jeunes, questionné par écrit des élèves de deux cours moyen de recrutement social contrasté et interrogé des enseignants pour cerner les représentations des uns et des autres sur les mathématiques, leur apprentissage et leur enseignement. Les résultats portent sur les contenu abordés et sur l'analyse des facteurs qui nous paraissent contribuer au " non-apprentissage " de certains élèves.

MOTS CLES

didactique des mathématiques,
aires,
décimaux,
rationnels,
élèves en difficulté,
ingénierie didactique,
institutionnalisation,
représentations métacognitives.

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Février 1992
ISBN : 2-86612-160-0